ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Л. Н. Авдонин

(Москва)

Проводится интегрирование уравнений движения тяжелого гироскопа в кардановом подвесе при произвольном расположении центра тяжести кожуха гироскопа.

В 1958 г. Н. Г. Четаев [1] исследовал движение тяжелого гироскопа в кардановом подвесе в случае вертикального расположения неподвижной оси вращения внешнего кольца. Центр тяжести кожуха и гироскопа предполагался расположенным на оси симметрии гироскопа. Задача интегрирования уравнений движения была им сведена к квадратурам, легко распространимым и на тот случай, когда по оси вращения кожуха к гироскопу приложен момент внешних сил, являющийся произвольной интегрируемой функцией угла нутации.

Эта задача при некоторых предположениях относительно моментов инерции элементов системы и начальных данных рассматривалась в работе [2].

1. Рассмотрим гироскоп в кардановом подвесе, предполагая, что неподвижная ось вращения внешнего кольца вертикальна. Введем в рассмотрение две правые системы осей координат с общим началом в неподвижной точке O гироскопа. Ось ξ_3 неподвижной системы координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 направим вертикально вверх по оси вращения внешнего кольца, а оси ξ_1 и ξ_2 проведем в горизонтальной плоскости. Оси η_1 и η_2 подвижной системы координат $\eta_1\eta_2\eta_3$, жестко связанной с кожухом гироскопа, направим соответственно по оси вращения кожуха и по оси симметрии гироскопа. Положение рассматриваемой системы в пространстве $\xi_1\xi_2\xi_3$ можно определить тремя углами Эйлера: углом прецессии ψ, углом нутации θ и углом собственного вращения гироскопа φ относительно системы координат $\eta_1\eta_2\eta_3$. Пусть $\eta_1\eta_2\eta_3$ — главные оси инерции как гироскопа, так и кожуха; $A_1 = A_2$, A_3 — главные моменты инерции гироскопа, а B_1, B_2, B_3 — главные моменты инерции кожуха, момент инерции внешнего кольца относительно оси ξ_3 обозначим через C_3.

Кинетическая энергия системы определяется выражением

$$2T = \psi^{\cdot 2} (A_0 - C_0 \cos^2\theta) + \theta^{\cdot 2} B_0 + A_3 (\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot} \cos\theta)^2$$

$$A_0 = C_3 + B_2 + A_1, \quad B_0 = A_1 + B_1, \quad C_0 = B_2 + A_1 - B_3$$

Точка в позиции штриха означает производную по времени. В дальнейшем рассмотрении положим $C_0 = 0$ [3]. Координаты центра тяжести кожуха обозначим через $\eta_{10}\eta_{20}\eta_{30}$, а вес через P_1. Те же параметры гироскопа имеют значения 0, 0, l, P. Силовая функция

$$U = -P_1\eta_{20}\sin\theta - (P_1\eta_{30} + Pl)\cos\theta$$

Предположим, что рассматриваемая система находится только под действием сил тяжести. Тогда уравнение движения системы, записанные в форме Лагранжа второго рода

$$\begin{gathered}[A_0\psi^{\cdot} + A_3\cos\theta\,(\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta)]^{\cdot} = 0 \\ B_0\theta^{\cdot\cdot} + A_3\psi^{\cdot}\sin\theta\,(\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta) = -P_1\eta_{20}\cos\theta + G\sin\theta \\ A_3(\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta)^{\cdot} = 0, \quad G = P_1\eta_{30} + Pl\end{gathered} \tag{1.1}$$

допускают первые интегралы

$$\begin{gathered}A_3(\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta) = H \\ A_0\psi^{\cdot} + A_3(\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta)\cos\theta = L \\ A_0\psi^{\cdot 2} + B_0\theta^{\cdot 2} + 2P_1\eta_{20}\sin\theta + 2G\cos\theta = M\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь H, L и M — постоянные интегрирования.

