Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

А. П. Маркеев

(Москва)

Исследуется устойчивость положений равновесия гамильтоновых систем с одной и двумя степенями свободы при наличии резонанса. Получены условия неустойчивости, а также условия устойчивости по Ляпунову для тех случаев, где была известна лишь формальная устойчивость.

1. Пусть дана каноническая система

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{1.1}$$

где H — аналитическая по x, y в окрестности начала координат функция Гамильтона.

$$H=\sum_{k=2}^{\infty} H_k(x,y,t), \quad H_k=\sum_{\nu_1+\nu_2=k} a_{\nu_1\nu_2}(t)\, x^{\nu_1} y^{\nu_2}, \quad a_{\nu_1\nu_2}(t+2\pi)\equiv a_{\nu_1\nu_2}(t)$$

Предположим, что линеаризованная система устойчива, а характеристические показатели $\pm i\lambda$ таковы, что число $k\lambda$ не будет целым при $k=1, 2,\ldots, 2n$. Тогда при надлежащем выборе переменных x, y функция Гамильтона может быть записана в виде [1]

$$H=\lambda r+c_2 r^2+\ldots+c_n r^n+H'(x,y,t) \qquad (2r=x^2+y^2) \tag{1.2}$$

Здесь $H'=O(r^{n+1/2})$ — аналитическая функция x, y. Если среди постоянных c_2, c_3, ..., c_n есть отличная от нуля, то положение равновесия $x=y=0$ устойчиво [2,3].

Если же число $k\lambda$ целое, то, вообще говоря, функцию Гамильтона к виду (1.2) привести нельзя, а положение равновесия может быть неустойчивым. В предлагаемой работе рассматривается задача об устойчивости в резонансных случаях, когда число $k\lambda$ целое при $k\geqslant 3$.

Основной результат работы состоит в утверждении об устойчивости (при выполнении некоторого неравенства) в случаях резонансов четного порядка (число k — четное). Утверждения о неустойчивости в той или иной форме были получены ранее в [4-8].

В п. 6 рассматривается устойчивость положения равновесия автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, когда отношение частот линеаризованной системы равно трем.

2. Будем исследовать устойчивость положения равновесия системы (1.1) внутри области устойчивости системы линейного приближения. Это означает, что число 2λ — не целое. Для дальнейшего потребуется вещественное, каноническое, 2π-периодическое по t, линейное по x, y, пре-

образование гамильтониана к форме, когда его квадратичная часть имеет вид $H_2 = {}^1/_2\,\lambda\,(q^2 + p^2)$. Покажем, как найти это преобразование.

Линеаризованная система (1.1) имеет два линейно независимых решения

$$\alpha_j = \varphi_j(t)\, e^{i\lambda_j t}, \quad \beta_j = \psi_j(t)\, e^{i\lambda_j t} \qquad (j = 1, 2) \tag{2.1}$$

где $\lambda_1 = -\lambda_2 = -\lambda$, а периодические функции φ_j, ψ_j удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\varphi_j/dt = -i\lambda_j\varphi_j + a_{11}\varphi_j + 2a_{02}\psi_j, \qquad d\psi_j/dt = -i\lambda_j\psi_j - 2a_{20}\varphi_j - a_{11}\psi_j \tag{2.2}$$

Если начальные значения φ_1, ψ_1 являются комплексными сопряженными соответственно с начальными значениями φ_2 и ψ_2, то в силу однородности системы (2.2) эти функции будут комплексными сопряженными и при всех t. Тогда можно положить

$$\varphi_1 = z_1 + iz_2, \quad \psi_1 = z_3 + iz_4, \quad \varphi_2 = \overline{\varphi}_1, \quad \psi_2 = \overline{\psi}_1$$

