

ОБРАЗОВАНИЕ «ВИСЯЧЕГО» СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПРОФИЛЯ С ИЗЛОМОМ ОБРАЗУЮЩЕЙ

Э. Г. Ш и ф р и н

(Москва)

Устанавливается аналитически необходимость возникновения висячего скачка при обтекании тел с изломом образующей, а также его свойства в плоском потоке идеального газа. Исследуется случай малой сверхзвуковой скорости набегающего потока, когда изменениями энтропии на ударной волне можно пренебречь; при этом также используется возможность трансзвуковой аппроксимации ударной поляры и пересекающих ее характеристик.

Заметим, что течение с «висячим» скачком уплотнения в области за головной ударной волной было получено при расчете обтекания тел с изломом образующей В. Ф. Ивановым [1]. Это явление и ранее наблюдалось в экспериментах, однако причина его была недостаточно ясна; М. Лайтхиллом, например, высказывалось предположение, что причиной образования скачка является отрыв и последующее прилипание пограничного слоя в окрестности угловой точки ([2], стр. 366).

Рассмотрим обтекание равномерным сверхзвуковым потоком профиля с изломом образующей (в точке излома угол выпуклый). Без ограничения общности возьмем симметричное обтекание, так что достаточно исследовать верхнюю полуплоскость течения. Точка излома (обозначим ее через A) отделяет передний отрезок контура OA от заднего AF (O — передняя кромка профиля в случае присоединенной ударной волны или критическая точка в случае волны отошедшей, F — задняя кромка профиля). Отрезок OA (конечной длины) в общем случае считается криволинейным; отдельно рассматривается случай прямолинейного отрезка OA , когда головная ударная волна присоединенная, а течение за ней сверхзвуковое. Отрезок AF в основном будет считаться прямолинейным. Угол его наклона к оси симметрии обозначим через β_0 (положительное направление отсчета углов — против часовой стрелки). Длина отрезка AF при $\beta_0 \geq 0$ бесконечна, при $\beta_0 < 0$ — конечна. Если отрезок AF криволинейный, то под β_0 будем понимать угол наклона профиля в точке F (при конечной длине AF) или угол наклона его асимптоты (если длина AF бесконечна). При $\beta_0 > 0$ будем считать β_0 настолько малым, чтобы около клина с углом раствора $2\beta_0$ существовало течение с присоединенной ударной волной (за которой скорость сверхзвуковая); предполагается, что такое течение имеет место на бесконечном удалении.

Обозначим через β_1 и β_2 углы наклона к оси симметрии касательной к профилю в точке A на отрезках OA и AF ; ввиду выпуклости профиля в точке излома $\beta_1 > \beta_2$.

Будем называть:

1) ударной волной — головную ударную волну, возникающую в равномерном сверхзвуковом потоке впереди профиля. Если ударная волна отошедшая, будем предполагать, что область дозвуковых скоростей ограничена звуковой линией, проходящей к ударной волне из точки A ;

2) вторичным скачком уплотнения — скачок уплотнения в области за ударной волной;

3) висячим скачком — вторичный скачок уплотнения, по обе стороны которого поток сверхзвуковой. По аналогии с характеристиками будем называть его скачком первого (второго) семейства, если касательная к нему получается поворотом вектора скорости на положительный (отрицательный) острый угол. Висячие скачки разных семейств не сопрягаются гладко друг с другом.

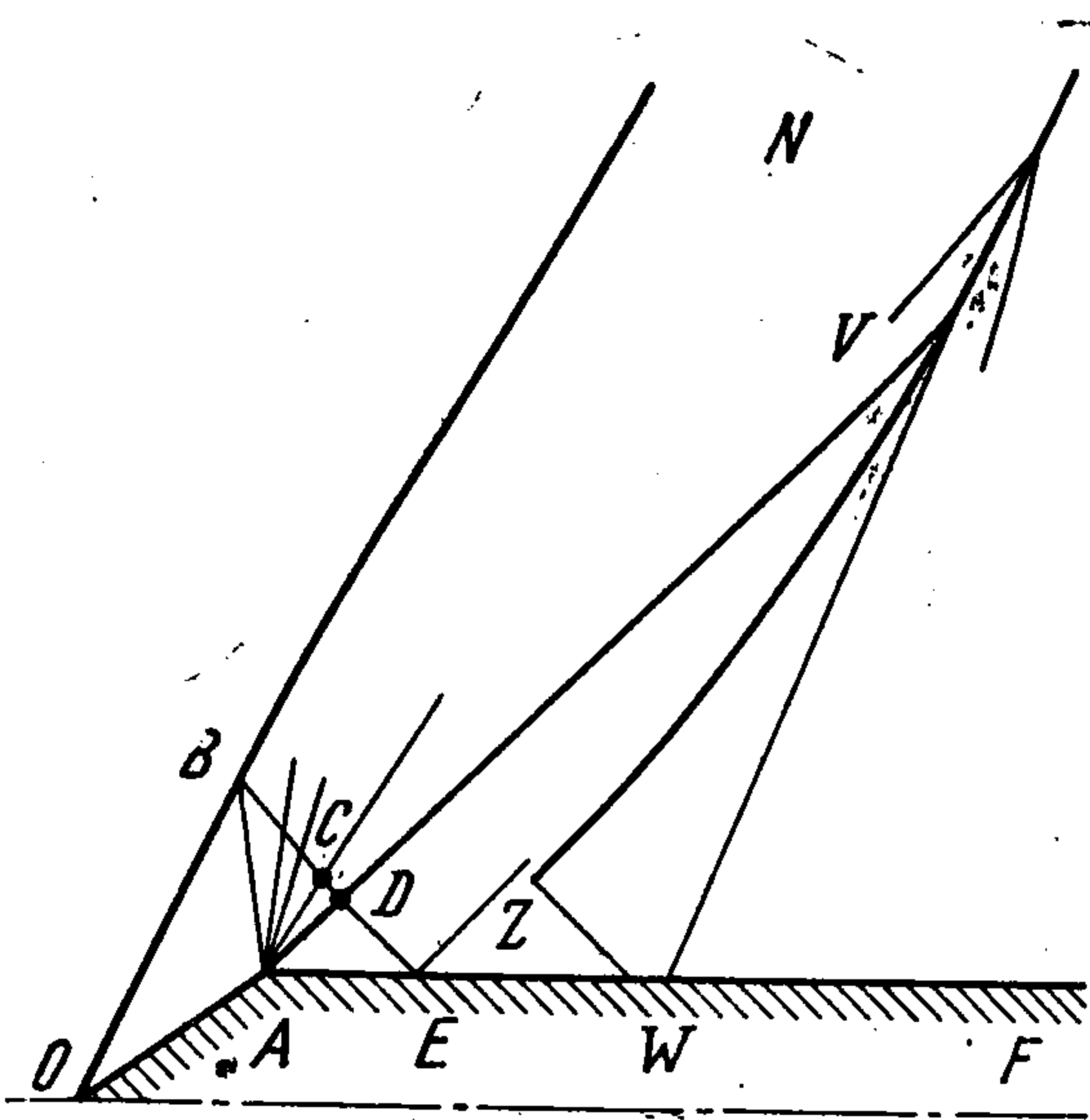
Исследование проводится с помощью отображения области за ударной волной с декартовой системой координат xu (ось x совпадает с осью симметрии) в плоскость дографа скорости $\eta\beta$ ($\eta = (k+1)^{1/2}(\lambda-1)$, λ — коэффициент скорости, β — угол наклона вектора скорости к оси симметрии, k — показатель адиабаты, ось β , u направлены вертикально вверх, ось λ , x — горизонтально вправо. Точки в физической пло-