2. Для углов Эйлера ψ, θ и φ из (1.2) получаем систему дифференциальных уравнений

$$\psi^{\cdot} = \psi_0^{\cdot} + (\cos\theta_0 - \cos\theta)\, H / A_0 \tag{2.1}$$

$$\sqrt{A_0 B_0}\,\theta^{\cdot} = [\theta_0^{\cdot 2} A_0 B_0 + 2A_0 P_1 \eta_{20} (\sin\theta_0 - \sin\theta) + 2A_0 (G - H\psi_0^{\cdot}) (\cos\theta_0 - \cos\theta) - H^2 (\cos\theta_0 - \cos\theta)^2]^{1/2} \tag{2.2}$$

$$\varphi^{\cdot} = H / A_3 - \cos\theta\, [(\cos\theta_0 - \cos\theta)\, H / A_0 + \psi_0^{\cdot}] \tag{2.3}$$

Знак плюс в правой части (2.2) есть следствие предположения неубывания $\theta\,(t)$ при $t = t_0$, выбран таковым просто для определенности. В дальнейшем это ограничение будет снято.

В уравнении (2.2) сделаем замену переменной, полагая

$$x^{-1} = \operatorname{tg} {}^1\!/_2 (\theta - \theta_0)$$

В результате получим

$$-2\sqrt{A_0 B_0}\, x^{\cdot} = (b_0 x^4 + 4b_1 x^3 + 6b_2 x^2 + 4b_3 x + b_4)^{1/2}$$

$$b_0 = A_0 B_0 \theta_0^{\cdot 2}, \qquad b_1 = A_0 (G - H\psi_0^{\cdot}) \sin\theta_0 - A_0 P_1 \eta_{20} \cos\theta_0$$

$$3b_2 = A_0 B_0 \theta_0^{\cdot 2} + 2A_0 (G - H\psi_0^{\cdot}) \cos\theta_0 + 2A_0 P_1 \eta_{20} \sin\theta_0 - 2H^2 \sin^2\theta_0$$

$$b_3 = A_0 (G - H\psi_0^{\cdot}) \sin\theta_0 - A_0 P_1 \eta_{20} \cos\theta_0 - H^2 \sin 2\theta_0$$

$$b_4 = A_0 B_0 \theta_0^{\cdot 2} + 4A_0 (G - H\psi_0^{\cdot}) \cos\theta_0 + 4A_0 P_1 \eta_{20} \sin\theta_0 - 4H^2 \cos^2\theta_0$$

Полагая $x = y - b_1 / b_0$, находим

$$-2\sqrt{A_0 B_0 / b_0}\, y^{\cdot} = \sqrt{y^4 + 6c_2 y^2 + 4c_3 y + c_4}$$

$$c_2 = \frac{b_0 b_2 - b_1^2}{b_0^2}, \qquad c_3 = \frac{b_3 b_0^2 - 3b_0 b_1 b_2 + 2b_1^3}{b_0^3}, \qquad c_4 = \frac{b_4 b_0^3 - 4b_0^2 b_1 b_3 + 6b_0 b_1^2 b_2 - 3b_1^4}{b_0^4}$$

Введем новую переменную z посредством формулы [4]

$$-\sqrt{y^4 + 6c_2 y^2 + 4c_3 y + c_4} = y^2 + c_2 - 2z$$

Возведя в квадрат

$$4c_2 y^2 + 4c_3 y + c_4 + 4y^2 z + 4c_2 z - 4z^2 - c_2^2 = \tag{2.4}$$

и дифференцируя, получаем

$$\frac{dy}{y^2 + c_2 - 2z} = \frac{dz}{2c_2 y + 2yz + c_3}$$

Разрешим (2.4) относительно y

$$y = \frac{-c_3 \pm \sqrt{4z^3 - g_2' z - g_3'}}{2(z + c_2)}, \qquad g_2' = c_4 + 3c_2^2, \quad g_3' = c_2 c_4 - c_3^2 - c_2^3 \tag{2.5}$$