где z_j — вещественные периодические функции t. Согласно (2.2), они удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$dz_1/dt = -\lambda z_2 + a_{11}z_1 + 2a_{02}z_3, \quad dz_2/dt = \lambda z_1 + a_{11}z_2 + 2a_{02}z_4$$
$$dz_3/dt = -\lambda z_4 - 2a_{20}z_1 - a_{11}z_3, \quad dz_4/dt = \lambda z_3 - 2a_{20}z_2 - a_{11}z_4 \tag{2.3}$$

Нетрудно проверить, что линеаризованная система (1.1) имеет два независимых интеграла

$$(u + iv)e^{-i\lambda t}, \qquad (u - iv)e^{i\lambda t} \; (u = z_3x - z_1y, \; v = z_4x - z_2y) \tag{2.4}$$

Введем новые переменные q, p по формулам $q = v$, $p = u$. Это преобразование будет каноническим, так как функции z_j удовлетворяют соотношению

$$z_2z_3 - z_1z_4 = \mathrm{const} \tag{2.5}$$

в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

Выберем начальные значения функций z_j так, чтобы начальные значения функций φ_1, ψ_1 и φ_2, ψ_2 были комплексными сопряженными, а постоянная в (2.5) равнялась единице.

Обозначим через $x_j(t), y_j(t)$ $(j = 1, 2)$ решения линеаризованной системы (1.1), удовлетворяющие условиям

$$x_1(0) = y_2(0) = 1, \qquad x_2(0) = y_1(0) = 0$$

Тогда начальные значения функций φ_j, ψ_j находятся из систем уравнений

$$[x_1(2\pi) - e^{i2\pi\lambda_j}]\,\varphi_j(0) + x_2(2\pi)\,\psi_j(0) = 0$$
$$y_1(2\pi)\,\varphi_j(0) + [y_2(2\pi) - e^{i2\pi\lambda_j}]\,\psi_j(0) = 0 \tag{2.6}$$

Определители этих систем равны нулю, так как $e^{i2\pi\lambda_j}$ — мультипликаторы линеаризованной системы (1.1). Решения систем (2.6) можно записать в виде

$$\varphi_j(0) = -x_2(2\pi)\, c_j, \qquad \psi_j(0) = [x_1(2\pi) - e^{i2\pi\lambda_j}]c_j \tag{2.7}$$

где c_j — произвольные постоянные. Возьмем их вещественными и равными c. Тогда $\varphi_1(0) = \bar\varphi_2(0)$, $\psi_1(0) = \bar\psi_2(0)$.

Из (2.7) получаем начальные значения функции z_j

$$z_1(0) = -x_2(2\pi)\,c, \qquad z_2(0) = 0$$
$$z_3(0) = [x_1(2\pi) - \cos 2\pi\lambda]\,c, \qquad z_4(0) = c\cdot\sin 2\pi\lambda \tag{2.8}$$

Полагая постоянную в (2.5) равной единице, получаем условие для определения c

$$c^2 x_2(2\pi)\sin 2\pi\lambda = 1 \tag{2.9}$$

Величина $x_2(2\pi)\sin 2\pi\lambda \neq 0$, так как устойчивость исследуется внутри области устойчивости линеаризованной системы (1.1). Выбором знака λ (который до сих пор был не определенным) эту величину можно получить положительной. Поэтому уравнение (2.9) всегда имеет вещественное решение относительно c.

Таким образом, искомое каноническое преобразование найдено, и в переменных q, p функция Гамильтона

$$H = {}^1/_2\lambda(q^2 + p^2) + \sum_{k=3}^{\infty} H_k(q, p, t) \tag{2.10}$$

где

$$H_k = \sum_{\nu_1+\nu_2=k} h_{\nu_1\nu_2}(t)\, q^{\nu_1} p^{\nu_2} \equiv \sum_{\nu_1+\nu_2=k} a_{\nu_1\nu_2}(t)\,(z_2 p - z_1 q)^{\nu_1}(z_4 p - z_3 q)^{\nu_2}$$