скости будем обозначать большими буквами, их образы в плоскости годографа — малыми.

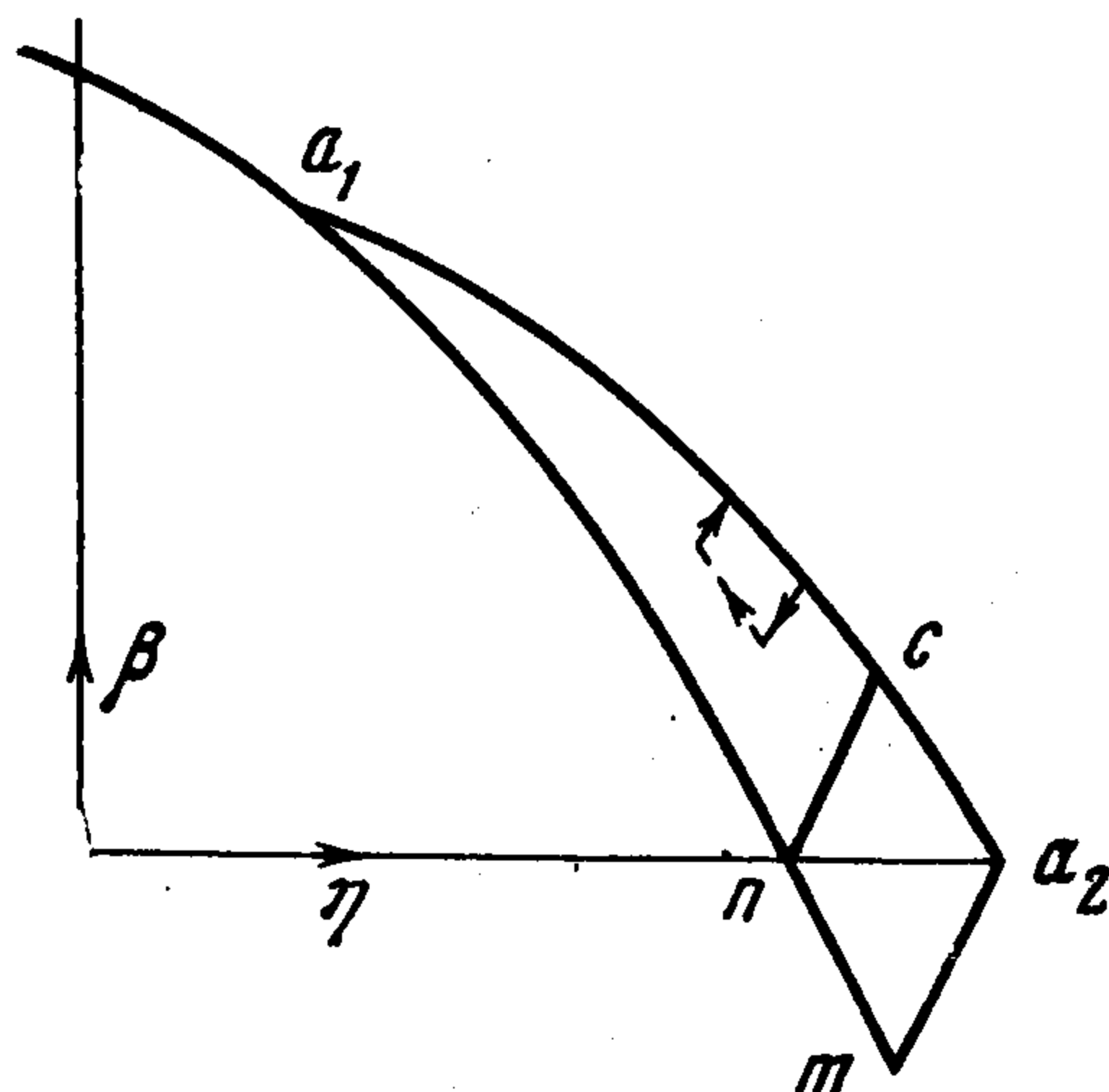
Рассмотрим сначала обтекание с присоединенной ударной волной профиля с прямолинейными отрезками OA и AF при $\beta_0 = \beta_2 = 0$. На фиг. 1 OB — прямолинейный отрезок ударной волны; AB, AC, AD — прямолинейные отрезки характеристик первого семейства, BE — характеристика второго семейства.

Отобразим область за ударной волной в плоскость $\eta\beta$.

Образ области $OBEO$ — отрезок характеристики a_1a_2 второго семейства $\beta = C - 2/3\eta^{3/2}$ (фиг. 2); точка a_1 с ординатой β_1 лежит на ударной поляре $\beta = 2^{-1/2}(\eta_\infty + \eta)^{1/2}(\eta_\infty - \eta)$; точка a_2 лежит на оси η . Уравнения характеристик и ударной поляры даны в трансзвуковой аппроксимации.



Фиг. 1



Фиг. 2

Лемма 1. Отрезок характеристики, проведенный из точки ударной поляры в сторону увеличения η , лежит вне петли ударной поляры.

Легко вычисляется, что на ударной поляре при $0 < \eta < \eta_\infty$ угол наклона характеристики к оси η меньше по абсолютной величине угла наклона ударной поляры. Далее остается только учесть, что в плоскости $\eta\beta$ характеристики инвариантны относительно сдвига в направлении оси β .

Из леммы 1 следует, что в точке a_2 будет $\eta > \eta_\infty$.

Таким образом, в верхней полуплоскости $\eta\beta$ существует точка пересечения отрезка характеристики a_1a_2 и характеристики первого семейства nc , проведенной из точки n ударной поляры, изображающей равномерный поток перед ударной волной.