Образуем эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp(w)$ с инвариантами g_2' и g_3' и положим $z = \wp(w)$. Переписывая (2.5) в виде

$$(2zy + 2c_2 y + c_3)^2 = 4z^3 - g_2' z - g_3'.$$

и учитывая следствие определения функции $\wp(w)$

$$\wp'(\omega) = -\sqrt{4\wp^3(\omega) - g_2' \wp(\omega) - g_3'}$$

заключим, что

$$-\frac{dy}{\sqrt{y^4 + 6c_2 y^2 + 4c_3 y + c_4}} = \frac{dy}{y^2 + c_2 - 2z} = -\frac{dz}{2c_2 y + 2yz + c_2} = dw$$

Отсюда

$$w = {}^1\!/_2 \sqrt{b_0 / A_0 B_0}\, (t - t_0)$$

Возвращаясь к прежним переменным и применяя к функциям $\wp(w)$ и $\wp'(w)$ формулы однородности, находим

$$\theta = \theta_0 + 2 \operatorname{Arc\,tg} \frac{2\,[b_0 \wp(\tau) + b_0 b_2 - b_1^2]}{\mp \sqrt{b_0}\, \wp'(\tau) - 2b_1 \wp(\tau) - b_0 b_3 + b_1 b_2} \tag{2.6}$$

Функции $\wp(\tau)$ и $\wp'(\tau)$ должны вычисляться при инвариантах

$$g_2 = b_0b_4 - 4b_1b_3 + 3b_2^2, \quad \tau = (t - t_0) / 2\sqrt{A_0B_0}$$
$$g_3 = b_0b_2b_4 - b_1^2b_4 - b_2^3 - b_0b_3^2 + 2b_1b_2b_3$$

Знак плюс или минус в знаменателе (2.6) нужно выбирать в зависимости от того убывает или возрастает $\theta(t)$ при $t = t_0$. Проведенное рассмотрение становится методически несправедливым при $b_0 = 0$, но в этом случае выражение для функции $\theta(t)$ можно получить из (2.6) предельным переходом при $b_0 \to 0$ в силу ее непрерывности по этому параметру. Полученная таким образом функция

$$\theta = \theta_0 + 2 \operatorname{Arc tg} \frac{2b_1}{2\wp(\tau) - b_2} \tag{2.7}$$

есть решение (2.2). Переменные ψ и φ могут быть, таким образом, найдены квадратурами в виде явных функций времени t.

3. Рассмотрим некоторые свойства полученного решения. При выполнении условий

$$\theta_0^{\cdot} = 0, \quad (G - H\psi_0^{\cdot}) \sin\theta_0 = P_1\eta_{20}\cos\theta_0 \tag{3.1}$$

имеют место стационарные решения

$$\theta \equiv \theta_0 \ \theta^{\cdot} \equiv 0, \ \psi^{\cdot} \equiv \psi_0^{\cdot}, \ \varphi^{\cdot} \equiv \varphi_0^{\cdot} \tag{3.2}$$

Измененная по Раусу силовая функция

$$U_1(\theta) = -P_1\eta_{20}\sin\theta - G\cos\theta - (L - H\cos\theta)^2/2A_0$$

имеет в положении равновесия максимум, если

$$U_1''(\theta_0) = P_1\eta_{20}\sin\theta_0 + (G - H\psi_0^{\cdot})\cos\theta_0 - H^2\sin^2\theta_0/A_0 < 0 \tag{3.3}$$

Это служит в силу непрерывности первых интегралов [5] достаточным условием безусловной устойчивости стационарных решений по отношению к переменным (3.2).

В случае

$$U_1''(\theta_0) > 0$$

силовая функция имеет в положении равновесия минимум, и это определяется членами наинизшего порядка в разложении этой функции, что является в силу теоремы Ляпунова [6], достаточным условием неустойчивости стационарных решений по отношению к переменным θ и $\theta^{\cdot}$.

В случае

$$\Delta = P_1^2\eta_{20}^2 + (G - H\psi_0^{\cdot})^2 \neq 0$$

(3.3), учитывая (3.1), можно записать в виде

$$U_1''(\theta_0) = \pm\sqrt{\Delta} - H^2P_1^2\eta_{20}^2/A_0\Delta$$

Здесь знак плюс или минус выбирается в зависимости от знаков величин $P_1\eta_{20}$, $G - H\psi_0^{\cdot}$ и положения θ_0 на оси θ.