3. Для исследования устойчивости проведем дальнейшие преобразования гамильтониана (2.10). Введем канонические переменные q^*, p^* при помощи 2π-периодической по t производящей функции

$$S = qp^* + S^{(3)} \equiv qp^* + \sum_{\nu_1+\nu_2=3} s_{\nu_1\nu_2}(t)\, q^{\nu_1} p^{*\nu_2}$$

Нетрудно показать, что если число 3λ не будет целым, то в новой функции Гамильтона $H^*(q^*, p^*, t)$ можно полностью уничтожить члены третьей степени. Для этого 2π-периодические функции $s_{\nu_1\nu_2}(t)$ надо взять такими

$$s_{30} = 2(u_{30}' + u_{21}'), \qquad s_{03} = 2(v_{30}' - v_{21}')$$
$$s_{12} = 2(u_{21}' - 3u_{30}'), \qquad s_{21} = -2(3v_{30}' + v_{21}') \tag{3.1}$$
$$u_{\nu_1\nu_2}' = f(t)\sin\lambda(\nu_2 - \nu_1)\,t + g(t)\cos\lambda(\nu_2 - \nu_1)\,t$$
$$v_{\nu_1\nu_2}' = f(t)\cos\lambda(\nu_2 - \nu_1)\,t - g(t)\sin\lambda(\nu_2 - \nu_1)\,t$$
$$f(t) = {}^1/_2 \operatorname{ctg}\pi\lambda(\nu_2 - \nu_1)\,J_1(2\pi) + {}^1/_2 J_2(2\pi) - J_2(t) \tag{3.2}$$
$$g(t) = -{}^1/_2 \operatorname{ctg}\pi\lambda(\nu_2 - \nu_1)\,J_2(2\pi) + {}^1/_2 J_1(2\pi) - J_1(t)$$

$$J_1(t) = \int_0^t [u_{\nu_1\nu_2}''(x)\cos\lambda(\nu_2 - \nu_1)\,x - v_{\nu_1\nu_2}''(x)\sin\lambda(\nu_2 - \nu_1)\,x]\,dx$$

$$J_2(t) = \int_0^t [u_{\nu_1\nu_2}''(x)\sin\lambda(\nu_2 - \nu_1)\,x + v_{\nu_1\nu_2}''(x)\cos\lambda(\nu_2 - \nu_1)\,x]\,dx$$

$$u''_{30} = {}^1/_8(h_{30} - h_{12}), \qquad v''_{30} = {}^1/_8(h_{03} - h_{21}) \tag{3.3}$$
$$u''_{21} = {}^1/_8(3h_{30} + h_{12}), \qquad v''_{21} = -{}^1/_8(3h_{03} + h_{21})$$

Члены четвертой степени в H^* при таком выборе $S^{(3)}$ вычисляются по формуле

$$H_4^*(q, p^*, t) = H_4 + {}^1/_2\lambda \left[\left(\frac{\partial S^{(3)}}{\partial q}\right)^2 - \left(\frac{\partial S^{(3)}}{\partial p^*}\right)^2\right] + \frac{\partial H_3}{\partial p^*}\frac{\partial S^{(3)}}{\partial q} \tag{3.4}$$

Если $3\lambda = m$ (m — целое число), то полностью H_3^* уничтожить нельзя. Гамильтониан H^* в этом случае можно привести к виду

$$H^* = {}^1/_2\lambda(q^{*2} + p^{*2}) + 2u_{30}^*(q^{*3} - 3q^*p^{*2}) + 2v_{30}^*(p^{*3} - 3p^*q^{*2}) + H'(q^*, p^*, t) \tag{3.5}$$

где

$$u_{30}^* = x_{30}\cos mt - y_{30}\sin mt, \quad v_{30}^* = x_{30}\sin mt + y_{30}\cos mt$$

$$x_{30} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u_{30}''\cos mt + v_{30}''\sin mt)\,dt$$

$$y_{30} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(v_{30}''\cos mt - u_{30}''\sin mt)\,dt \tag{3.6}$$

Функция H' имеет период 2π по t и $H' = O((|q| + |p|)^4)$.