Теорема 1. Если при обтекании с присоединенной ударной волной профиля с прямолинейными отрезками OA и AF течение в области за ударной волной сверхзвуковое, то оно не является непрерывным.

Рассмотрим в физической плоскости узел характеристик первого семейства, выходящих из угловой точки A (будем далее называть его узлом A). Если течение за ударной волной всюду сверхзвуковое и непрерывное, то каждая характеристика узла пересекает ударную волну, либо уходит на бесконечность. В соответствии с этим в плоскости годографа каждая характеристика первого семейства, проходящая через характеристику a_1a_2 , должна попасть либо на ударную поляру, либо в точку n , также лежащую на ударной поляре и изображающую равномерный прямолинейный поток на бесконечном удалении.

Таким образом, получается противоречие, так как характеристики первого семейства, выходящие из точек отрезка ca_2 , в плоскости $\eta\beta$, не могут попасть на ударную поляру. Следовательно, если течение за ударной волной сверхзвуковое, то должен возникнуть вторичный скачок уплотнения.

Теорема 1 при надлежащем изменении формулировки распространяется на случай отошедшей ударной волны; в соответствии с «законом монотонности» вектора скорости

на звуковой линии [3], характеристика, изображающая угловую точку, располагается в плоскости $\eta\beta$ вне ударной поляры (выше ее).

Предположения о прямолинейности отрезков OA и AF не являются существенными. Если профиль криволинейный и $\beta_0 < 0$, для доказательства достаточно потребовать, чтобы было $\beta_2 < \beta_c$. Если отрезок прямолинейный, это условие примет вид $\beta_0 < \beta_c$.

Предположим, что возникающие в области за ударной волной вторичные скачки (один или несколько) являются висячими скачками первого семейства. Определим основные свойства этих скачков, которые будем называть далее просто скачками. В плоскости $\eta\beta$ образы точек на скачке (до и после скачка) лежат на отрезке ударной поляры

$$\beta_2 = \beta_1 + 2^{-1/2}(\eta_1 + \eta_2)^{-1/2}(\eta_1 - \eta_2), \quad \beta_2 \geq \beta_1$$

Лемма 2. Образ вершины выпуклого угла профиля представляет в плоскости $\eta\beta$ отрезок характеристики, проходимый без точек возврата. Образ окрестности вершины, покрываемой характеристиками узла (расположенного в этой вершине), в плоскости $\eta\beta$, однолистен и лежит по одну сторону от характеристики — образа вершины угла.

То, что угловая точка изображается в плоскости годографа характеристикой, показано в [4]. Отсюда следует, что в этой точке имеется узел характеристик другого семейства.

Как известно, отображение физической плоскости xy в плоскость $\varphi\psi$ является при $0 < \lambda < (k+1)^{1/2}(k-1)^{-1/2}$ взаимнооднозначным (φ — потенциал скорости, ψ — функция тока) [4]. Это означает, что угловая точка в плоскости $\varphi\psi$ изображается точкой. Угол γ наклона характеристики в плоскости $\varphi\psi$ к линии $\psi = \text{const}$ вычисляется по формуле

$$\text{ctg } \gamma = \frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{h_2 ds_1}{h_1 ds_2} = \frac{\text{ctg } \mu}{\varepsilon(\lambda)} = (M^2 - 1)^{1/2} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{1/(k-1)} \quad (1)$$

$$ds_1 = h_1 d\varphi, \quad ds_2 = h_2 d\psi$$

Здесь, h_1, h_2 — коэффициенты Ламэ; M — число Маха, μ — угол Маха.

В плоскости $\varphi\psi$ характеристики, выходящие из угловой точки, расположены в дикритическом узле в порядке убывания γ , т. е. в порядке возрастания скорости. Поэтому при наличии точки возврата по характеристике, изображающей угловую точку в плоскости $\eta\beta$, в плоскости $\varphi\psi$ (а значит, и в физической плоскости) была бы складка, что невозможно.

Рассмотрим в плоскости $\eta\beta$ образ окрестности G угловой точки, покрываемой характеристиками узла. Предположим, что на изображающем угловую точку отрезке характеристики $a_1 a_2$ существует такая точка, что слева от нее G лежит по одну сторону от $a_1 a_2$, а справа — по другую. В этом случае должна быть складка отображения в плоскость $\eta\beta$; край складки (линия ветвления, где якобиан $\partial(\eta, \beta) / \partial(x, y)$ меняет знак) в потенциальном течении, как известно, характеристика [4]. Эта характеристика и образ угловой точки — разных семейств, следовательно, линия ветвления — характеристика узла. Легко видеть далее, что вдоль характеристик узла, сколь угодно близких к этой характеристике и расположенных по разные стороны от нее, распределения скорости были бы различны (в плоскости $\eta\beta$ они лежат по разные стороны от характеристики $a_1 a_2$). Это невозможно, так как на характеристике течение непрерывно.

Для дальнейшего удобно сформулировать отдельно известное свойство взаимного расположения характеристик и скачка уплотнения (см., например, [2]).

Лемма 3. Угол наклона скачка уплотнения к вектору скорости в области до скачка (после скачка) больше (меньше) угла Маха в соответствующей точке.

