О СООТНОШЕНИЯХ УПРУГОСТИ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Е. М. Зверяев
(Москва)

В работе обсуждаются вопросы построения тензорных соотношений упругости в рамках точности гипотез Кирхгофа — Лява. Выясняется, что с помощью не слишком сложных соотношений упругости нельзя одновременно сохранить статико-геометрическую аналогию и обеспечить применение теорем теории упругости. В связи с этим предлагаются два варианта соотношений упругости в линейной теории тонких упругих оболочек. Первый вариант сохраняет теоремы теории упругости в линейной теории тонких упругих оболочек. Второй вариант удовлетворяет требованиям статико-геометрической аналогии, но нарушает (в малом) теорему взаимности.

Среди возможных вариантов соотношений упругости, используемых в линейной теории упругих тонких оболочек, одним из особенно простых является вариант Л. И. Балабуха — В. В. Новожилова [1,2]. Тем не менее эти соотношения отвечают ряду важных требований, о которых говорится ниже. Вместе с тем, Б. Будянский и Дж. Л. Сандерс в статье [3] указали, что эти соотношения не имеют тензорного характера.

Ниже рассматривается построение тензорных соотношений упругости минимально отличающихся в линиях кривизны от соотношений Л. И. Балабуха — В. В. Новожилова.

1. Будем пользоваться тензорной символикой и употреблять следующие обозначения:

a_{mn}, b_{mn} — тензоры первой и второй квадратичных форм, a — фундаментальный определитель, c_{mn} — вспомогательный антисимметричный тензор, компоненты которого $c_{nn} = 0$, $c_{12} = -c_{21} = a^{1/2}$.

Остальные обозначения будут отличаться от обозначений монографии [4] только тем, что вместо S_1, S_2, H_1, H_2, R_1, R_2 будут использованы S_{21}, $-S_{12}$, H_{21}, $-H_{12}$, R_{11}, R_{22} соответственно.

2. Известный вариант соотношений упругости Л. И. Балабуха — В. В. Новожилова

$$T_i = B(\varepsilon_i + \sigma\varepsilon_j), \quad S_{ij} = B(1-\sigma)\left(\frac{\omega}{2} + \frac{h^2}{3}\frac{\tau}{R_{ii}}\right) \quad \left(B = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}\right) \tag{2.1}$$

$$G_i = -D(\varkappa_i + \sigma\varkappa_j), \quad H_{12} = H_{21} = D(1-\sigma)\tau, \quad i \neq j = 1,2 \quad \left(D = \frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)}\right)$$

обладает рядом преимуществ:

а) соотношения упругости не противоречат шестому уравнению равновесия;

б) усилия и моменты представимы в виде линейного преобразования от энергетических компонентов деформации с симметричной матрицей коэффициентов (энергетические компоненты деформации определяются выражениями [4]
$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon_i$, $\varkappa^{(i)} = \varkappa_i$, $\omega^{(1)} = -\omega^{(2)} = {}^1/_2\omega$, $\tau^{(i)} = \tau - {}^1/_2\omega/R_{ii}$ $(i = 1,2)$).

в) упругий потенциал не отрицателен при любых значениях компонентов деформации;

г) соотношения (2.1), приведенные к энергетическим компонентам деформации, удовлетворяют условиям статико-геометрической аналогии.

Условия а) — в) позволяют перенести в теорию оболочек основные теоремы теории упругости. Условие г) можно трактовать как условие применимости к данному варианту теории оболочек комплексного метода В. В. Новожилова [5].

Статико-геометрическая аналогия заключается в том, что уравнения теории оболочек могут быть разбиты на две группы, переходящих одна в другую с учетом соотношения [4]

$$\{T_i, S_i, G_i, H_i\} \leftrightarrow \{-\varkappa^{(j)}, \tau^{(j)}, \varepsilon^{(j)}, -\omega^{(j)}\}, \qquad i \neq j = 1,2$$

$$\{\sigma, B, D\} \leftrightarrow \{-\sigma, -D', -B'\}, \qquad B' = \frac{1}{2Eh}, \qquad D' = \frac{3}{2Eh^3}$$

3. Б. Будянский и Дж. Л. Сандерс в статье [3] показали, что соотношения упругости Л. И. Балабуха — В. В. Новожилова не носят тензорного характера. Поэтому естественно поставить вопрос об изменении этих соотношений так, чтобы, придав им тензорный вид, оставить их в достаточной степени простыми (под этим подразумевается требование, чтобы зависимость от тензора кривизны была линейной). Кроме того, надо сохранить выполнение условий а) — г), п. 2.

