# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КОРОТКИХ ВОЛН

Б. Г. Клейнер, Г. П. Шиндяпин

(Саратов)

Исследуется класс точных частных решений уравнений коротких волн, обобщающий известные решения [1,2]; дается классификация решений; приводятся примеры новых решений.

Течения с небольшими, но резкими изменениями параметров потока, происходящими в узкой области вблизи фронта распространяющейся ударной волны, описываются системой уравнений коротких волн, полученной О. С. Рыжовым и С. А. Христиановичем [3]. Система коротких волн, представляя нелинейную систему уравнений смешанного типа, в определенном отношении подобна системе уравнений для стационарных околозвуковых движений газа, но в отличие от последней не может быть преобразована к системе линейных уравнений. Это обстоятельство существенно усложняет математическую постановку и решение задач коротких волн, вызывая необходимость построения точных частных решений с определенными свойствами, присущими данному классу физических задач. В каждом конкретном случае такие решения отыскиваются различными искусственными способами [2-5]. Наиболее общим из известных решений является класс точных решений Б. И. Заславского [1]. Пример решения, не принадлежащего классу [1], построен в [2].

1. Уравнения коротких волн в случае двумерных квазистационарных движений идеального газа имеют вид [3]

$$2(\mu-\delta)\frac{\partial\mu}{\partial\delta}+\frac{\partial\nu}{\partial Y}+2k\mu=0,\qquad \frac{\partial\nu}{\partial\delta}-\frac{\partial\mu}{\partial Y}=0 \tag{1.1}$$

Здесь $k={}^1/_2$ в случае плоскопараллельных течений, $k=1$ для течений с осевой симметрией; безразмерные функции $\mu$, $\nu$, $\delta$, $Y$ связаны с проекциями скорости на радиус-вектор $u$ и перпендикуляр к нему $v$ и компонентами полярной системы $r$, $\vartheta$ равенствами

$$u=a_0M_0\mu=a_0M,\qquad v=a_0M_0\sqrt{{}^1/_2(\varkappa+1)M_0}\,\nu \tag{1.2}$$
$$r=a_0t\,[1+{}^1/_2(\varkappa+1)M_0\delta],\qquad \vartheta=\sqrt{{}^1/_2(\varkappa+1)M_0}\,Y$$

Система уравнений (1.1), как легко видеть, допускает непрерывную группу конечных преобразований

$$\delta^\circ=a^2(\delta-c),\quad Y^\circ=a(Y-b) \tag{1.3}$$
$$\mu^\circ(\delta^\circ,\ Y^\circ)=a^2(\mu(\delta,\ Y)-c),\quad \nu^\circ(\delta^\circ,\ Y^\circ)=a^3(\nu(\delta,\ Y)+2kcY-d)$$

где $a$, $b$, $c$, $d$ — произвольные постоянные, не изменяющие вида уравнений.

Таким образом, если для системы (1.1) известно какое-либо решение $\mu^\circ=\mu^\circ\cdot(\delta^\circ,Y^\circ)$, $\nu^\circ=\nu^\circ(\delta^\circ,Y^\circ)$, то все эквивалентные решения получаются из него по формулам

$$\mu(\delta,\ Y)=a^{-2}\mu^\circ(a^2(\delta-c),\ a(Y-b))+c$$
$$\nu(\delta,\ Y)=a^{-3}\nu^\circ(a^2(\delta-c),\ a(Y-b))-2kcY+d \tag{1.4}$$

Формулы (1.4) позволяют построить класс эквивалентных решений с более широкими свойствами (о групповых свойствах (1.1) см. также [6]). Особенно полезными при этом могут оказаться решения $\mu^\circ=\mu^\circ(\delta^\circ,Y^\circ)$, $\nu^\circ=\nu^\circ(\delta^\circ,Y^\circ)$ полиномиального вида по $\delta$ или $Y$, когда построенные при помощи (1.4) решения удовлетворяют одному из условий

$$\mu(\delta,\ Y)=D\quad\text{при}\ \delta=c \tag{1.5}$$
$$\nu(\delta,\ Y)=B\quad\text{при}\ Y=b \tag{1.6}$$

Во многих задачах теории коротких волн [1-5] условия (1.5), (1.6) при соответствующих постоянных $D$, $B$, $c$, $b$ выступают как необходимые граничные условия, которым должны удовлетворять решения (1.1)

2. Пусть класс решений системы (1.1) определяется двухпараметрическим представлением

$$\mu = \sum_{n=0}^{\alpha} \varphi_n(\xi)\,\eta^n, \qquad \nu = \sum_{n=0}^{\beta} \psi_n(\xi)\,\eta^n$$
$$\delta = \sum_{n=0}^{\gamma} \chi_n(\xi)\,\eta^n, \qquad Y = \sum_{n=0}^{\omega} \nu_n(\xi)\,\eta^n \tag{2.1}$$