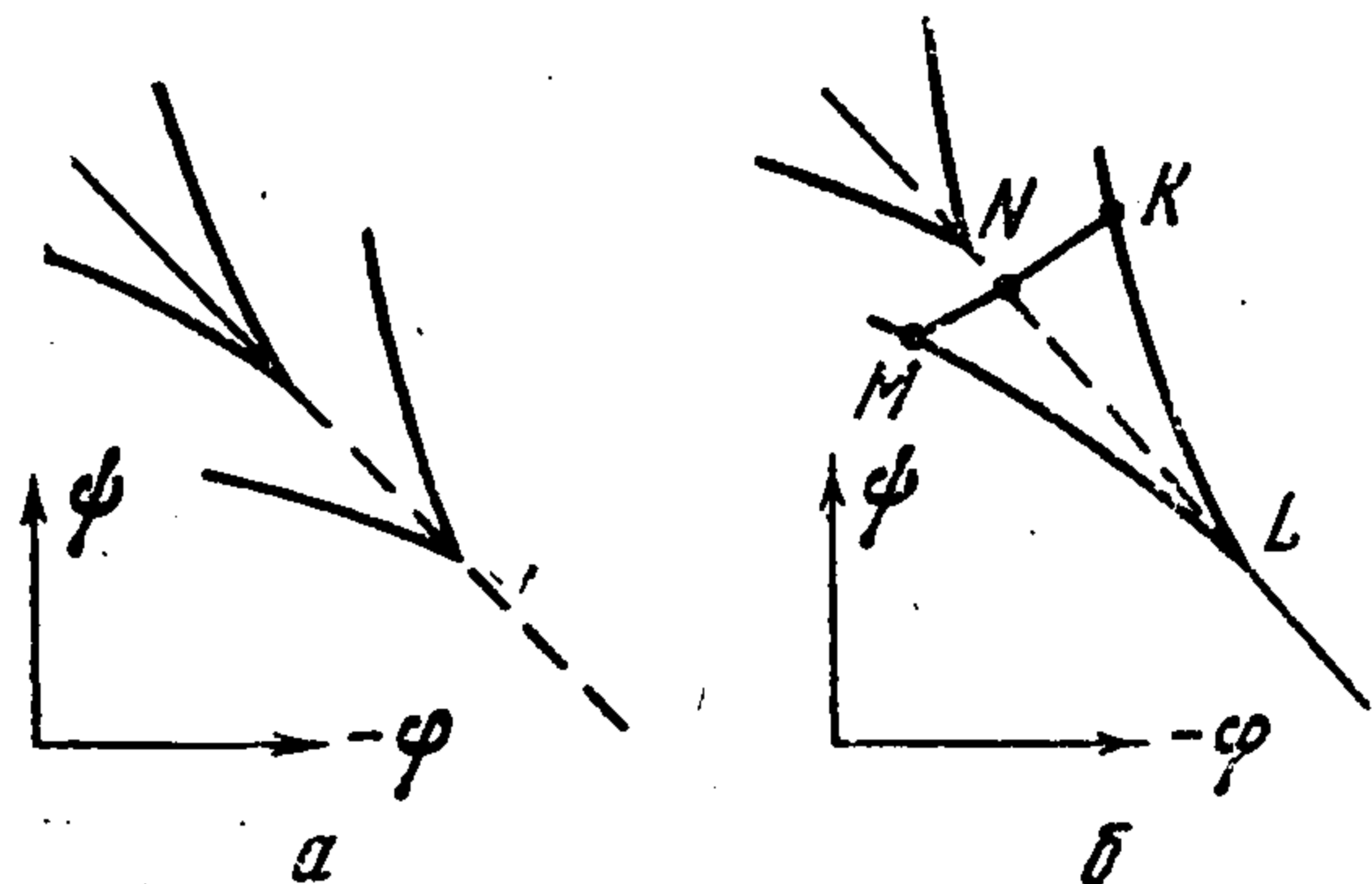
Будем называть началом (концом) висячего скачка ту его точку, в которой значение ψ на скачке является наименьшим (наибольшим) при отсчете ψ от профиля.

Теорема 2. Начало скачка не может лежать на внутренних характеристиках узла A . Скачок не может выходить из точки A , имея в ней нулевую интенсивность и ка-

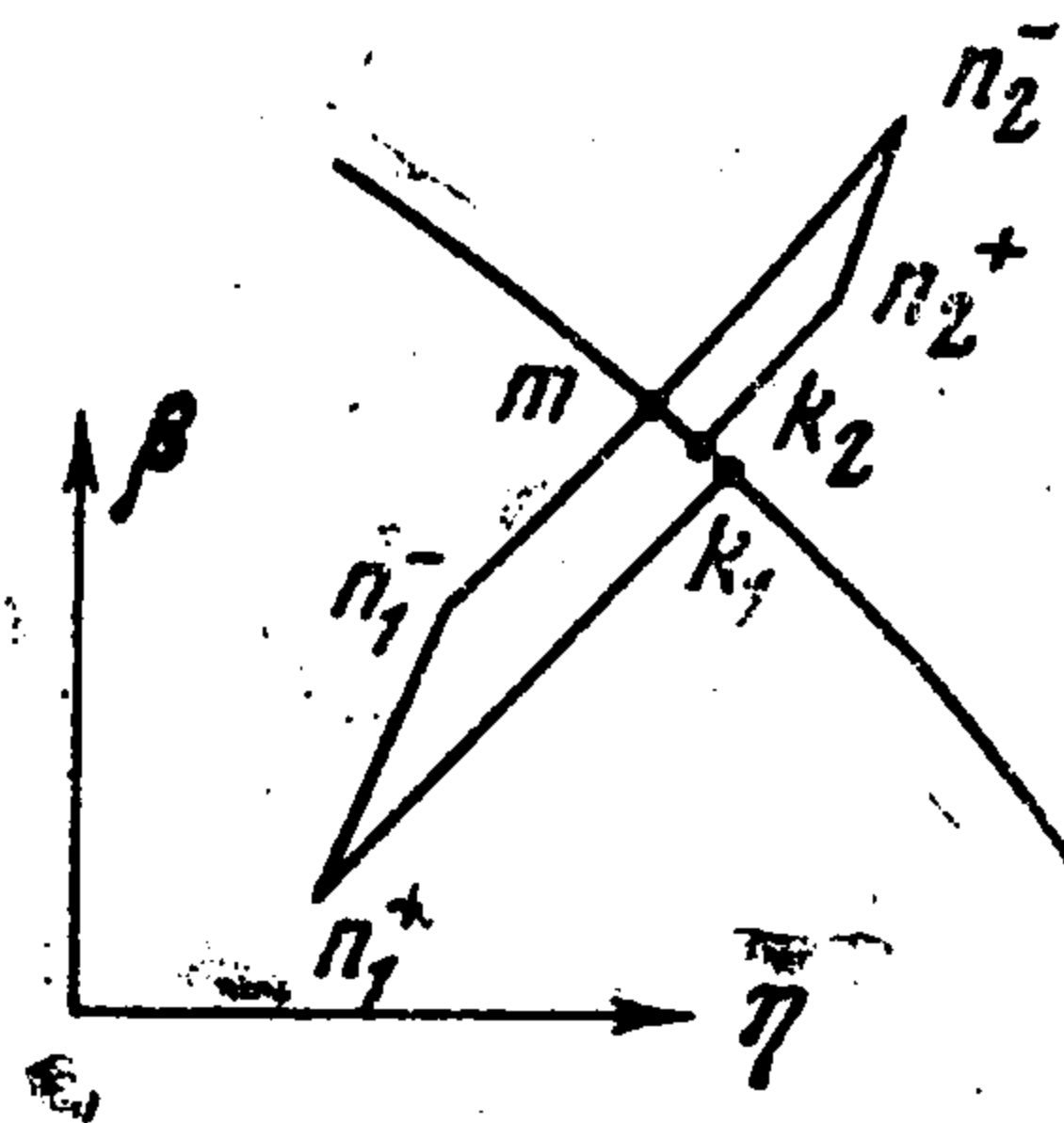
саясь одной из внутренних характеристик узла, так как это противоречило бы свойству аналитичности решения Прандтля — Майера.

