

**ОБ ОДНОМ ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА
В СЛУЧАЕ ГОРЯЧЕВА — ЧАПЛЫГИНА**

Г. В. Горр

(Донецк)

В данной работе рассматривается один частный случай решения, первоначально полученного Д. Н. Горячевым [1] и впоследствии обобщенного С. А. Чаплыгиным [2]. Аналитически это решение изучено полно [2]. Однако по формулам, выражающим решение задачи Горячева — Чаплыгина, представить движение тела в пространстве весьма затруднительно. В работах Л. Н. Сретенского [3] и Ю. А. Архангельского [4] продолжены исследования движения тела в этом случае, но они относились лишь к быстрым вращениям тела.

Представляет интерес получить прямое кинематическое истолкование в этом решении на основе уравнений П. В. Харламова [5], какое, например, дано для других частных решений [6-8] задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку.

§ 1. Исходные соотношения. Изучаемый случай интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки получен при условиях $A_1 = A_2 = 4A_3$, $x_2 = x_3 = 0$. В силу этих условий уравнения движения можно представить в виде

$$4 \frac{d\omega_1}{dt} = 3\omega_2\omega_3, \quad 4 \frac{d\omega_2}{dt} = -3\omega_3\omega_1 - a\gamma'', \quad \frac{d\omega_3}{dt} = a\gamma' \quad (1.1)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_3\gamma' - \omega_2\gamma'', \quad \frac{d\gamma'}{dt} = \omega_1\gamma'' - \omega_3\gamma, \quad \frac{d\gamma''}{dt} = \omega_2\gamma - \omega_1\gamma' \quad (1.2)$$

$$a = Mg x_1 / A_3$$

Перейдем в уравнениях (1.1), (1.2) к безразмерным переменным. Полагаем

$$\omega_1 = \sqrt{a}\omega_1', \quad \omega_2 = \sqrt{a}\omega_2', \quad \omega_3 = \sqrt{a}\omega_3', \quad t = \frac{t'}{\sqrt{a}} \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в уравнения (1.1), (1.2) и опуская штрихи над безразмерными переменными, имеем

$$4 \frac{d\omega_1}{dt} = 3\omega_2\omega_3, \quad 4 \frac{d\omega_2}{dt} = -3\omega_3\omega_1 - \gamma'', \quad \frac{d\omega_3}{dt} = \gamma' \quad (1.4)$$

Уравнения (1.2) не изменяются.

Интегралы системы уравнений (1.4), (1.2)

$$4(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_3^2 = 2\gamma + k, \quad 4(\omega_1\gamma + \omega_2\gamma') + \omega_3\gamma'' = 0 \quad (1.5)$$

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \quad \omega_3(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1\gamma'' = g_0$$

Примем ω_1 в качестве независимой переменной, через которую выразим остальные переменные: ω_2 , ω_3 , γ , γ' , γ'' . Постоянную g_0 считаем равной нулю. Переходя во втором уравнении системы (1.4) при помощи первого уравнения к дифференцированию по ω_1 и учитывая интеграл $\omega_3(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1\gamma'' = 0$, получим

$$3d \ln(\omega_1^2 + \omega_2^2) = 2d \ln \omega_1$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$\omega_2^2 = -\omega_1^2 + b\omega_1^{2/3} \quad (1.6)$$

Здесь b — произвольная положительная постоянная, отличная от нуля.

Подставляя ω_2^2 из формулы (1.6) в соотношения (1.5), найдем из последних ω_3 , γ , γ' , γ'' в зависимости от ω_1 (параметры b и k подчиним условию $16b^3 - k^2 + 4 = 0$)

$$\omega_3^2 = 4\omega_1^{2/3}b^{-1}(\sqrt{4b^3 + 1}\omega_1^{2/3} - 2b^2) \quad (1.7)$$

$$\gamma = b^{-1}(2\sqrt{4b^3 + 1}\omega_1^{4/3} - 2b^2\omega_1^{2/3} - b\sqrt{4b^3 + 1}) \quad (1.8)$$

$$\omega_2\gamma' = 2\omega_1^{1/3}b^{-1}(-\sqrt{4b^3 + 1}\omega_1^{2/3} + b^2\omega_1^{4/3} + b\sqrt{4b^3 + 1}\omega_1^{2/3} - b^3) \quad (1.9)$$

$$\omega_3\gamma'' = -4\omega_1^{1/3}(\sqrt{4b^3 + 1}\omega_1^{2/3} - 2b^2) \quad (1.10)$$