Здесь $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\omega$ — натуральные числа, а функции $\varphi_\alpha$, $\psi_\beta$, $\chi_\gamma$, $\nu_\omega$ отличны от нуля. Система уравнений (1.1) в переменных $\xi$, $\eta$ имеет вид

$$2(\mu-\delta)\left(\frac{\partial\mu}{\partial\xi}\frac{\partial Y}{\partial\eta}-\frac{\partial\mu}{\partial\eta}\frac{\partial Y}{\partial\xi}\right)+\left(\frac{\partial\nu}{\partial\eta}\frac{\partial\delta}{\partial\xi}-\frac{\partial\nu}{\partial\xi}\frac{\partial\delta}{\partial\eta}\right)+$$
$$+2k\mu\left(\frac{\partial\delta}{\partial\xi}\frac{\partial Y}{\partial\eta}-\frac{\partial\delta}{\partial\eta}\frac{\partial Y}{\partial\xi}\right)=0 \tag{2.2}$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial\eta}\frac{\partial\delta}{\partial\xi}-\frac{\partial\mu}{\partial\xi}\frac{\partial\delta}{\partial\eta}=\frac{\partial\nu}{\partial\xi}\frac{\partial Y}{\partial\eta}-\frac{\partial\nu}{\partial\eta}\frac{\partial Y}{\partial\xi}.$$

Взаимно однозначное соответствие между плоскостями $\delta Y$ и $\xi\eta$ имеет место при условии, что якобиан $D(\delta,\ Y)\,/\,D(\xi,\ \eta)\neq 0$ и ограничен.

Подставляя (2.1) в (2.2) и приравнивая нулю суммарные коэффициенты при одинаковых степенях $\eta$ в каждом уравнении, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для определения неизвестных функций $\varphi_n$, $\psi_n$, $\chi_n$, $\nu_n$.

Общий вид дифференциальных уравнений системы, полученных таким образом (при $m$ степени $\eta$) для первого и второго уравнений (2.2) есть (штрих сверху означает производную по $\xi$)

$$\sum_{l=0}^{m}\left[2(\varphi_{m-l}-\chi_{m-l})\,g_l+\chi_{m-l}'\,h_l-(m-l+1)\,\chi_{m-l+1}\,f_l\right]=0 \tag{2.3}$$

$$\sum_{l=0}^{m}\left[(l+1)(\nu_{l+1}\psi_{m-l}'+\chi_{l+1}\varphi_{m-l}')-(m-l+1)(\nu_l'\,\psi_{m-l+1}+\chi_l'\,\varphi_{m-l+1})\right]=0$$

Здесь

$$g_l=\sum_{i=0}^{l}\left[(l-i+1)\,\nu_{l-i+1}\,\varphi_i'-(i+1)\,\nu_{l-i}'\,\varphi_{i+1}\right]$$
$$h_l=(l+1)\,\psi_{l+1}+2k\sum_{i=0}^{l}(l-i+1)\,\nu_{l-i+1}\,\varphi_i$$
$$f_l=\psi_l'+2k\sum_{i=0}^{l}\nu_{l-i}'\,\varphi_i$$

При фиксированных значениях $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\omega$ в (2.1) ряды (2.3) будут обрываться и число уравнений системы будет конечным.

3. Для определения старших показателей $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\omega$, а следовательно, допускаемых системой (1.1) видов решений (2.1), рассмотрим вопрос о совместности числа неизвестных функций и числа уравнений $M$ системы (2.3).

Представление (2.1) формально содержит $\alpha+\beta+\gamma+\omega+4$ функции. Однако это представление и система (2.2) допускает группу преобразований

$$\eta=f(\xi^\circ)\,\eta^\circ+g(\xi^\circ), \qquad \xi=F(\xi^\circ) \tag{3.1}$$

с произвольными функциями $f(\xi^\circ)$, $g(\xi^\circ)$, $F(\xi^\circ)$, не изменяющими вида (2.1) и (2.2). Выбором функций $f(\xi^\circ)$, $g(\xi^\circ)$, $F(\xi^\circ)$ можно добиться того, что в окончательном виде для (2.1) будут определены некоторые функции. Отметим, что в общем случае представления (2.1) число таких функций $j$ равно трем. При вырождении вида (2.1), например, отсутствие членов с нулевой степенью $\eta$, $j = 2$. Вместо (3.1) в этом случае (2.1) допускает преобразование

$$\eta = f(\xi^\circ)\eta^\circ, \qquad \xi = F(\xi^\circ)$$

Не ограничивая общности, поясним сказанное на примере представления (2.1) для $\delta$ и $Y$. Пусть, например

$$\xi^\circ = \chi_\gamma(\xi) \tag{3.2}$$

а $f(\xi^\circ)$ и $g(\xi^\circ)$ выбраны так, чтобы при подстановке (3.1) в (2.1) получились значения

$$\overset{\circ}{\nu}_\omega(\xi^\circ) = 1, \qquad \overset{\circ}{\nu}_{\omega-1}(\xi^\circ) = 0 \tag{3.3}$$

Если опустить индексы в выражениях (3.2), (3.3), то формальный результат преобразований (3.1) состоит в том, что в представлении (2.1) определены $j$ функций и число неизвестных функций есть $\alpha + \beta + \gamma + \omega + 4 - j$.