Скачок не может выходить из точки A , имея в ней ненулевую интенсивность, так как в этом случае линия скачка принадлежала бы критическому узлу характеристик в точке A , что привело бы к образованию многолистности в физической плоскости.

Предположим теперь, что скачок начинается на некотором удалении от точки A в области, покрываемой характеристиками узла. Из леммы 3 следует, что характеристики, выходящие из точки A , проходят после пересечения со скачком в обратном направлении и, следовательно, снова входят в точку A . Этого не может быть, так как соединяя в плоскости $\eta\beta$ характеристики, выходящие из a_1a_2 , отрезком ударной поляры, соответствующим скачку первого семейства (пунктир на фиг. 2), получим, что отображение окрестности точки A будет многолистным, что противоречит лемме 2.



Фиг. 3



Фиг. 4

Рассмотрим частный случай обтекания профиля с прямолинейными отрезками OA и AF , когда течение за присоединенной ударной волной сверхзвуковое. Обозначим через H область, ограниченную характеристикой второго семейства ED и характеристиками первого семейства, проходящими через точки E и D в направлении от профиля (фиг. 1). Так как область H примыкает к треугольнику ADE , в котором поток равномерный и прямолинейный, течение в ней является простой волной (прямолинейными будут характеристики второго семейства). Характеристика ADN является границей области H .

Теорема 3. В случае, когда существует область H , начало скачка не лежит ни в H , ни на характеристике ADN .

Предположим обратное. Образ в плоскости $\eta\beta$ линии скачка (после скачка) в некоторой окрестности его начала будет характеристикой первого семейства, проходящей через точку a_2 .

Проведя через любую точку этой характеристики отрезок ударной поляры, соответствующий скачку первого семейства, получим, что образ линии скачка (перед скачком) лежит вне области, покрываемой характеристиками первого семейства, выходящими из отрезка a_1a_2 . Это противоречит лемме 3, так как характеристики первого семейства, проведенные из скачка (в некоторой окрестности его начала) в области перед скачком, либо принадлежат узлу A , либо содержатся в области H .

Если некоторому перемещению в физической плоскости соответствует убывание потенциала скорости φ , будем говорить, что это перемещение вниз по потоку.

Лемма 4. Висячий скачок располагается вниз по потоку от своей концевой точки (начала или конца)¹.

Не нарушая общности, ограничимся при доказательстве рассмотрением висячего скачка второго семейства, изображенного на фиг. 3 в координатах $\varphi\psi$ (сплошные линии — характеристики, пунктир — скачки). Покажем, что случай фиг. 3, б осуществиться не может.

Предположим обратное. В соответствии с леммой 3, из точки L (начало скачка) в направлении вверх по потоку выходят два характеристических луча второго семей-

¹ В [5] стр. 553 (фиг. 109, а) было высказано предположение о невозможности вырождения на звуковой линии или в ее окрестности «приходящего» висячего скачка; доказательство леммы 4 распространяется и на этот случай.

ства (по разные стороны от скачка), касательные друг к другу. Пусть M — точка на характеристическом луче в области до скачка, взятая достаточно близко к точке L ; MK — характеристика первого семейства; K — точка на характеристическом луче LK второго семейства (после скачка); N (N^-, N^+) — точка пересечения характеристики MK со скачком — до и после скачка.

В связи с тем, что лучи ML и KL касаются в точке L , будет $|\gamma_K| > |\gamma_M|$.

Действительно, если характеристики ML и KL обращены выпуклостями в разные стороны (одна к другой), то вблизи точки L будет

$$|\gamma_K| > |\gamma_L| > |\gamma_M|$$

Пусть теперь характеристики вблизи L обращены выпуклостями в одну сторону. Возьмем уравнения характеристик в виде $y = y(x)$ и $y_0 = y_0(x_0)$; при этом в точках (y, x) и (y_0, x_0) углы γ одинаковы. Тогда

$$dy/dx = dy_0/dx_0, \quad y - y_0 = k(x_0)(x - x_0)$$

Здесь $k(x_0)$ — угловой коэффициент прямых, соединяющих точки с равными γ на характеристиках KL и ML . Продифференцировав второе уравнение по x_0 и воспользовавшись первым, получим

$$\frac{dk}{d \ln s} + k = \frac{dy_0}{dx_0}, \quad s = x - x_0$$

Интегрирование этого уравнения даст

$$k = \frac{1}{s} \left(C + \int \frac{dy_0}{dx_0} ds \right) = \frac{1}{s} \left[C + \left(\frac{dy_0}{dx_0} \right)_L s + \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{dy_0}{dx_0} \right) \right]_L \frac{s^2}{2} + \dots \right]$$

Постоянная C здесь должна быть приравнена к нулю, так как в противном случае k обращалось бы в бесконечность при $s \rightarrow 0$ в любой системе координат x, y , что невозможно.

Таким образом, в точке L будет $k = dy_0/dx_0$. Если в точке L скорость сверхзвуковая, то направление характеристик первого семейства в точках M, K вблизи L будет отличаться от направлений линий $\gamma = \text{const}$. Отсюда нетрудно получить, что $|\gamma_K| > |\gamma_M|$, поэтому из формулы (1) получим $\eta_K < \eta_M$. Если в точке L скорость звуковая тот же результат получается из анализа формулы для k с учетом знака производной $d(\cdot)/ds$ (dy_0/dx_0) в окрестности точки L .

Рассмотрение отображения окрестности точки L в плоскость $\eta\beta$ с использованием леммы 1 дает противоположное неравенство $\eta_K > \eta_M$. На фиг. 4 показаны два возможных случая положения точки n^- (n_1^- и n_2^-) относительно точки m . Здесь $n_1^-n_2^-, n_1^+k_1, n_2^+k_2$ — характеристики первого семейства; $n_1^-n_1^+, n_2^-n_2^+$ — отрезки ударных поляр второго семейства.

Следствие 1. Конец скачка первого семейства (где он вырождается в характеристику) лежит на бесконечном удалении от профиля.

Следствие 2. Если скачок первого семейства пересекает ударную волну или другой скачок, то в точке пересечения интенсивность его не равна нулю.

Лемма 5. На ударной волне $J = \partial(\eta, \beta) / \partial(x, y) \leq 0$.