Теорема 3.1. Если $x_{30}^2 + y_{30}^2 \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво.

Доказательство. Сделаем замену переменных

$$q^* = \sqrt{2r}\sin(\lambda t + \varphi - \theta), \qquad p^* = \sqrt{2r}\cos(\lambda t + \varphi - \theta)$$

$$\sin 3\theta = x_{30}(x_{30}^2 + y_{30}^2)^{-1/2}, \qquad \cos 3\theta = y_{30}(x_{30}^2 + y_{30}^2)^{-1/2}$$

В переменных r, φ гамильтониан (3.5) запишется в виде

$$H = 4\sqrt{2(x_{30}^2 + y_{30}^2)}\, r\sqrt{r}\cos 3\varphi + O(r^2) \tag{3.7}$$

Возьмем функцию Ляпунова

$$V = r\sqrt{r}\sin 3\varphi \tag{3.8}$$

Ее производная в силу уравнений движения с гамильтонианом (3.7) будет такой

$$dV / dt = 18\sqrt{2(x_{30}^2 + y_{30}^2)}\, r^2 + O(r^{5/2}) \tag{3.9}$$

Так как функция V знакопеременная, а dV / dt определенно-положительная в окрестности начала координат, то, согласно теореме Ляпунова о неустойчивости [9], положение равновесия неустойчиво.

4. Если число 3λ не будет целым, то в переменных q^*, p^* гамильтониан запишется в виде

$$H^* = H_2^* + H_4^* + \ldots$$

где H_4^* вычисляется по формулам (3.1) — (3.4). Пусть $4\lambda = m$. Делая замену переменных $q^*, p^* \to q^\circ, p^\circ$ с производящей функцией $S = q^*p^\circ + S^{(4)}$, можно упростить члены четвертой степени в новой функции Гамильтона, которая, как показывают выкладки, будет при этом иметь вид

$$H = {}^1/_2\lambda(q^{\circ 2} + p^{\circ 2}) + {}^1/_4 c_2(q^{\circ 2} + p^{\circ 2})^2 + u_{40}^*(q^{\circ 4} - 6q^{\circ 2}p^{\circ 2} + p^{\circ 4}) - 4v_{40}^* q^\circ p^\circ(q^{\circ 2} - p^{\circ 2}) + H^\circ(q^\circ, p^\circ, t) \tag{4.1}$$

где функция $H^\circ = O((|q^\circ| + |p^\circ|)^5)$ и имеет период 2π по t. В (4.1) введены обозначения

$$c_2 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(3h_{40}^* + h_{22}^* + 3h_{04}^*)\,dt$$

$$u_{40}^* = x_{40}\cos mt - y_{40}\sin mt, \quad v_{40}^* = y_{40}\cos mt + x_{40}\sin mt$$

$$x_{40} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u_{40}''\cos mt + v_{40}''\sin mt)\,dt$$

$$y_{40} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(v_{40}''\cos mt - u_{40}''\sin mt)\,dt \tag{4.2}$$

$$u_{40}'' = {}^1/_8\,(h_{40}^* - h_{22}^* + h_{04}^*), \quad v_{40}'' = {}^1/_8\,(h_{13}^* - h_{31}^*)$$

Если x_{40} и y_{40} одновременно не равны нулю, то можно перейти к переменным r, φ по формулам, аналогичным формулам предыдущего пункта. Получим

$$H = r^2(c_2 + b_2\cos 4\varphi) + H''(r, \varphi, t) \tag{4.3}$$

где $b_2 = 4\sqrt{x_{40}^2 + y_{40}^2}$, а функция $H'' = O(r^{5/2})$ и периодична по φ и t с периодами 2π и 8π соответственно.