Для определения числа уравнений $M$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученной из (2.3), определим старшие показатели степеней $\eta$ для различных членов в уравнениях (2.2) при подстановке в них (2.1). При этом получим три несовпадающие комбинации ($J_1$, $J_2$, $J_3$) для первого уравнения и две ($J_4$, $J_5$) для второго

$$J_1 = 2\alpha + \omega - 1, \qquad J_2 = \alpha + \gamma + \omega - 1, \qquad J_3 = \beta + \gamma - 1 \tag{3.4}$$
$$J_4 = \beta + \omega - 1, \qquad J_5 = \alpha + \gamma - 1$$

Число уравнений $M$ определяется суммой максимальных показателей степеней $\eta$ первого и второго уравнений (2.2)

$$M = \max\{J_1 J_2, J_3\} + \max\{J_4, J_5\} + 2 \tag{3.5}$$

что приводит к рассмотрению шести различных вариантов соотношений показателей (3.4).

Соответствие между числом неизвестных и числом уравнений системы $M$ определяется условием

$$\alpha + \beta + \gamma + \omega + 4 - j = M + q \tag{3.6}$$

где $q$ — коэффициент определенности системы (при $q = 0$ система определенная, $q < 0$ — переопределенная, $q > 0$ — недоопределенная).

Интересно, что число $i = q + j$, согласно (3.6) и (3.5), однозначно определяется комбинацией $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\omega$.

Случай, когда показатели (3.4) равны для каждого из уравнений (2.2), сразу приводит к решению с

$$\alpha = 2(4 - i), \qquad \beta = 3(4 - i), \qquad \gamma = 2(4 - i), \qquad \omega = 4 - i$$

и аналогичен случаю, рассмотренному в [7], для системы уравнений околозвуковых стационарных течений газа.

Рассматривая различные комбинации $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\omega$ и исключая случай $\gamma = \omega = 0$, когда $D(\delta, Y) / D(\xi, \eta) = 0$, в общем случае легко установить согласно (3.5), (3.6), что число $i \leqslant 3$. Это означает, что для общего вида решения (2.1), когда $j = 3$, число $q \leqslant 0$ и согласно (3.6) возможны только определенные и переопределенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В случае определенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений при $q = 0$, $i = 3$ параметры $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\omega$ принимают значения

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 3, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \omega \leqslant 1 \tag{3.7}$$

Отсюда наиболее удобно классифицировать решения (2.1) по $\gamma$ и $\omega$. Тогда возникает четыре основных варианта значений $(\gamma, \omega)$.

$$(2,1),\ (1,1),\ (0,1),\ (1,0) \tag{3.8}$$

Им соответствуют четыре типа решений с различными значениями $(\alpha, \beta)$

$$(2,3),\ (1,2),\ (0,1) \text{ при } \gamma = 2,\ \omega = 1 \tag{3.9}$$

$$(1,2),\ (1,1),\ (0,1),\ (0,0) \text{ при } \gamma = 1,\ \omega = 1 \tag{3.10}$$

$$(0,1),\ (0,0) \text{ при } \gamma = 0,\ \omega = 1 \tag{3.11}$$

$$(2,3),\ (1,2),\ (1,1),\ (0,1),\ (0,0) \text{ при } \gamma = 1,\ \omega = 0 \tag{3.12}$$

4. Остановимся на вопросе использования преобразования (3.1) для полученных типов решений (3.8). Вид уравнений системы (2.3) претерпит наибольшие упрощения, если функции $f(\xi^\circ)$, $g(\xi^\circ)$, $F(\xi^\circ)$ выбрать исходя из вида представлений для $Y$ и $\delta$.

Тогда при $\omega = 1$ для

$$Y = \nu_0(\xi) + \nu_1(\xi)\eta, \qquad \delta = \sum_{n=0}^{\gamma} \chi_n(\xi)\eta^n \qquad (\gamma = 0, 1, 2)$$

выбирая в качестве $\xi^\circ = \chi_\gamma(\xi)$ (обратная функция $\xi = F(\xi^\circ)$), $f(\xi^\circ) = 1 / \nu_1(\xi^\circ)$, $g(\xi^\circ) = -\nu_0(\xi^\circ) / \nu_1(\xi^\circ)$, получим, учитывая результат (3.3) и опуская индексы, что

$$Y = \eta, \qquad \delta = \sum_{n=0}^{\gamma-1} \chi_n(\xi) Y^n + \xi Y^\gamma \quad (\gamma = 0,1,2) \tag{4.1}$$

Преобразование (3.1) будет невырожденным ($\nu_1 \neq 0$ при $\omega = 1$), если $\chi_\gamma'(\xi) \neq 0$ и ограничена. Таким образом, в случае $\omega = 1$, если $\chi_\gamma(\xi)$ не является постоянной, то имеем (4.1) и решения (2.1) полиномиального вида по $Y$.

В случае $\gamma = 1$ для

$$\delta = \chi_0(\xi) + \chi_1(\xi)\eta, \qquad Y = \sum_{n=0}^{\omega} \nu_n(\xi)\eta^n \qquad (\omega = 0, 1)$$

получим аналогично предыдущему случаю

$$\delta = \eta, \qquad Y = \sum_{n=0}^{\omega-1} \nu_n(\xi)\delta^n + \xi\delta^\omega \tag{4.2}$$

Преобразование (3.1) будет невырожденным ($\chi_1 \neq 0$ при $\gamma = 1$), если $\nu_\omega'(\xi) \neq 0$ и ограничена. Отсюда в случае $\gamma = 1$, если $\nu_\omega(\xi)$ не является постоянной, то имеем (4.2) и решения (2.1) имеют полиномиальный вид по $\delta$.