В связи с тем, что в точках ударной волны $\eta < \eta_\infty$, при малых значениях η_∞ течение в окрестности ударной волны описывается уравнениями трансзвуковых течений

$$(k+1)^{1/2} \eta \eta_\varphi - \beta_\psi = 0, \quad (k+1)^{1/2} \beta_\varphi - \eta_\psi = 0 \quad (2)$$

Присоединяя к этим уравнениям производные по направлению ударной волны, упрощенные в трансзвуковом диапазоне скоростей

$$\beta_\varphi \delta + \beta_\psi = \frac{d\beta}{ds} = \frac{d\beta}{d\delta} \kappa, \quad \eta_\varphi \delta + \eta_\psi = \frac{d\eta}{ds} = \frac{d\eta}{d\delta} \kappa$$

получим систему для определения производных $\eta_\varphi, \eta_\psi, \beta_\varphi, \beta_\psi$; так же как и правая часть системы, эти производные пропорциональны κ .

Здесь δ — угол наклона ударной волны к вертикальной оси, $d(\cdot)/ds$ — производная по направлению ударной волны; производные $d\beta/d\delta$ и $d\eta/d\delta$ вычисляются

по соотношениям на ударной волне в трансзвуковом приближении

$$\beta = \frac{2\delta}{(k+1)^{1/3}} \left[\eta_\infty - \frac{\delta^2}{(k+1)^{2/3}} \right], \quad \eta = \frac{2\delta^2}{(k+1)^{2/3}} - \eta_\infty, \quad \delta = (k+1)^{1/3} \sqrt{\frac{\eta_\infty + \eta}{2}} \quad (3)$$

Якобиан на ударной волне

$$J = \frac{\partial(\eta, \beta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\eta, \beta)}{\partial(\varphi, \psi)} = \frac{2}{(k+1)} (\eta - \eta_\infty) \kappa^2 \leq 0$$

Как известно [4], в дозвуковой области $J \leq 0$.

Следствие. Если характеристика является линией ветвления, то ее отражение от ударной волны также является линией ветвления (характеристика другого семейства).

Лемма 6. Если некоторый отрезок характеристики — линия ветвления, то и вся характеристика — линия ветвления.

Предположим, что некоторая точка внутри области течения ограничивает отрезок характеристики, являющийся линией ветвления. Так как линия ветвления не может кончиться внутри области течения, эта точка будет также ограничивать линию ветвления — отрезок характеристики другого семейства. Таким образом, окрестность этой точки в физической плоскости разбивается четырьмя характеристическими лучами на четыре сектора, в трех из которых J имеет один знак, а в четвертом — другой. Этого не может быть, так как области с разными знаками J однолистно отображаются при этом на один и тот же сектор, образованный в плоскости $\eta\beta$ двумя характеристическими лучами разных семейств.

Обозначим через Q область, ограниченную ударной волной, отрезком профиля OA , висячим скачком и последней характеристикой узла A (фиг. 1). В соответствии с теоремами 2, 3 начало скачка лежит либо на этой характеристике, либо на характеристике первого семейства, расположенной от нее вниз по потоку. Рассмотрев отображение области Q в плоскость годографа, можно установить, что течение в области Q не зависит от формы профиля на отрезке AF . Это свойство наблюдалось и в расчете [1]. Возьмем например, случай прямолинейного отрезка OA , когда течение за присоединенной ударной волной сверхзвуковое. Образ области Q содержится в области T , ограниченной ударной полярой a_1n , характеристикой второго семейства a_1a_2 (в точке $a_2 \beta = \beta_0$) и характеристиками первого и второго семейства a_2m и nt (фиг. 2).

Для определения функции тока ψ в области T задаются граничные условия на характеристике a_1a_2 и на ударной поляре

$$\psi = f(\eta), \quad \psi_\eta - \psi_\beta \left(\frac{\eta_\infty + \eta}{2} \right)^{1/2} \frac{7\eta_\infty + \eta}{5\eta_\infty + 3\eta} = 0$$

Функция $f(\eta)$ определяется как значение функции тока на характеристике второго семейства BD (фиг. 1.).

В случае отошедшей ударной волны область T содержит минимальную область влияния отрезка OA ; граница подобласти сверхзвуковых скоростей области T содержит, кроме указанных выше частей, отрезок линии $\eta = 0$, соединяющий ударную поляру и характеристику a_1a_2 .

Теорема 4. Отображение области Q в плоскость $\eta\beta$ однолистно, при этом $J \leq 0$.

Как известно, $J \leq 0$ при $\eta \leq 0$, поэтому достаточно доказать однолистность отображения сверхзвуковой подобласти T .

Из леммы 2 следует, что характеристики первого семейства (они принадлежат узлу A) не могут быть линиями ветвления. Из лемм 5, 6 следует, что линиями ветвления не могут быть также и характеристики второго семейства, выходящие из ударной волны, так как в противном случае каждая из них была бы отражением от ударной волны линии ветвления — характеристики первого семейства, выходящей из узла A . В случае отошедшей ударной волны граница подобласти T содержит звуковую линию; применив вместо леммы 5 «закон монотонности» [3] вместе с леммой 2, получим, что линиями ветвления не могут быть также и характеристики, выходящие из звуковой линии. Используя лемму 5, получим, что $J \leq 0$ в области T .

Из теоремы 4 вытекает следствие.

Отрезок ударной волны, ограничивающий область Q , обращен выпуклостью в сторону набегающего потока.

Лемма 7. На прямолинейном отрезке профиля $J \leq 0$ при $\eta < 0$, $J \geq 0$ при $\eta > 0$. Преобразуя выражения для J с использованием (2), получим

$$J = (k + 1)^{1/3} \eta \eta_p^2 \quad \text{при} \quad \partial \beta / \partial \varphi = 0$$

Следствие. Если характеристика является линией ветвления, то ее отражение от прямолинейного профиля (характеристика другого семейства) — также линия ветвления.

Обозначим через Z начало скачка, ограничивающего область Q , через V — точку пересечения последней характеристики узла A со скачком (если скачок начинается не на этой характеристике). Проведем характеристику второго семейства ZW до пересечения с профилем в точке W . Пусть P — область, ограниченная характеристиками AZ , ZW и отрезком профиля AW (если точка Z лежит на последней характеристике узла), или область, ограниченная характеристикой AV , скачком VZ , характеристикой ZW и отрезком профиля AW .

Из теоремы 4 и лемм 6, 7 следует

Теорема 5. При обтекании профиля с прямолинейным отрезком AF последняя характеристика узла A является линией ветвления. (Если существует область H , по разные стороны от нее J имеет разные знаки). Отображение области P в плоскость $\eta\beta$ однолистно, при этом $J \geq 0$. При перемещении по отрезку AF от точки A скорость монотонно убывает.