Теорема 4.1. Если $|c_2| < b_2$, то положение равновесия неустойчиво, если $|c_2| > b_2$, то имеет место устойчивость по Ляпунову.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения возьмем функцию Ляпунова

$$V = r^2\sin 4\varphi \tag{4.4}$$

Функция V будет знакопеременной в окрестности начала координат. Для производной получаем выражение

$$dV/dt = 8r^3(b_2 + c_2\cos 4\varphi) + O(r^{7/2}) \tag{4.5}$$

При выполнении неравенства $|c_2| < b_2$ функция (4.5) будет определенно-положительной в достаточно малой окрестности начала координат. Следовательно, положение равновесия неустойчиво.

Пусть теперь $|c_2| > b_2$. Нетрудно проверить, что в этом случае в системе с гамильтонианом $h = r^2(c_2 + b_2\cos 4\varphi)$ r будет периодической, а φ — монотонной функциями t. Сделаем каноническое преобразование, приводящее h к переменным действие I — угол W [10]. Эти переменные связаны с r и φ соотношениями

$$r = \frac{\partial S}{\partial\varphi}, \quad W = \frac{\partial S}{\partial I}, \quad S(I, \varphi) = \int_0^{\varphi} r\,d\varphi \tag{4.6}$$

Здесь S — производящая функция. Интеграл в (4.6) вычисляется при условии

$$r^2(c_2 + b_2\cos 4\varphi) = h \tag{4.7}$$

Здесь $h = h(I)$ — функция, обратная к

$$I(h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\,d\varphi \tag{4.8}$$

При этом r означает функцию $r(\varphi, h)$, получаемую из (4.7).

Заметим, что знаки коэффициентов c_2 и b_2 в (4.3) можно считать одинаковыми. Действительно, если это не так, то, переходя к новой угловой переменной $\varphi - {}^1/_4\,\pi$, получим гамильтониан, у которого эти коэффициенты будут иметь одинаковые знаки. Введем обозначение $k^2 = 2b_2/(b_2 + c_2)$. В силу условий теоремы 4.1 выполняются неравенства $0 \leqslant k^2 < 1$. После простых вычислений из (4.6) — (4.8) получаем

$$S = \frac{\pi I}{4K(k)}F(2\varphi, k) \tag{4.9}$$

где K и F — полный и неполный эллиптические интегралы первого рода, k — их модуль. Из (4.6) и (4.9) находим связь новых и старых переменных

$$r = \pi I\left[2K(k)\,\mathrm{dn}\,\frac{4K(k)}{\pi}W\right]^{-1}, \qquad \varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{am}\,\frac{4K(k)}{\pi}W \tag{4.10}$$

Если еще сделать замену переменных

$$I = \mu^2 P, \qquad W = Q, \qquad t = 4T$$

то преобразованная функция Гамильтона (4.3) может быть записана в виде

$$H = \mu^2 H^{(0)}(P) + \mu^3 H^{(1)}(P, Q, T) + \ldots \tag{4.11}$$

При $0 < \mu < \mu^*$ функция H аналитична в области

$$|\operatorname{Im} Q, T| \leqslant \rho, \qquad 1 - \delta < P < 2 + \delta$$

где μ^*, ρ, δ — некоторые малые числа, и имеет период 2π по Q и T. Функция $H^{(0)}$ в (4.11) имеет вид

$$H^{(0)} = \frac{\pi^2(b_2 + c_2)}{K^2(k)}P^2 \tag{4.12}$$

Так как $d^2H^{(0)}/dP^2 \neq 0$, то согласно [3] при малом μ окрестность $1 \leqslant P \leqslant 2$ с точностью до остатка малой меры заполнена инвариантными торами системы с гамильтонианом (4.11). Следовательно, ее траектории, начинающиеся достаточно близко к началу координат, при всех t не выходят из окрестности $0 \leqslant P < 2$. Учитывая связь P и исходных переменных x, y, получаем отсюда утверждение об устойчивости положения равновесия $x = y = 0$

Отметим, что при выполнении неравенства $|c_2| > b_2$ существует степенной ряд (возможно расходящийся), который формально является знакоопределенным интегралом системы (1.1) [11]. Согласно теореме 4.1, в рассматриваемой задаче из формальной устойчивости следует устойчивость по Ляпунову.