Зависимость ω_1 от t определяет первое уравнение системы (1.4) вместе с выражениями (1.6), (1.7)

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{3}{2\sqrt{b}} \omega_1^{2/3} [(b - \omega_1^{4/3})(\sqrt{4b^3 + 1}\omega_1^{2/3} - 2b^2)]^{1/2} \quad (1.11)$$

Для удобства исследования решения (1.6) — (1.10) введем новую переменную σ по формуле

$$\omega_1 = \sigma \sqrt{\sigma} \quad (1.12)$$

Соотношения (1.6) — (1.10) и уравнение (1.11) запишутся так

$$\omega_2 = \sqrt{\sigma(\sigma^{*2} - \sigma^2)}, \quad \omega_3 = 2\sigma^{*2} \sqrt{2\sigma_*^{-1}\sigma(\sigma - \sigma_*)} \quad (1.13)$$

$$\gamma = 2\sigma^{*2}(2\sigma^2 - \sigma_*\sigma - \sigma^{*2})/\sigma_*, \quad \gamma' = 2\sigma^{*2}\sigma_*^{-1}(2\sigma - \sigma_*) \sqrt{\sigma^{*2} - \sigma^2} \quad (1.14)$$

$$\gamma'' = -4\sigma^{*3} \sqrt{1/2(\sigma - \sigma_*)\sigma_*^{-1}} \quad (1.15)$$

$$d\sigma/dt = \sqrt{2\sigma\sigma_*^{-1}(\sigma^{*2} - \sigma^2)(\sigma - \sigma_*)} \quad (1.16)$$

(σ — эллиптическая функция времени)