Теорема 6. При обтекании профиля с прямолинейным отрезком AF при $\beta_0 \leq 0$ скачок не пересекает ударную волну; помимо него не существует других висячих скачков первого семейства¹.

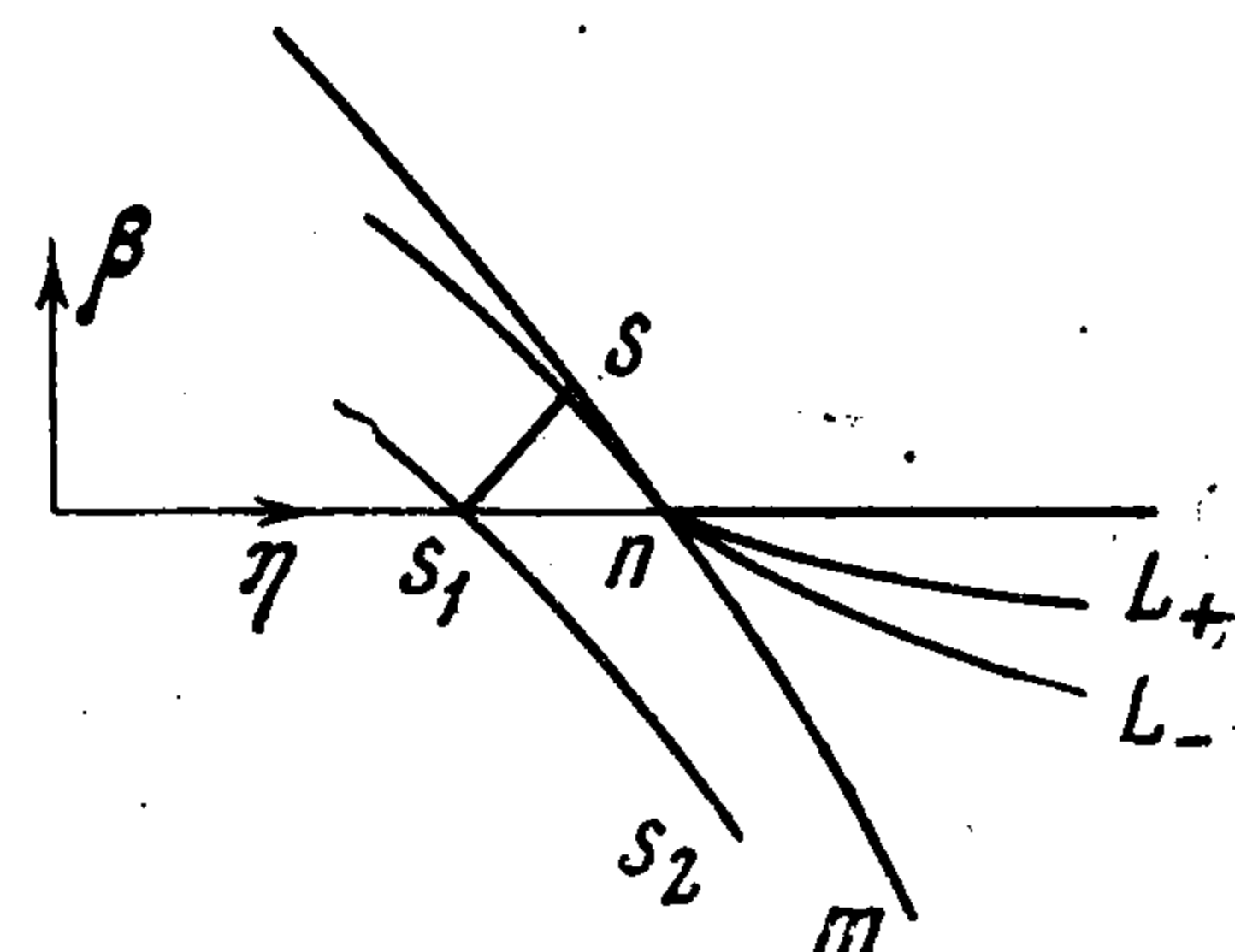
Обозначим $\eta\beta$ -образ линии скачка, ограничивающего область Q , в области до скачка через L_- , а в области после скачка — через L_+ . Линия L_- содержится в области T . Так как соответствующие точки линий L_- и L_+ соединяются отрезками ударных поляр первого семейства, используя лемму 1, получим, что линия L_+ лежит в плоскости $\eta\beta$ в области, расположенной сверху от характеристики второго семейства mn (имеется в виду вся характеристика).

Предположим, что скачок, ограничивающий область Q , пересекает ударную волну; обозначим точку пересечения через S . Проведем из точки S характеристику первого семейства к профилю SS_1 (из леммы 2 следует, что характеристика SS_1 не пересекает других скачков первого семейства, даже если они существуют). Из точки S_1 проведем характеристику второго семейства S_1S_2 до пересечения в точке S_2 либо со скачком, либо с ударной волной.

По предположению, точка S расположена на конечном расстоянии от профиля, значение скорости в точке S (за скачком) меньше скорости набегающего потока. Следовательно, точка s , $\eta\beta$ -образ S , не совпадает с точкой n , т. е. $\beta_s > \beta_n$.

Произведя построения характеристик ss_1 и s_1s_2 , получим, что точка s_2 лежит в плоскости $\eta\beta$ под характеристикой mn (фиг. 5). Это означает, что точка s_2 не принадлежит линии L_+ . Кроме того, из леммы 1 следует, что точка s_2 не может лежать и на ударной поляре. Таким образом, предположение о пересечении скачка и ударной волны привело к противоречию.

Для доказательства единственности скачка достаточно установить, в соответствии



Фиг. 5

¹ Последнее утверждение не вытекает из теории потока на бесконечном удалении от профиля [5]. Как указал автору О. С. Рыжов, эта теория допускает существование ударных волн между головной и хвостовой ударными волнами, но с более быстрым законом убывания интенсивности.

с леммой 2, что область за скачком, покрытая характеристиками первого семейства (назовем эту область R) не ограничивается вниз по потоку никакой характеристикой первого семейства.

Предположим обратное. Тогда существует «последняя» характеристика первого семейства α , «пересекающая» скачок на бесконечном удалении. Покажем, что образ этой характеристики — точка n . Действительно, $\eta\beta$ — образ области R и характеристики α лежит выше характеристики mn . При этом на отрезке профиля, принадлежащем области R , будет $\eta \geq \eta_n$ (заметим, с учетом леммы 7, что та же оценка будет и на линии L_+ , в некоторой окрестности точки n). Если образ характеристики лежит выше mn , то некоторая окрестность точки ее пересечения с профилем лежит выше прямой $\beta = 0$. Однако это противоречит лемме 7.