Таким образом, при отыскании решений вида (2.1) и использовании преобразования (3.1) будут найдены решения, для которых одна из функций ($\chi_\gamma(\xi)$, $\nu_\omega(\xi)$ в случаях $\omega = 1, \gamma = 1$) отлична от константы. Так как вид решения наперед неизвестен, то можно допустить, вообще говоря, и обратное, т. е. проверить в каждом случае существование решений с постоянным значением этой функции. В случае, если такие решения существуют, будем называть их «потерянными» решениями.

5. Запишем общий вид определенной системы дифференциальных уравнений. Эта основная система уравнений получается из (2.3) согласно (3.7) при $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\omega = 1$

$$(\varphi_2 - \chi_2) K_2 - 2\chi_2 G_3 + \chi_2' H_3 = 0$$

$$(\varphi_2 - \chi_2) K_1 + (\varphi_1 - \chi_1) K_2 - 2\chi_2 G_2 + \chi_2' H_2 - \chi_1 G_3 + \chi_1' H_3 = 0$$

$$(\varphi_2 - \chi_2) K_0 + (\varphi_1 - \chi_1) K_1 + (\varphi_0 - \chi_0) K_2 - 2\chi_2 G_1 + \chi_2' H_1 - \chi_1 G_2 + \chi_1' H_2 + \chi_0' H_3 = 0$$

$$
\begin{gathered}
(\varphi_1 - \chi_1) K_0 + (\varphi_0 - \chi_0) K_1 - 2\chi_2 G_0 - \chi_1 G_1 + \chi_1' H_1 + \chi_0' H_2 = 0 \\
(\varphi_0 - \chi_0) K_0 - \chi_1 G_0 + \chi_0' H_1 = 0 \\
\psi_3' \nu_1 - 3\psi_3 \nu_1' + 2\varphi_2' \chi_2 - 2\varphi_2 \chi_2' = 0 \\
\psi_2' \nu_1 - 2\psi_2 \nu_1' - 3\psi_3 \nu_0' + 2\varphi_1' \chi_2 - \varphi_1 \chi_2' + \varphi_2' \chi_1 - 2\varphi_2 \chi_1' = 0 \\
\psi_1' \nu_1 - \psi_1 \nu_1' - 2\psi_2 \nu_0' + 2\varphi_0' \chi_2 + \varphi_1' \chi_1' - \varphi_1 \chi_1' - 2\varphi_2 \chi_0' = 0 \\
\psi_0' \nu_1 - \psi_1 \nu_0' + \varphi_0' \chi_1 - \varphi_1 \chi_0' = 0
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

Здесь

$$K_i = \varphi_i' \nu_1 - (2 - i)\, 2^{2i-1} \varphi_{i+1} \nu_0' - i \varphi_i \nu_1' \qquad (i = 0, 1, 2)$$

$$G_j = {}^1/_2\, \psi_j' + (3 - j)^{j(1-j)(2-j)} k \varphi_j \nu_0' + j^{(1-j)(2-j)(3-j)} k \varphi_{j-1} \nu_1' \qquad (j = 0, 1, 2, 3)$$

$$H_l = l / 2\psi_l + k \varphi_{l-1} \nu_1 \qquad (l = 1, 2, 3)$$

Отметим некоторые свойства системы (5.1). Система (5.1) содержит девять уравнений для определения девяти неизвестных при задании в ней в соответствии с (3.1) трех функций ($j = 3$). Система (5.1) остается определенной при переходе к «симметричному» виду решений, когда

$$
\begin{gathered}
\varphi_1(\xi) = \psi_2(\xi) = \psi_0(\xi) = \chi_1(\xi) = \nu_0(\xi) = 0 \\
\mu = \varphi_2(\xi)\, \eta^2 + \varphi_0(\xi), \qquad \nu = \psi_3(\xi)\, \eta^3 + \psi_1(\xi)\, \eta \\
\delta = \chi_2(\xi)\, \eta^2 + \chi_0(\xi) \qquad Y = \nu_1(\xi)\, \eta
\end{gathered}
\tag{5.2}
$$

Действительно, как легко видеть, при этом в самой системе остается пять уравнений для пяти неизвестных, так как в этом случае можно задать уже две функции ($j = 2$).

Более того, в частном случае (5.2)

$$\mu = \varphi_2(\xi)\, \eta^2, \quad \nu = \psi_3(\xi)\, \eta^3, \quad \delta = \chi_2(\xi)\, \eta^2, \quad Y = \nu_1(\xi)\, \eta \tag{5.3}$$

при $\varphi_0(\xi) = \psi_1(\xi) = \chi_0(\xi) = 0$ система (5.1) сводится к двум уравнениям для определения двух функций ($j = 2$).

Аналогично при $\varphi_2(\xi) = \psi_3(\xi) = 0$ получим систему для трех уравнений с тремя неизвестными функциями для решений вида

$$\mu = \varphi_0(\xi), \quad \nu = \psi_1(\xi)\, \eta, \quad \delta = \chi_2(\xi)\, \eta^2 + \chi_0(\xi), \quad Y = \nu_1(\xi)\eta \tag{5.4}$$

Решения симметричного вида обычно удовлетворяют условию типа (1.6) и поэтому особенно интересны для приложений.