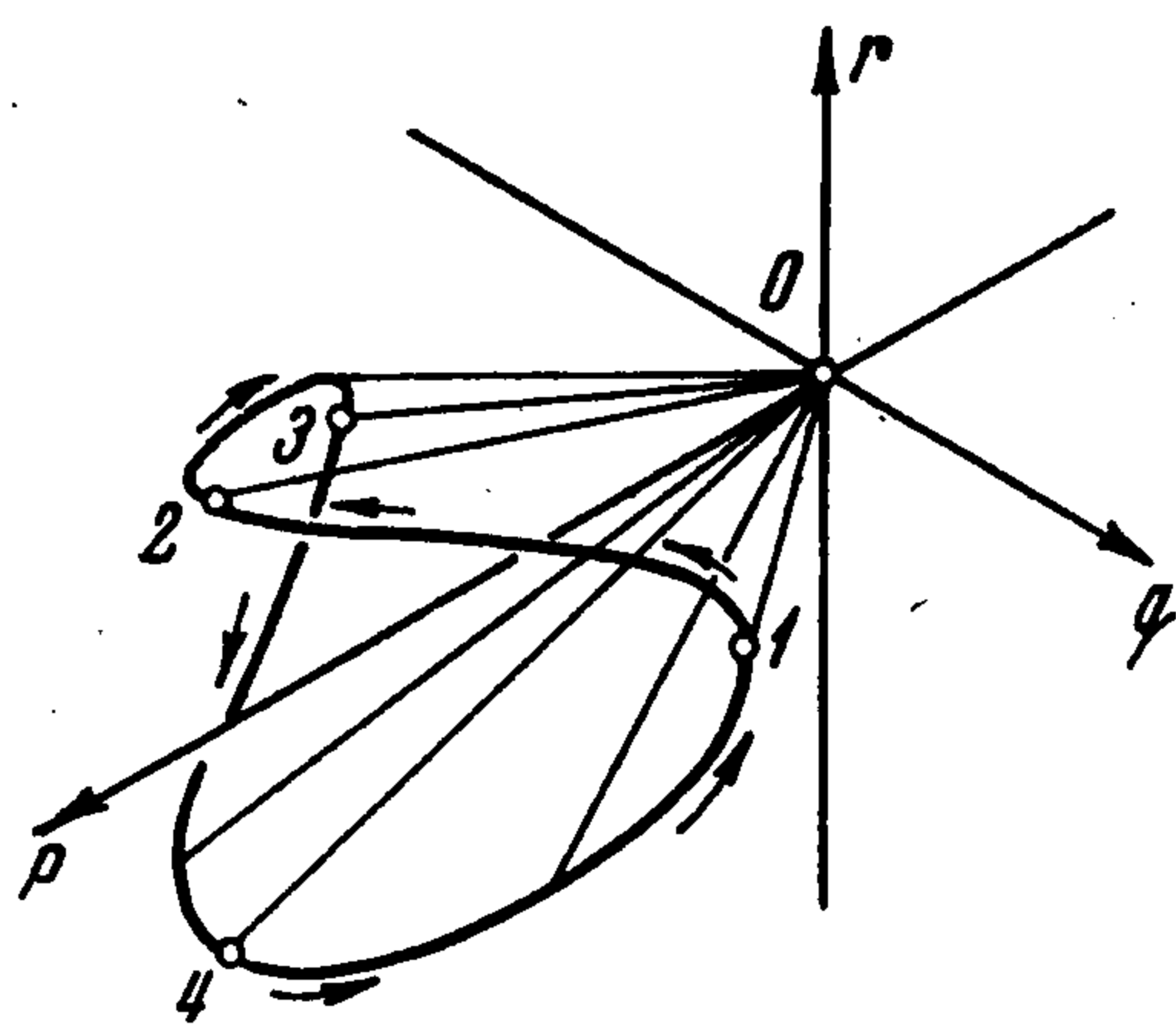
Здесь

$$\sigma_* = \frac{2b^2}{\sqrt{4b^3 + 1}}, \quad \sigma^* = \sqrt{b} \quad (1.17)$$

Отсюда следует, что $\sigma_* < \sigma^*$ при любых положительных значениях параметра b . Решение (1.13) — (1.15) имеет механический смысл, когда переменная σ изменяется в промежутке

$$\sigma_* \leq \sigma \leq \sigma^* \quad (1.18)$$

§ 2. Подвижный годограф. Подвижный годограф — траектория конца вектора угловой скорости в системе координат, неизменно связанной с телом. В данном случае подвижный годограф — линия пересечения цилиндров (1.6), (1.7). Образующие первого цилиндра параллельны оси $O\omega_3$, второго — оси $O\omega_2$.



Фиг. 1

Эти цилиндры пересекаются в промежутках $\omega_{1*} \leq \omega_1 \leq \omega_1^*$, $-\omega_1^* \leq \omega_1 \leq -\omega_{1*}$. Значения ω_{1*} и ω_1^* находим из формулы (1.12), подставив в нее соответственно σ_* и σ^* из выражений (1.17). На фиг. 1 изображена лишь одна часть подвижного годографа, существующая в промежутке $\omega_{1*} \leq \omega_1 \leq \omega_1^*$. Вторая же часть подвижного годографа (в промежутке $-\omega_1^* \leq \omega_1 \leq -\omega_{1*}$) будет симметрична указанной кривой относительно плоскости $O\omega_2\omega_3$.

Для определенности проследим за движением конца вектора угловой скорости — точки M по изображенной части подвижного годографа. Примем σ_*

в качестве начального значения переменной. Из (1.12) — (1.15) следует, что в такой момент времени $\omega_1 = \omega_{1*}$, $\omega_3 = 0$, $\gamma'' = 0$. Последнее означает, что в начальный момент времени третья координатная ось в неподвижном пространстве горизонтальна. Пусть в начальный момент $\omega_2 > 0$ — точка M находится в положении 1 (фиг. 1). Подставляя γ' из отношений (1.14) в третье уравнение системы (1.4), замечаем, что $d\omega_3/dt > 0$ при $\sigma = \sigma_*$. Следовательно, точка M будет смещаться из положения 1 в направлении к положению 2, которое достигнет она за конечный промежуток времени

$$t_* = \int_{\sigma_*}^{\sigma^*} \frac{\sqrt{\sigma^*} d\sigma}{\sqrt{2\sigma(\sigma^{*2} - \sigma^2)(\sigma - \sigma_*)}}$$

полученный из уравнения (1.16).