В соседних с θ_0 положениях равновесия $\theta_0 \pm \pi$ знак изменяется по сравнению с исходным; отсюда следует, что при

$$A_0 |\Delta^{3/2}| < H^2P_1^2\eta_{20}^2$$

любое положение равновесия устойчиво, а при обратном знаке неравенства устойчивые положения равновесия разделяются на оси θ неустойчивыми, что совпадает с известными [7,8] условиями устойчивости вращения гироскопа вокруг вертикали.

Если $U_1''(\theta_0) = 0$ и первая, отличная от нуля, производная имеет четный порядок, то U_1 имеет в положении равновесия экстремум, и вопрос об устойчивости решается двумя выше приведенными теоремами.

Когда же $U_1''(\theta_0) = 0$ и первая, отличная от нуля, производная — нечетного порядка, силовая функция U_1 в положении равновесия экстремума не имеет, и стационарное решение (3.2) неустойчиво по отношению к переменным θ и $\theta^{\cdot}$; это вытекает из теоремы Четаева [9] о неустойчивости равновесия в том случае, когда силовая функция аналитична и в положении равновесия экстремума не имеет.

Однако для систем с одной степенью свободы неустойчивость равновесия имеет место и при менее жестких требованиях к силовой функции, чем в [9].

4. Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, уравнение движения которой можно записать в виде

$$\theta^{\cdot\cdot} = \frac{dU_1(\theta)}{d\theta} \tag{4.1}$$

Положения равновесия предполагаются известными и расположенными на конечном расстоянии от исследуемого (0, 0). Силовая функция $U_1(\theta) \not\equiv 0$ предполагается непрерывно дифференцируемой и в положении равновесия экстремума не имеет, а кроме того, $U_1(0) = 0$.

Построим на плоскости $\theta\theta^{\cdot}$ окружность конечного, но не более чем расстояние до ближайшего положения равновесия, радиуса с центром в начале координат. Рассмотрим функцию

$$V = \theta^{\cdot}\, U_1(\theta)$$

которая положительна внутри сектора окружности

$$\theta^{\cdot} > 0, \qquad U_1(\theta) > 0 \tag{4.2}$$

и обращается в нуль на лучах его образующих. Функция $U_1(\theta)$ в силу отсутствия экстремума в нуле и условий $U_1(0) = 0$, $U_1(\theta) \not\equiv 0$ необходимо принимает вблизи положения равновесия положительные значения. Функция $U_1(\theta)$ обратиться в нуль внутри сектора (4.2) не может, так как в этом случае по теореме Ролля производная $dU_1(\theta)\,/\,d\theta = 0$ внутри сектора, а это невозможно в силу выбора радиуса окружности. Следовательно, сектор (4.2) всегда существует и будет областью $V > 0$. Производная

$$V^{\cdot} = \frac{dU_1(\theta)}{d\theta}\,[U_1(\theta) + \theta^{\cdot 2}]$$

составленная в силу уравнений возмущенного движения (4.1), положительна внутри области $V > 0$, так как там $U_1(\theta) > 0$ и производная $dU_1(\theta)\,/\,d\theta$, будучи непрерывной функцией, положительной вблизи нуля, сохраняет знак до ближайшего положения равновесия, где обращается в нуль. Таким образом, функция V удовлетворяет условиям теоремы Четаева [9] о неустойчивости.