6. Выбирая в общем случае записи решений (2.1) при $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\omega = 1$ три функции

$$\chi_2(\xi) = \xi, \qquad \nu_1(\xi) = 1, \qquad \nu_0(\xi) = 0 \tag{6.1}$$

получим в соответствии с (4.1) из (2.1) и (5.1) известный класс решений Б. И. Заславского [1]

$$
\begin{gathered}
\mu = \varphi_2(\xi)\, Y^2 + \varphi_1(\xi)\, Y + \varphi_0(\xi) \\
\nu = \psi_3(\xi)\, Y^3 + \psi_2(\xi)\, Y^2 + \psi_1(\xi)\, Y + \psi_0(\xi) \\
\delta = \xi Y^2 + \chi_1(\xi) Y + \chi_0(\xi)
\end{gathered}
\tag{6.2}
$$

и соответствующую систему дифференциальных уравнений. Эта система подробно исследована в [1]. Наиболее физически интересными представляются решения симметричного вида (5.2) — (5.4). Такие решения вида (5.2) были построены и применены для решения задач с прямолинейной границей (задач отражения ударных волн от твердой стенки и свободной поверхности) [1,4,5].

Решения вида (5.3) при (6.1) приводят к случаю автомодельных решений (1.1)

$$\mu = Y^2 \varphi_2(\xi), \qquad \nu = Y^3 \psi_3(\xi), \qquad \xi = \delta / Y^2 \tag{6.3}$$

которые, например при $k = {}^1/_2$ имеют вид

$$
\begin{gathered}
\mu = Y^2 \left[c_1 \xi - c_1 (c_1 - {}^1/_2) + 3c_2 \sqrt{2\xi - c_1}\right] \\
\nu = 2Y^3 \left[c_2 (\xi - 2c_1) \sqrt{2\xi - c_1} - c_1 (c_1 - {}^1/_2)\, \xi + c_3\right]
\end{gathered}
$$

Примеры симметричных решений типа (5.4) при $k = 1/2$ и $k = 1$ построены в [3].

7. Исследуем класс потерянных решений для основной системы (5.1) при

$$\chi_2(\xi) = a, \quad \nu_1(\xi) = 1, \quad \nu_0(\xi) = 0 \quad (a = \text{const}) \tag{7.1}$$

вида

$$\begin{gathered} \mu = \varphi_2(\xi) Y^2 + \varphi_1(\xi) Y + \varphi_0(\xi) \\ \nu = \psi_3(\xi) Y^3 + \psi_2(\xi) Y^2 + \psi_1(\xi) Y + \psi_0(\xi) \\ \delta = aY^2 + \chi_1(\xi) Y + \chi_0(\xi) \end{gathered} \tag{7.2}$$

Из первого и шестого уравнений (5.1) с учетом (7.1) получим $\varphi_2 = c_2$, $\psi_3 = c_3$. При $a \neq 0$, выбирая в качестве

$$\varphi_2 = a(1 - 2a), \qquad \psi_3 = {}^2/_3 a(1 - 2a)(2a - k) \tag{7.3}$$

получим, что в (5.1) с учетом (7.1) совпадают второе и седьмое уравнения. При $a = 0$ функции $\varphi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$ и второе уравнение в (5.1) тождественно удовлетворяется.

В обоих случаях системы, соответствующие (5.1), становятся определенными после преобразования $F(\xi) = \xi^\circ$. В дальнейшем в качестве $F(\xi)$ будет использоваться одна из функций системы (5.1), что будет вместе с (7.1) эквивалентно (3.1).

Исследуем симметричные решения ($\varphi_1 = \psi_0 = \chi_1 = \psi_2 = 0$) типа (5.2), (5.4), которые допускает система (5.1) для вида (7.2).

При $a \neq 0$, $\chi_0(\xi) = \xi$ для решений типа (5.2) ((3.9), $\alpha = 2$, $\beta = 3$)

$$\mu = \varphi_2(\xi) Y^2 + \varphi_0(\xi), \quad \nu = \psi_3(\xi) Y^3 + \psi_1(\xi) Y, \quad \delta = aY^2 + \xi \tag{7.4}$$

система (5.1) сводится к дифференциальному уравнению для $\varphi_0(\xi)$

$$(\varphi_0 - \xi)\varphi_0' + (k - a)\varphi_0 + a(1 - 2a)\xi + {}^1/_2 c_1 = 0 \tag{7.5}$$

формулам (7.3) для $\varphi_2$, $\psi_3$ и выражению для $\psi_1$

$$\psi_1 = 2\xi\varphi_2 - 2a\varphi_0 + c_1 \tag{7.6}$$

Решения (7.4) в этом случае подобны решениям Томотики — Тамады [8] для уравнений околозвуковых движений газа. Вид $\varphi_0(\xi)$ решения (7.5) зависит от знака $D = 9a^2 - 2a(k + 1) + (1 - k)^2$.