В точке 2 имеем $\omega_1 = \omega_1^*$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 > 0$, $\gamma' = 0$ (вторая координатная ось подвижной системы горизонтальна). Подставляя ω_1 , ω_3 , γ'' из соотношений (1.12), (1.13), (1.15) во второе уравнение системы (1.4), получим $d\omega_2/dt < 0$ при $\sigma = \sigma^*$. Поэтому точка M из положения 2 движется в направлении к положению 3, достигая его за то же время t_* . Аналогично предыдущему устанавливаем, что точка M из положения 3 перемещается в положение 4, а из него — в положение 1. Далее процесс повторяется. Весь подвижный годограф точка M обходит за время $4t_*$.

§ 3. Неподвижный годограф. Истолкование движения тела. Неподвижный годограф—траектория конца вектора угловой скорости в неподвижном пространстве. Следуя работе [5], свяжем с неподвижным пространством цилиндрические оси координат. Вектор угловой скорости задается компонентами ω_ζ , ω_ρ , α , которые определяются из соотношений [5]

$$\omega_\zeta = \omega_1\gamma + \omega_2\gamma' + \omega_3\gamma'' \quad (3.1)$$

$$\omega_\rho^2 = (\omega_2\gamma'' - \omega_3\gamma')^2 + (\omega_3\gamma - \omega_1\gamma'')^2 + (\omega_1\gamma' - \omega_2\gamma)^2 \quad (3.2)$$

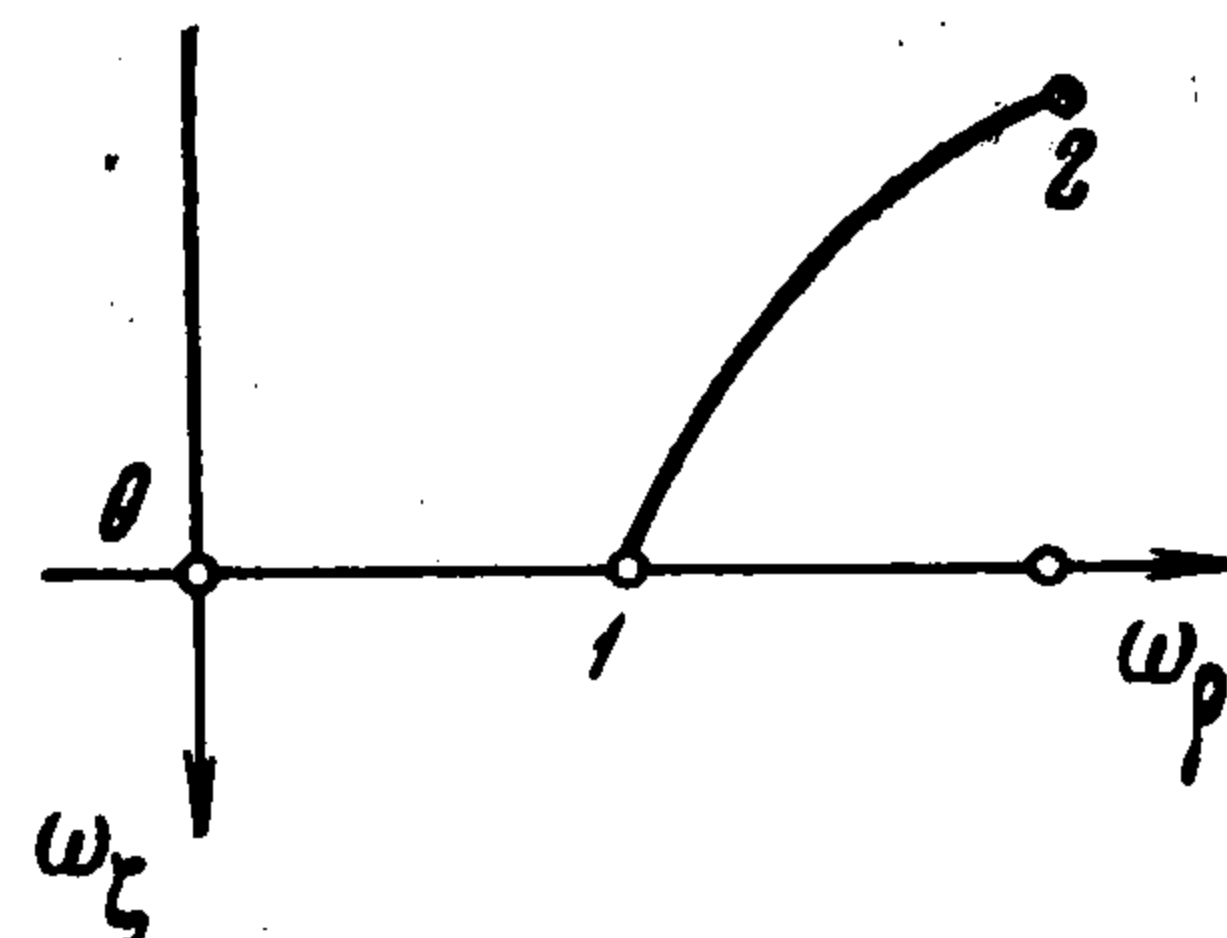
$$\omega_\rho^2 \frac{d\alpha}{d\sigma} = \begin{vmatrix} \gamma & \gamma' & \gamma'' \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ d\omega_1/d\sigma & d\omega_2/d\sigma & d\omega_3/d\sigma \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