5. Отметим, что Д. М. Климов и Н. П. Степаненко [2] пришли к результатам, не совпадающим с изложенными выше на общей области их определения. Так, выбирая начальные данные в виде

$$\theta_0 = {}^1/_2\pi, \qquad \theta_0^{\cdot} = 0, \qquad G - H\psi_0^{\cdot} = 0$$

и следуя рекомендациям п. 5 [2], находим

$$\cos\theta = -\cos\frac{Ht}{\sqrt{A_0B_0}}, \qquad \psi^{\cdot} = \psi_0^{\cdot} + \frac{H}{A_0}\Big|\cos\frac{Ht}{\sqrt{A_0B_0}}$$

в то время как из настоящих построений при тех же начальных данных и при условии $P_1\eta_{20} = 0$, обеспечивающем совпадение моделей, вытекает

$$\theta \equiv {}^1/_2\pi, \qquad \psi^{\cdot} \equiv \psi_0^{\cdot}$$

По-видимому, это объясняется тем, что авторы [2] в п. 5 считают функцию

$$u = \operatorname{sn}\,[\tau - K(u_1)]$$

решением уравнения

$$du\,/\,d\tau = \sqrt{(u - u_1)(u_2 - u)(1 - u^2)}$$

при $u_1 + u_2 = 0$ и начальном условии $u(0) = u_1$, в то время как решение имеет вид

$$u = u_1 \operatorname{sn}\,[\tau + K(u_1)]$$

6. Продолжим рассмотрение свойств функции $\theta(t)$, полагая $b_0 = 0$, $b_1 \neq 0$. Функция $\wp(\tau)$ при своем изменении вдоль вещественной оси принимает все значения от $+\infty$ до e — наибольшего корня полинома

$$F(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3 \tag{6.1}$$

Свойства функции $\theta(t)$ в рассматриваемом случае зависят от отношения ${}^1/_2 b_2$ к e и кратности последнего. Выяснение этих обстоятельств удобно разбить на три случая, так как

$$F({}^1/_2 b_2) = b_1^2 b_4$$

1°. Пусть $b_4 < 0$. Тогда

$$ {}^1/_2 b_2 < e$$

2°. Пусть $b_4 = 0$. Тогда

$$z_1 = {}^1/_2 b_2, \qquad z_{2,3} = {}^1/_4 \left(-b_2 \pm \sqrt{9b_2^2 - 16b_1b_3}\right)$$

суть корни (6.1)

(а) Если $b_2 \geqslant 0$, то

$$e = z_2 \quad \text{при } b_1 b_3 \leqslant 0$$

$$e = z_1 \quad \text{при } b_1 b_3 > 0$$

(б) Если $b_2 < 0$; то

$$e = z_2 \quad \text{при } \Delta = 9b_2^2 - 16b_1b_3 \geqslant 0$$

$$e = z_1 \quad \text{при } \Delta < 0$$

3°. Пусть $b_4 > 0$. Тогда

$$e < {}^1/_2 b_2 \quad \text{при } g_2^3 - 27g_3^2 < 0 \text{ или } {}^1/_3 g_2 \sqrt{{}^1/_3 g_2} = g_3$$

В случае $g_2^3 - 27g_3^2 \geqslant 0$ функция $F(z)$ имеет три вещественных корня и достаточные условия того, что ${}^1/_2 b_2$ есть верхняя граница положительных корней $F(z)$, становятся необходимыми и принимают вид $b_4 > 0$, $b_1 b_3 > 0$, $b_2 > 0$.

Во всех случаях $e = \sqrt{{}^1/_{12} g_2}$ есть наибольший кратный корень $F(z)$ при ${}^1/_3 g_2 \sqrt{{}^1/_3 g_2} = - g_3$.

Таким образом, получен алгоритм, позволяющий установить отношение ${}^1/_2 b_2$ к e и кратность последнего. Анализ (2.7) дает возможность сформулировать следующие свойства $\theta(t)$:

a) $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$, $\theta_1 = \theta_0 + 2\,\mathrm{Arctg}\,[2b_1 / (2e - b_2)]$

b) Если $e > {}^1/_2 b_2$, то $|\theta_1 - \theta_0| < \pi$

c) Если $e = {}^1/_2 b_2$, то $|\theta_1 - \theta_0| = \pi$

d) Если $e < {}^1/_2 b_2$, то $\pi < |\theta_1 - \theta_0| < 2\pi$

e) Если e — кратный корень $F(z)$, то $\theta(t)$ достигает значения θ_1 за бесконечный промежуток времени.