Отметим, для примера, случай $D > 0$, представляющий определенный интерес для приложений, когда семейство решений (7.5) имеет асимптоты и представляется в виде

$$|u - px|^{p-1}| \cdot |u - qx|^{1-q} = c \qquad (c > 0) \tag{7.7}$$

Здесь

$$\begin{gathered} u = \varphi_0(\xi) - A, \quad x = \xi - A, \quad A = {}^1/_2 c_1 (2a^2 - k)^{-1}, \; a \neq \pm \sqrt{k/2} \\ p = {}^1/_2 (a + 1 - k + \sqrt{D}), \qquad q = {}^1/_2 (a + 1 - k - \sqrt{D}) \end{gathered} \tag{7.8}$$

Особые решения (7.5) $u = px$, $u = qx$ определяют асимптоты для семейства (7.7). Одно из таких решений при $k = 1/2$ использовано в работе [2] (при решении задачи о регулярном отражении от твердой стенки).

В случае $a = \pm\sqrt{k/2}$ решения для (7.5) определяются выражениями

$$^1/_2 c_1 \ln [r(\varphi_0 - \xi) + {}^1/_2 c_1] = r^2(\xi + c) + r(\varphi_0 - \xi) \tag{7.9}$$

$$\varphi_0 = (1 - r)\xi + c_2, \quad \varphi_0 = \xi - {}^1/_2 c_1 r^{-1} \text{ при } r = 1 + k \mp \sqrt{k/2}$$

Частный случай симметричных решений вида (5.4) ((3.9) $\alpha = 0$, $\beta = 1$) получается из (7.4) при $a = 1/2$, когда $\varphi_2 = \psi_3 = 0$. Положив в соответствии с (3.1) $\varphi_0(\xi) = \xi$, для решения вида

$$\mu = \xi, \quad \nu = [-\xi + c_1] Y, \quad \delta = aY^2 + \chi_0(\xi) \tag{7.10}$$

найдем

$$\chi_0(\xi) = ce^{2\xi/c_1} + \xi + {}^1/_2 c_1 \quad \text{при} \quad k = {}^1/_2$$

$$\chi_0(\xi) = c(\xi + c_1)^2 + 2(\xi + c_1) - c_1 \text{ при } k = 1$$

8. Класс «потерянных» решений (7.2) в частном случае $a = 0$ ($\varphi_2 = \psi_3 = 0$) приводит к случаям $\gamma = 1$, $\omega = 1$ (3.10), $\gamma = 0$, $\omega = 1$ (3.11).

Решения для $\gamma = 1$, $\omega = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ (3.10) вида

$$\mu = \varphi_1(\xi) Y + \varphi_0(\xi), \quad \nu = \psi_2(\xi) Y^2 + \psi_1(\xi) Y + \psi_0(\xi), \quad \delta = \xi Y + \chi_0(\xi) \tag{8.1}$$

получим, решая систему (5.1) с учетом (7.1) при $a = 0$, $\chi_1(\xi) = \xi$. При этом из седьмого уравнения (5.1) с учетом (7.1) имеем

$$\psi_2 = c_1 \tag{8.2}$$

а из третьего уравнения (5.1) с учетом (8.2) — уравнение для $\varphi_1$

$$(\varphi_1 - \xi)\varphi_1' + k\varphi_1 + c_1 = 0 \tag{8.3}$$

с решениями при $k = {}^1/_2$ вида

$$\varphi_1 = -(2c)^{-1}[4cc_1 + 1 \pm \sqrt{4cc_1 + 1 + 2c\xi}], \quad \varphi_1 = -2c_1 \tag{8.4}$$

и при $k = 1$ вида

$$(\varphi_1 + c_1)\ln(\varphi_1 + c_1) + c(\varphi_1 + c_1) = \xi + c_1, \quad \varphi_1 = -c_1 \tag{8.5}$$

Во всех случаях, когда $\varphi_1 \neq -c_1 / k$ система (5.1) сводится к решению уравнения Абеля второго рода для $\varphi_0$

$$L(\xi)\varphi_0\varphi_0' + \theta(\xi)\varphi_0' + K(\xi)\varphi_0^2 + N(\xi)\varphi_0 + M(\xi) = 0 \tag{8.6}$$

с коэффициентами

$$L(\xi) = 1 + (k-1) g / h, \quad N(\xi) = f(g / h)' + k\mathrm{ch}^{(1-k)/k}, \quad \varphi_1' + k\bar{\chi}_0'$$

$$K(\xi) = k(g / h)' \qquad M(\xi) = f[\mathrm{ch}^{(1-k)/k}\varphi_1' + \bar{\chi}_0']$$

$$\theta(\xi) = {}^1/_2\,\xi^2 + f(g / h) - \mathrm{ch}^{1/k} - \bar{\chi}_0$$

Здесь

$$g = \xi - \varphi_1, \qquad h = c_1 + k\varphi_1, \qquad f = {}^1/_2(\psi_1 - \xi\varphi_1)$$

$\bar{\chi}_0(\xi)$ произвольное частное решение уравнения

$$2(c_1 + k\varphi_1)\chi_0' - 2\varphi_1'\chi_0 = \xi\psi_1' - \psi_1$$

Функции $\psi_1$, $\psi_0$, $\chi_0$ определяются по формулам

$$\psi_1' = \varphi_1 - \xi\varphi_1', \qquad \psi_0' = \varphi_1\chi_0' - \xi\varphi_0' \tag{8.7}$$

$$\chi_0 = c(c_1 + k\varphi_1)^{1/k} + (\xi - \varphi_1)(c_1 + k\varphi_1)^{-1}\varphi_0 + \bar{\chi}_0$$