Подставим выражения (1.12) — (1.15) в уравнения (3.1) — (3.3)

$$\omega_\zeta = -6\sigma_*^{-1}\sigma^{*4} \sqrt{\sigma} (\sigma - \sigma_*) \quad (3.4)$$

$$\omega_\rho^2 = 36\sigma_*^{-2}\sigma^{*8} \sigma (\sigma - \sigma_1) (\sigma_2 - \sigma) \quad (3.5)$$

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{\sqrt{\sigma_*} (\sigma - \sigma_3) (\sigma + \sigma_4)}{3\sigma^{*3} (\sigma_1 - \sigma) (\sigma - \sigma_2) \sqrt{2(\sigma^{*2} - \sigma^2)(\sigma - \sigma_*)}} \quad (3.6)$$



где

$$\sigma_{1,2} = 1/18 \sigma_* \sigma^{*6} [2(1 + 9\sigma^{*6}) \pm \sqrt{4 + 9\sigma^{*6}}] \quad (3.7)$$

Фиг. 2

$$\sigma_3 = 1/6 (3\sigma_* + \sqrt{3(4\sigma^{*2} - \sigma_*^2)}), \quad \sigma_4 = 1/6 (-3\sigma_* + \sqrt{3(4\sigma^{*2} - \sigma_*^2)}) \quad (3.8)$$

Исследуем меридиан поверхности вращения, определяемый в плоскости $O\omega_\rho\omega_\zeta$ уравнениями (3.4), (3.5) при изменении σ в промежутке (1.18).

Из соотношений (3.4) — (3.5) имеем

$$\frac{d\omega_\zeta}{d\omega_\rho} = - \frac{(3\sigma - \sigma_*) \sqrt{(\sigma_1 - \sigma)(\sigma - \sigma_2)}}{3(\sigma - \sigma_6)(\sigma_5 - \sigma)} \quad (3.9)$$

Здесь

$$\sigma_{5,6} = 1/54 \sigma_* \sigma^{*6} [4(1 + 9\sigma^{*6}) \pm \sqrt{324\sigma^{*12} + 99\sigma^{*6} + 16}] \quad (3.10)$$