5. Пусть функция Гамильтона (1.2) такова, что λk не будет целым числом при $k = 1, 2, \ldots, 2n$, а коэффициенты $c_2, c_3, \ldots, c_n$, равны нулю. Тогда вопрос об устойчивости не решается членами порядка $2n$ в разложении функции Гамильтона.

Допустим теперь, что число $\lambda(2n+1)$ будет целым. Тогда гамильтониан (1.2) можно преобразовать к виду

$$H = ar^n\sqrt{r}\cos(2n+1)\varphi + O(r^{n+1}) \qquad (a = \mathrm{const}) \tag{5.1}$$

При помощи функции Ляпунова

$$V = r^n\sqrt{r}\sin(2n+1)\varphi \tag{5.2}$$

легко доказать, что при $a \neq 0$ положение равновесия неустойчиво.

Пусть далее либо $a=0$, либо число λk не будет целым при $k = 1, 2, \ldots 2n+1$, а число $2\lambda(n+1)$ — целое. Тогда гамильтониан приводится к виду

$$H = r^{n+1}[c + b\cos 2(n+1)\varphi] + O(r^{n+3/2}) \tag{5.3}$$

где c и b — постоянные коэффициенты. При $|b| > |c|$ положение равновесия неустойчиво. Это доказывается при помощи функции Ляпунова

$$V = r^{n+1}\sin 2(n+1)\varphi \tag{5.4}$$

Если же $|b| < |c|$, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову. Для доказательства сделаем каноническое преобразование $r, \varphi \to I, w$

при помощи производящей функции

$$S(I, \varphi) = \frac{\pi I}{2(n+1)G_{n+1}} \int\limits_0^{(n+1)\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt[n+1]{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \qquad \left(k^2 = \frac{2b}{b+c}\right) \tag{5.5}$$

Знаки b и c можно считать одинаковыми, поэтому $0 \leqslant k^2 < 1$. В (5.5) введено обозначение

$$G_{n+1} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{(1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/(n+1)}}$$

В новых переменных гамильтониан запишется в виде

$$H = \left(\frac{\pi I}{2G_{n+1}}\right)^{n+1} (b + c) + \Gamma(I, W, t)$$

где функция $\Gamma = O(I^{n+3/2})$ и периодична по W и t.

Дальнейшее доказательство сводится к применению результатов работы [3], как это сделано в п. 4.

6. Рассмотрим теперь устойчивость положения равновесия автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Предположим, что частоты линейного приближения не равны нулю и связаны соотношением $\omega_1 = 3\omega_2$, а квадратичная часть в разложении функции Гамильтона не будет знакоопределенной. При надлежащем выборе переменных q_j, p_j ($j = 1,2$) функцию Гамильтона можно представить в виде

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + b r_2 \sqrt{r_1 r_2} \cos(\varphi_1 + 3\varphi_2) + \\ + H'(q_j, p_j) \tag{6.1}$$

где функция H' аналитична по q_j, p_j

$$H' = O((r_1 + r_2)^{5/2})$$

$$q_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, \qquad p_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j$$

Введем обозначения

$$a_1 = c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}, \qquad b_1 = 3\sqrt{3} b$$

В [12, 13] показано, что если $|a_1| < |b_1|$, то положение равновесия неустойчиво, а в случае $|a_1| > |b_1|$ имеет место формальная устойчивость. Покажем, что из формальной устойчивости следует устойчивость по Ляпунову.