Приведем в качестве примера решение при $k = {}^1/_2$, $\varphi_1 = {}^1/_2(\xi - 2c_1)$ ($\varphi_1$ получается из (8.4) при $c = 0$)

$$\mu = \varphi_0(\xi) + {}^1/_2(\xi - 2c_1) Y$$

$$\nu = -c_1[2\varphi_0(\xi) + c_3(\xi + 2c_1)^2 + c_2] + c_5 + c_3({}^1/_3\xi^3 + c_1\xi^2) - (c_1\xi - c_2) Y + c_1 Y^2 \tag{8.8}$$

$$\delta = 2\varphi_0(\xi) + c_3(\xi + 2c_1)^2 + c_2 + \xi Y$$

Здесь

$$\varphi_0(\xi) = (\xi + 2c_1)[2c_1\ln(\xi + 2c_1) - {}^1/_2\xi + c_4] - c_2$$

При $\varphi_1 = -c_1 / k$ система уравнений (5.1) значительно упрощается и решения записываются в конечном виде.

Более частные виды решений (8.1) с $\alpha \leqslant 1$ $\beta < 2$ (3.10) получаются аналогично приведенным выше решениям при $c_1 = 0$.

Для случая $\gamma = 1$, $\omega = 1$ система уравнений (5.1) допускает потерянные решения при $\chi_1(\xi) = a$ ($a$ — const), которые при ($k = {}^1/_2$, 1) представляют для $\mu$ и $\nu$ линейные функции $\delta$, $Y$. При $a = 0$, $\varphi_0(\xi) = \xi$ приходим к случаю $\gamma = 0$ $\omega = 1$.

Решения для $\gamma = 0$, $\omega = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (3.11) симметричного вида типа (5.4)

$$\mu = \xi, \qquad \nu = c_1 Y, \quad \delta = \chi_0(\xi) \tag{8.9}$$

Здесь

$$\chi_0(\xi) = c(\xi + c_1)^2 + 2(\xi + c_1) - c_1 \text{ при } k = {}^1/_2$$
$$\chi_0(\xi) = -{}^1/_2 c_1 - (\xi + {}^1/_2 c_1) \ln c (\xi + {}^1/_2 c_1) \text{ при } k = 1$$

Решения (8.9) при $c_1 = 0$ (одномерные течения) аналогичны решениям, которые были получены С. А. Христиановичем в [9] и использованы при решении задач о затухании слабых ударных волн.

9. При $\gamma = 1$ представление (2.1) имеет полиномиальный вид по $\delta$ и, как отмечалось выше, решения в этом случае могут удовлетворять условиям типа (1.5) на линии параболичности уравнений (1.1) («звуковой» линии $\delta = \mu = c$).

Для построения решений, соответствующих $\gamma = 1$, $\omega = 1$ (3.10) при $\nu_1(\xi) = \xi$, $\chi_1(\xi) = 1$, $\chi_0(\xi) = 0$ вида

$$\mu = \varphi_1(\xi)\delta + \varphi_0(\xi), \quad \nu = \psi_2(\xi)\delta^2 + \psi_1(\xi)\delta + \psi_0(\xi), \quad Y = \xi\delta + \nu_0(\xi) \tag{9.1}$$

можно воспользоваться полученными выше результатами для решений вида (8.1), если их переписать по степеням $\delta$.

Нетрудно установить, что преобразование

$$\xi = 1 / \xi^\circ, \qquad Y = \xi^\circ [\delta - \chi_0(1 / \xi^\circ)] \tag{9.2}$$

переводит любое решение вида (8.1) в решение вида (9.1). Например, решение (8.8), используя (9.2), можно переписать (опуская индексы) в виде

$$\begin{gathered}\mu = c_1\xi\chi_0(\xi^{-1}) - {}^1/_2 c_3 (\xi^{-1} + 2c_1)^2 - {}^1/_2 c_2 + {}^1/_2 (1 - 2c_1\xi)\delta \\ \nu = c_1\xi^2\chi_0{}^2(\xi^{-1}) - c_2\xi\chi_0(\xi^{-1}) + c_3({}^1/_3\xi^{-3} + c_1\xi^{-2}) + \\ + c_5 - (2c_1\xi^2\chi_0(\xi^{-1}) + c_1 - c_3\xi)\delta + c_1\xi^2\delta^2 \\ Y = -\xi\chi_0(\xi^{-1}) + \xi\delta\end{gathered} \tag{9.3}$$

Здесь

$$\chi_0(1 / \xi) = (\xi^{-1} + 2c_1)[4c_1 \ln(\xi^{-1} + 2c_1) + (c_3 - 1)(\xi^{-1} + 2c_1) + 2c_4] + 4c_1{}^2 - c_2$$

В другом случае при $\gamma = 1$, $\omega = 0$ (3.12), выбирая

$\nu_0 = \xi$, $\chi_1 = -1$, $\chi_0 = c$, получим в общем случае решения вида

$$\begin{gathered}\mu = \varphi_2(Y)(c - \delta)^2 + \varphi_1(Y)(c - \delta) + \varphi_0(Y) \\ \nu = \psi_3(Y)(c - \delta)^3 + \psi_2(Y)(c - \delta)^2 + \psi_1(Y)(c - \delta) + \psi_0(Y)\end{gathered} \tag{9.4}$$