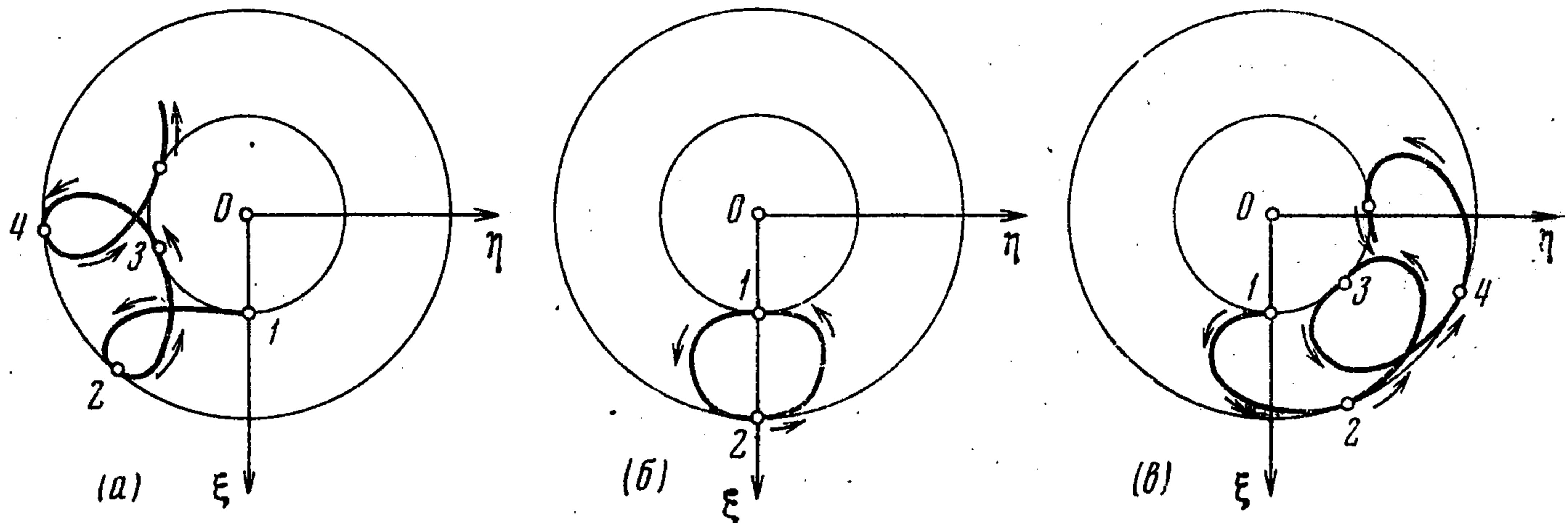
Сравнивая величины σ_1 и σ_2 из (3.7) с σ_* и σ^* , найдем, что для любых значений параметра $b > 0$ имеют место неравенства $0 < \sigma_2 < \sigma_*$, $\sigma_1 > \sigma^*$. Следовательно, ω_ρ^2 не обращается в нуль в интервале (1.18). Из формулы (3.9) следует, что касательная к меридиану нигде в промежутке $[\sigma_*, \sigma^*]$ не параллельна оси $O\omega_\rho$.

Так как $\sigma = 0$ — корень уравнения $\omega_\rho^2 = 0$ и $0 < \sigma_2 < \sigma_*$, то корень σ_6 уравнения $d\omega_\rho/d\sigma = 0$ лежит между нулем и σ_2 .

Значение σ_5 из (3.10) также не попадает в промежуток (1.18) при всех $b > 0$. Чтобы это показать, заметим, прежде всего, что $\sigma_5 > \sigma_*$. Подставляя затем значения σ_* и σ^* из (1.17) в знаменатель формулы (3.9), получим $d\omega_\rho/d\sigma > 0$ при $\sigma = \sigma_*$, σ^* . Поэтому ω_ρ возрастает в промежутке (1.18) и $\sigma_5 > \sigma^*$. Из уравнения (3.9) при этом следует: когда σ изменяется в (1.18), производные $d\omega_\zeta/d\omega_\rho$ и $d^2\omega_\zeta/d\omega_\rho^2$ отрицательны.

Меридиан имеет вид, изображенный на фиг. 2. Вращая эту кривую вокруг оси $O\omega_\zeta$, получим ту часть поверхности вращения, на которой лежит неподвижный годограф.

Изучим проекцию неподвижного годографа на горизонтальную плоскость неподвижной системы координат $O\xi\eta$. Для этого проследим за изменением в этой плоскости функций ω_ρ и α в зависимости от σ . Выше показано, что при изменении σ от σ_* до σ^* ω_ρ увеличивается от $\omega_\rho(\sigma_*)$ до $\omega_\rho(\sigma^*)$. Проекция неподвижного годографа расположена между двумя окружностями радиуса $\omega_\rho(\sigma_*)$, $\omega_\rho(\sigma^*)$.