Предположение $b_0 = 0$, в силу которого рассматривались свойства $\theta(t)$, означает, что θ_0 — корень правой части (2.2).

Если θ_0 — не корень ($b_0 \neq 0$), но простые корни есть, то найдя один из них θ_{01} и считая его начальным значением для $\theta(t)$ при прежних H, L и M, получим решение, эквивалентное по свойствам вышерассмотренному ($b_0 = 0$).

Если $b_0 \neq 0$ и правая часть (2.2) не имеет корней вовсе, то $\theta(t)$ — монотонная функция, приобретающая за период $\wp(\tau)$ приращение 2π. Когда же $b_0 \neq 0$ и правая часть (2.2) имеет только кратные корни, свести рассмотрение свойств решения к случаю $b_0 = 0$ рассмотренным выше способом нельзя, так как при этом исследование исходного решения заменяется исследованием решения стационарного. В этом случае $\theta(t)$ асимптотически приближается к кратному корню.

Резюмируя вышесказанное, заключаем что по углу нутации θ возможны решения стационарные, монотонные, асимптотические и периодические.

В последнем случае, приводимом к $b_0 = 0$, следуя идее В. В. Крементуло и Л. М. Мархашова [10], впервые получившими точную формулу ухода уравновешенного гироскопа [1], определим среднюю скорость ухода формулой

$$\langle\psi^{\cdot}\rangle = \left[\frac{1}{A_0}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{L - H\cos\theta}{\sqrt{f(\theta)}}\,d\theta\right]\left[\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{d\theta}{\sqrt{f(\theta)}}\right]^{-1}$$

Здесь $f(\theta)$ есть подкоренное выражение правой части (2.2), а θ_0 и θ_1 его корни. При выполнении условия

$$A_0(G - H\psi_0^{\cdot}) - H^2\cos\theta_0 = A_0G - LH = 0 \qquad (6.2)$$

имеем

$$f(\theta) = 2A_0P_1\eta_{20}(\sin\theta_0 - \sin\theta) + H^2(\cos^2\theta_0 - \cos^2\theta)$$

являющуюся функцией четной, если за новое начало на оси θ взять точку $\pm{}^1/_2\pi$, поскольку $f(\theta)$ зависит только от $\sin\theta$. При выборе нового начала $\cos\theta$ станет нечетной функцией, откуда следует, что

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{f(\theta)}} = 0$$

как интеграл от нечетной функции по промежутку, имеющему начало координат своей серединой. Средняя скорость ухода при выполнении (6.2) выражается особенно просто.

$$\langle\psi^{\cdot}\rangle = \frac{L}{A_0} = \psi_0^{\cdot} + \frac{H\cos\theta_0}{A_0}$$

Для уравновешенного гироскопа факт отсутствия ухода при $L = 0$ был указан Х. Л. Смолицким [11], а также вновь открыт Д. М. Климовым и Н. П. Степаненко [2] для уравновешенного гироскопа, имеющего ограничения на моменты инерции $C_0 = 0$). Отметим, что в рассматриваемом случае при выполнении условия $G = L = 0$, $\langle\psi^{\circ}\rangle^{\cdot} = 0$ независимо от того, равняется нулю $P_1\eta_{20}$ или нет.

Поступила 12 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. О гироскопе в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
2. Климов Д. М., Степаненко Н. П. Об интегрировании уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе. Инж. ж. МТТ, 1967, № 6.
3. Богоявленский А. А. Частное решение задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
4. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.— Л., Гостехтеориздат, 1936.
5. Рубановский В. Н., Степанов С. Я. О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнения движения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
6. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л., Гостехиздат, 1960.
7. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
8. Магнус К. Об устойчивости движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. 23, вып. 2.
9. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962.
10. Крементуло В. В., Мархашов Л. М. К вопросу об оценке «увода» уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе. Инж. ж., 1961, т. 1, вып. 4.
11. Смолицкий Х. Л. О движении гироскопа в кардановом подвесе. Инж. ж. МТТ, 1966, вып. 2.

[1] Точная формула ухода уравновешенного гироскопа была позднее предложена в работе [11].