Соответствующая этому случаю система дифференциальных уравнений, получаемая при помощи (5.1), сводится к дифференциальному уравнению

$$\varphi_2'' + 12\varphi_2{}^2 = 0 \tag{9.5}$$

с решениями

$$\varphi_2 = -{}^1/_2 \wp(Y + c_2), \qquad \varphi_2 = 0 \tag{9.6}$$

Здесь $(\wp(Y + c_2)$ — функция Вейерштрасса с инвариантами $g_2 = 0$, $g_3 = c_1)$ и системе линейных уравнений

$$\begin{gathered}\varphi_1'' + 12\varphi_2\varphi_1 = 4(k - 2)\varphi_2, \qquad \psi_2 = -{}^1/_2\varphi_1' \\ \varphi_0'' + 4\varphi_2\varphi_0 = 4c\varphi_2 - 2\varphi_1(\varphi_1 + 1 - k), \quad \psi_1 = -\varphi_0' \\ \psi_0' = -2k\varphi_0 + 2(\varphi_0 - c)\varphi_1, \qquad \psi_3 = -{}^1/_3\varphi_2'\end{gathered} \tag{9.7}$$

Приведем в качестве примера решение при $k = {}^1/_2$, $\varphi_2 = -{}^1/_2 \wp(Y + c_2)$ вида

$$\begin{gathered}\mu = -{}^1/_2 \wp(Y + c_2)(c - \delta)^2 - {}^1/_2(c - \delta) + c \\ \nu = {}^1/_6 \wp'(Y + c_2)(c - \delta)^3 - c(Y + c_3) + c_4\end{gathered} \tag{9.8}$$

Решения для $\alpha \leqslant 1$, $\beta \leqslant 2$ (3.12) получаются при $\varphi_2 = 0$ и имеют вид

$$\mu = \varphi_1 (Y) (c - \delta) + \varphi_0 (Y)$$
$$\nu = -{}^1/_2\, \varphi_1' (Y) (c - \delta)^2 - \varphi_0' (Y) (c - \delta) + \psi_0 (Y) \qquad (9.9)$$

Здесь $\psi_0$ определяется согласно (9.7)

$$\varphi_1 = c_1 Y + c_2 \qquad (9.10)$$
$$\varphi_0 = -[{}^1/_6 c_1^2 Y^4 + {}^1/_3\, c_1 (2c_2 + 1 - k) Y^3 + c_2 (c_2 + 1 - k) Y^2 + c_3 Y + c_4]$$

Решения (9.8) по виду аналогичны решениям, полученным Л. В. Овсянниковым для уравнений околозвуковых движений газа. Отметим, что если в решениях вида (8.1), (9.1), (9.4) функции $\psi_0$, $\varphi_0$ соответственно постоянны (этого часто можно добиться за счет выбора произвольных постоянных), то преобразованием (1.4) из них можно получить решения (например, (9.8)), удовлетворяющие условиям (1.5), (1.6).

В заключение коснемся вопроса о применимости полученных выше решений к конкретным задачам. При помощи группы преобразований (1.4) большинство из полученных решений можно представить в виде, удовлетворяющем условиям (1.5), (1.6). Однако условия (1.5), (1.6) будут лишь простейшими из используемых в задачах коротких волн, поэтому вопрос о пригодности того или иного решения для исследования конкретной задачи зависит от возможности решения наряду с условиями (1.5), (1.6) (или независимо от них) удовлетворять специфическим условиям (особенностям) данной задачи.

Отметим, что предлагаемый метод построения точных частных решений может быть аналогично использован и для других нелинейных систем уравнений в частных производных (например, для уравнений коротких волн вязкого теплопроводящего газа, уравнений околозвуковых течений идеального и вязкого газа).

Авторы благодарят С. В. Фальковича и Б. И. Заславского за советы при обсуждении работы.

Поступила 20 I 1970

## ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Б. И. О нелинейном взаимодействии сферической ударной волны, возникшей в результате взрыва заглубленного заряда со свободной поверхностью воды. ПМТФ, 1964, № 4.
2. Шиндяпин Г. П. О регулярном отражении слабых ударных волн от жесткой стенки. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
3. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
4. Гриб А. А., Березин А. Г. Нерегулярное отражение плоской ударной волны в воде от свободной поверхности ПМТФ, 1960, № 2.
5. Шиндяпин Г. П. О нерегулярном отражении слабых ударных волн от жесткой стенки. ПМТФ, 1964, № 2.
6. Кухарчик П. Групповые свойства уравнений коротких волн в газовой динамике. Сер. техн. 1965, т. 13, № 5.
7. Севостьянов Г. Д. Примеры околозвуковых течений идеального газа со скачком уплотнения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.
8. Tomotika S., Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flow of compressible fluids, Pt 1. Quart. Appl. Math., 1950, vol. 7, No. 4, p. 381. Рус. перев.: Двумерное смешанное течение сжимаемой идеальной жидкости. Сб. Перев. обз. и реф. ин. период. лит., 1951, № 4).
9. Христианович С. А. Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. ПММ, 1956, т. 20, вып. 5.