Фиг. 3

Обозначим через θ угол между направлением радиуса ω_ρ и касательной к проекции в данной точке, отсчитываемый против часовой стрелки

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega_\rho d\alpha}{d\omega_\rho}$$

Подставляя сюда выражения (3.5), (3.6) получим: проекция неподвижного годографа на плоскость $O\xi\eta$ нигде в промежутке (1.18) не встречается с окружностями $\omega_\rho = \text{const}$ под прямым углом, а к граничным окружностям $\omega_\rho(\sigma_*)$, $\omega_\rho(\sigma^*)$ она подходит, касаясь их.

Выберем ось $O\xi$ так, чтобы $\alpha = 0$ при $\sigma = \sigma_*$. Так как σ_* — минимальное значение переменной, то с течением времени σ возрастает и, следовательно, радикал в уравнении (1.16) в этом случае положителен. Учитывая это, из формулы (3.6) найдем

$$\alpha = \int_{\sigma_*}^{\sigma} \frac{V \sigma_* (\sigma - \sigma_3) (\sigma + \sigma_4) d\sigma}{3\sigma_*^2 (\sigma_1 - \sigma) (\sigma - \sigma_2) V 2(\sigma_*^2 - \sigma^2) (\sigma - \sigma_*)} \quad (3.11)$$

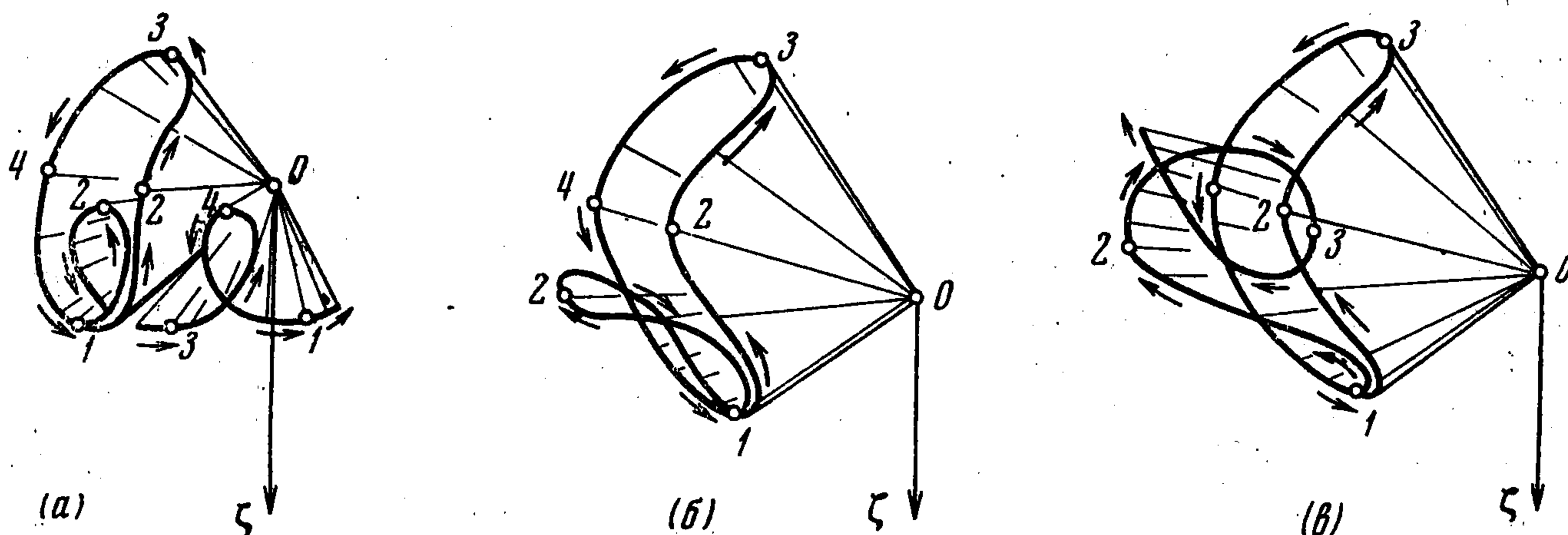
Из уравнений (1.16), (3.6) устанавливаем, что знак производной $d\alpha/dt$ зависит от знака выражения $\sigma - \sigma_3$. Отметим, что для всех $b > 0$ корень σ_3 заключен между граничными значениями σ_* и σ^* . Следовательно, в начальный момент времени разность $\sigma - \sigma_3$ отрицательна. Угол α начинает убывать. Это происходит до тех пор, пока переменная σ не достигнет значения σ_3 . После этого, так как $d\alpha/dt > 0$ ($\sigma - \sigma_3 > 0$), угол α начинает возрастать до значения α_0 , которое получаем из (3.11), когда верхний предел равен σ^* .