Используя интеграл $H = h = \text{const}$, сведем систему с двумя степенями свободы к системе с одной степенью свободы, но с 2π-периодической зависимостью новой функции Гамильтона от новой независимой переменной. Так как движение рассматривается в достаточно малой окрестности начала координат, то можно считать, что $r_j \sim \varepsilon$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$. Пусть траектория начинается так близко к началу координат, что $h \sim \varepsilon^{5/2}$, тогда, разрешая уравнение $H = h$ относительно r_2, получим

$$r_2 = -\Phi_0(r_1, \varphi_1, \varphi_2) - \Phi_1(r_1, \varphi_1, \varphi_2, h)$$

где

$$\Phi_0 = -3r_1 - \omega_2^{-1} [a_1 + b_1 \cos(\varphi_1 + 3\varphi_2)] r_1^2$$

Функция $\Phi_1 = O\ (r_1^{5/2})$ имеет период 2π по φ_1 и новой независимой переменной φ_2. Если вместо φ_1 ввести угол $\varphi = \varphi_1 + 3\varphi_2$, то гамильтониан Φ полученной системы с одной степенью свободы запишется в виде

$$\Phi = -\omega_2^{-1}\ (a_1 + b_1 \cos\varphi)\, r_1^2 + R\ (r_1, \varphi, \varphi_2, h)$$

Знаки a_1 и b_1 можно считать одинаковыми. Сделаем замену переменных $r_1, \varphi \to I, W$ при помощи производящей функции

$$S = \frac{\pi I}{K(k)} F\ (\varphi/2, k) \left(k^2 = \frac{2b_1}{a_1 + b_1} < 1\right) \tag{6.2}$$

где K и F — эллиптические интегралы, k — их модуль. Гамильтониан Φ примет вид

$$\Phi = -\frac{\pi^2 (a_1 + b_1)}{4\omega_2 K^2 (k)} I^2 + R'\ (I, W, \varphi_2, h) \tag{6.3}$$

Функция $R' = O\ (I^{5/2})$, имеет период 2π по W и φ_2 и аналитична по всем переменным в области

$$0 < \delta_1 \leqslant I \leqslant \delta_2, \qquad |h| < \delta_3, \qquad |\mathrm{Im}\ W, \varphi_2| < \delta_4$$

где δ_i — некоторые малые действительные числа. Применяя теперь к системе с гамильтонианом (6.3) результаты исследований работы [3], нетрудно показать, что для каждого допустимого значения h в достаточно малой окрестности начала координат существуют инвариантные торы. Отсюда следует устойчивость положения равновесия $q_j = p_j = 0$.

Поступила 20 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.— Л., Гостехтеориздат, 1941.
2. Мозер Ю. О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., Математика, т. 6, вып. 5, стр. 51.
3. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Усп. матем. н., 1963, т. 18, № 6, стр. 91.
4. Levi-Civita T. Sorpa alcuni criteri di instabilita. Ann. mat. pura et appl., Ser. 3, 1901, vol. 5, p. 221.
5. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике М., Изд-во иностр. лит., 1959.
6. Мерман Г. А. О неустойчивости периодического решения канонической системы с одной степенью свободы в случае главного резонанса. Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», М., Изд-во АН СССР, 1963, стр. 18.
7. Каменков Г. В. Исследование устойчивости периодических движений. Тр. ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы. Теорет. механ. 1966, т. 15, вып. 3.
8. Мустахишев К. М. К вопросу об устойчивости гамильтоновых систем. Изв. АН КазССР. Сер. физ.-матем., 1967, № 1, стр. 63.
9. Ляпунов А. М. Собр. соч., т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1956.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теорет. физ., т. 1. Механика, М., «Наука», 1965.
11. Moser J. Stabilitätsyerhalten kanonischer Differentialgleichungssysteme. Nachr. Akad. Wiss. Cöttingen. Math.-phys., 1955, Kl. IIa, Nr 6, S. 87—120.
12. Маркеев А. П. Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса. ПММ, 1968, т. 32, вып.4.
13. Маркеев А. П. Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.