Таким образом, получено, что если характеристика α существует, то поток на ней равномерный и прямолинейный. Это означает, что в некоторой подобласти области R , ограниченной скачком, течение является простой волной (прямыми при этом будут характеристики первого семейства). Следовательно, некоторый отрезок линии L_+ в окрестности точки n лежит на характеристике mn . При этом, однако, соответствующий отрезок линии L_- лежал бы, по лемме 1, ниже характеристики mn , что невозможно.

Теорема 7. Имеют место оценки:

- 1) на отрезке линии L_- , ограничивающем образ области Q

$$d\eta / ds < 0, \quad |d\beta / d\eta| \leq \sqrt{\eta}$$

- 2) на отрезке линии L_- ограничивающем образ области P

$$|d\beta / d\eta| \geq \sqrt{\eta}$$

- 3) при обтекании профиля с прямолинейным отрезком AF при $\beta_0 \leq 0$ на линии L_+ в окрестности точки n

$$d\eta / ds < 0$$

- 4) если висячий скачок начинается на последней характеристике узла A , то при обтекании профиля с прямолинейным отрезком AF на линии L_+ в окрестности точки начала скачка

$$d\eta / ds < 0$$

Здесь s — длина дуги скачка, отсчитываемая в направлении от профиля.

Оценки 1), 2), 4) выводятся из теорем 4, 5 и леммы 6 с учетом порядка, в котором скачок пересекается характеристиками в физической плоскости. Оценка 3) следует из условия, полученного при доказательстве теоремы 6, что на линии L_+ в окрестности точки n имеет место $\eta \geq \eta_n$.

Теорема 8. При обтекании профиля с прямолинейным отрезком AF при $\beta_0 \leq 0$ скачок на бесконечном удалении обращен выпуклостью в сторону области за скачком¹.

Продифференцировав по s второе выражение (3), получим

$$\frac{d\eta_+}{ds} + \frac{d\eta_-}{ds} = \frac{4\delta}{(k+1)^{2/3}} \frac{d\delta}{ds}$$

Используя оценки 1, 3 теоремы 7, приходим к оценке $d\delta / ds \leq 0$.

При обтекании ромбовидного профиля (при $\beta_0 < 0$) из точки F выходит «хвостовой» скачок. Если течение непрерывно зависит от параметра β_0 , то по крайней мере при достаточно малых значениях $|\beta_0|$ помимо хвостового скачка существует еще и внутренний скачок. Действительно, при $\beta_0 \rightarrow 0$ точка F удаляется в бесконечность и хвостовой скачок исчезает, следовательно, скачок, существование которого доказано при $\beta_0 = 0$, не является хвостовым.

Из теоремы 6 с учетом леммы 3 вытекает.

Следствие. В случае, когда при обтекании профиля с прямолинейным отрезком AF и $\beta_0 < 0$ существует внутренний скачок, хвостовой и внутренний скачок пересекаются, образуя лямбда-образный скачок.

¹ Следствие из теоремы 4 и теорема 8 согласуются с теорией потока на бесконечном удалении от профиля [5].

Рассмотрим обтекание профиля с прямолинейным отрезком AF при $\beta_0 > 0$. При обтекании такого профиля всякий скачок может и не возникать (условие для возникновения скачка было указано выше).

Теорема 9. В случае, когда при обтекании профиля с прямолинейным отрезком AF при $\beta_0 > 0$ существует скачок, он пересекает ударную волну. В точке пересечения на ударной волне за скачком $\beta < \beta_0$. Ударная волна на отрезке, расположенном вниз по течению от точки пересечения со скачком (или от точки пересечения с последней характеристикой узла A , если скачка не существует), состоит из бесконечного числа участков с попарно различными знаками кривизны ударной волны; колебания угла наклона ударной волны] при удалении от профиля затухают (свойство колебания угла наклона ударной волны находится в соответствии с теорией распространения возмущений при обтекании клиновидного профиля [6]).

Предположим, что скачок не пересекает ударную волну. Так как поток на бесконечном удалении от точки A становится равномерным и прямолинейным, скачок там вырождается в характеристику первого семейства. Возникает противоречие, так как в равномерном потоке около клина характеристика проходит от клина к ударной волне.

Интенсивность скачка в точке S пересечения с ударной волной отлична от нуля (следствие 2 из леммы 4). Из точки S при этом выходит волна разрежения, так как ударная поляра, проведенная из некоторой точки другой ударной поляры, не пересекается с ней (лежит внутри нее; на это свойство ударных поляр в трансзвуковом приближении указано в [7], примечание на стр. 182). Нетрудно установить, что волна разрежения представляется узлом характеристик второго семейства.

Аналогично тому как в теореме 6 доказывается невозможность пересечения скачка с ударной волной, можно доказать, что в точке S на ударной волне за скачком $\beta < \beta_0$.

Легко убедиться, что ударная волна на отрезке вниз по потоку от точки S не будет прямолинейной; для этого достаточно провести характеристики второго семейства узла разрежения до отрезка AF , а затем провести их отражения, характеристики первого семейства, к ударной волне.

Возьмем произвольную точку на ударной поляре вниз по потоку от точки S (если скачков несколько, то в качестве S берется точка пересечения с последним скачком). Проведем из нее характеристику первого семейства к профилю, затем — характеристику второго семейства к ударной волне и т. д. Образы этих характеристик в плоскости $\eta\beta$ образуют ломаную «спираль», состоящую из отрезков соответствующих характеристик; с помощью леммы 1 получим, что эта спираль «накручивается» на точку пересечения ударной поляры с прямой $\beta = \beta_0$. Таким образом, ударная волна состоит из чередующихся отрезков с разными знаками кривизны; «амплитуда» колебаний угла наклона ударной волны убывает при перемещении по ударной волне от профиля.

Аналогичным путем это свойство доказывается и в случае отсутствия скачка уплотнения.

Поступила 18 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский О. М., Булекбаев А., Голомазов М. М., Грудницкий В. Г., Душин В. К., Иванов В. Ф., Лунькин Ю. П., Попов Ф. Д., Рябинков Г. М., Тимофеева Т. Я., Толстых А. И., Фомин В. Н., Шугаев Ф. В. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. Тр. ВЦ АН СССР, М., 1966.
2. Общая теория аэродинамики больших скоростей, под. ред. У. Р. Сирс. М., Воениздат, 1962.
3. Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
4. Баранцев Р. Г. Лекции по трансзвуковой газодинамике. Л., Изд-во ЛГУ, 1965.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1954.
6. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1958.
7. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.