Проводя численный счет интеграла (3.11), приходим к заключению, что α_0 будет различным для разных значений параметра b : когда b удовлетворяет неравенству $0 < b < b^* \approx 0.653182$, $\alpha_0 < 0$; при $b = b^*$, $\alpha_0 = 0$; если $b > b^*$, то $\alpha_0 > 0$. Таким образом, при изменении σ от σ_* до σ^* проекция неподвижного годографа составит часть кривой, изображенной на фиг. 3: 3а при $b < b^*$, 3б при $b = b^*$, 3в при $b > b^*$, заключенную между точками 1 и 2.

Достигнув значения σ^* , переменная σ должна затем убывать, значит, $d\sigma/dt < 0$, и, следовательно, радикал $V 2(\sigma_*^2 - \sigma^2) (\sigma - \sigma_*)$ в формулах (1.16) (3.11) изменил знак. При таком изменении σ (от σ^* до σ_*) функции ω_ρ и $d\alpha/dt$ принимают прежние значе-

ния в обратном направлении. Часть проекции, соответствующая этому отрезку времени, симметрична изученной кривой относительно луча α_0 . На фиг. 3 она заключена между точками 2 и 3. Таким же образом строится проекция неподвижного годографа на плоскость $O\xi\eta$ при дальнейшем изменении σ (фиг. 3).

Цилиндр с вертикальными образующими, направляющей линией которого служит кривая, изображенная на фиг. 3, дает в пересечении с поверхностью вращения неподвижный годограф угловой скорости (фиг. 4).



Фиг. 4

На этой же фигуре дано положение подвижного аксоида на неподвижном, которое нетрудно определить, рассматривая указанные выше направления движения конца вектора угловой скорости по подвижному и неподвижному годографам. Обкатывая подвижный годограф по неподвижному в направлении, отмеченном стрелкой, получаем картину движения тела.

Характер движения тела, очевидно, зависит от значений параметра b : если $b < b^*$ тело прецессирует вокруг вертикали по часовой стрелке (фиг. 4, а), при $b = b^*$ оно совершает периодическое движение — подвижный и неподвижный годографы замкнутые кривые (фиг. 4, б), если $b > b^*$, тело прецессирует вокруг вертикали против часовой стрелки (фиг. 4, в).

Автор благодарит П. В. Харламова, под руководством которого выполнена работа.

Поступила 31 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гор я ч е в Д. Н. О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A=B=4C$. Матем. сб., 1900, т. 21, вып. 3, стр. 431—438.
2. Ч а п л ы г и н С. А. Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке. Собр. соч., т. 1, М.—Л., Гостехиздат, 1948, стр. 118—124.
3. С р е т е н с к и й Л. Н. Движение гироскопа Горячева — Чаплыгина. Изв. АН СССР. ОТН, 1953, № 1.
4. А р х а н г е л ь с к и й Ю. А. Движение быстрого гироскопа Горячева — Чаплыгина. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7.
5. Х а р л а м о в П. В. Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск, Изд-во Новосибирск. ун-та, 1965.
6. Х а р л а м о в П. В. Кинематическое истолкование одного решения задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 5.
7. Г о р р Г. В., И л ю х и н А. А., К о з ь м е н к о В. К. О решении Н. Ковалевского уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку. Сб. матем. физ., Респ. межвед. сб., Киев, «Наукова думка», 1968, вып. 5.
8. К о в а л е в А. М. Подвижный годограф угловой скорости в решении Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.