Введем первый и второй тензоры деформации ε_{mn} и μ_{mn} [6]. Если условиться под $[d_{ik}]$ понимать физические составляющие тензора d_{ik} в линиях кривизны, то под ε_{mn} и μ_{mn} будут пониматься тензоры, для которых

$$[\varepsilon_{ii}] = \varepsilon_i, \quad [\varepsilon_{ij}] = {}^1\!/_2\omega, \quad [\mu_{ii}] = \varkappa_i, \quad [\mu_{ij}] = \tau - {}^1\!/_2\omega/R_{jj}, \qquad i \neq j = 1,2$$

Введем также тензор тангенциальных сил T^{mn} и тензор моментов M^{mn}, считая, что они отвечают требованиям

$$[T^{ii}] = T_i, \quad [T^{ij}] = S_{ij}, \quad [M^{ii}] = G_i, \quad [M^{ij}] = H_{ij}, \quad i \neq j = 1,2$$

Формулы, связывающие тензоры моментов и тангенциальных сил с первым и вторым тензорами деформации, в общем случае можно записать так:

$$T^{mn} = BE^{mn\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + DF^{mn\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}, \qquad M^{mn} = DG^{mn\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta} + DH^{mn\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}$$

Будем считать, что тензоры E и G выбраны так:

$$E^{mn\alpha\beta} = G^{mn\alpha\beta} = a^{m\alpha}a^{n\beta} + \sigma c^{n\alpha}c^{m\beta} \tag{3.1}$$

Если, кроме того, положить $F = H = 0$, то получатся тензорные соотношения упругости, которые в линиях кривизны имеют вид

$$T_i = B(\varepsilon_i + \sigma\varepsilon_j), \qquad S_{ij} = {}^1\!/_2 B(1-\sigma)\,\omega$$
$$G_i = -D(\varkappa_i + \sigma\varkappa_j), \quad H_{ij} = D(1-\sigma)(\tau - {}^1\!/_2\omega/R_{jj}) \qquad i \neq j = 1,2$$

С точностью до членов вида ${}^1\!/_2\omega/R_{ij}$, необходимых для придания соотношениям упругости тензорного вида,— это простейший вариант соотношений упругости А. Лява. Он не удовлетворяет требованиям п. 2.

Сохранив для E и G формулы (3.1), будем искать такие F и H, при которых требования п. 2, хотя бы частично, выполняются, предполагая, что эти тензоры составлены из тензоров a, b и c и линейны относительно b.

4. Можно показать, что в тензорной записи невозможно одновременно выполнить условия симметрии матрицы коэффициентов в соотношениях упругости и требования статико-геометрической аналогии. Это значит, что не существует тензорного аналога соотношений Л. И. Балабуха — В. В. Новожилова.

Если отказаться от требования сохранить статико-геометрическую аналогию, то соотношения упругости, удовлетворяющие всем остальным требованиям, существуют и их можно взять в виде

$$T^{mn} = B(a^{m\alpha}a^{n\beta} + \sigma c^{n\alpha}c^{m\beta})\,\varepsilon_{\alpha\beta} - D(1-\sigma)\,b^{n\alpha}a^{m\beta}\mu_{\alpha\beta}$$
$$M^{mn} = D(a^{m\alpha}a^{n\beta} + \sigma c^{n\alpha}c^{m\beta})\,\mu_{\alpha\beta} - D(1-\sigma)\,b^{\beta n}a^{\alpha m}\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{4.1}$$

В линиях кривизны они имеют вид

$$T_i = B(\varepsilon_i + \sigma\varepsilon_j) + \left\{D(1-\sigma)\frac{\varkappa_i}{R_{ii}}\right\} \qquad S_{ij} = (1-\sigma)\left[B\frac{\omega}{2} + \frac{D}{R_{jj}}\left(\tau - \left\{\frac{\omega}{2R_{ii}}\right\}\right)\right]$$
$$G_i = -D[\varkappa_i + \sigma\varkappa_j + \{(1-\sigma)\,\varepsilon_i/R_{ii}\}], \quad H_{12} = H_{21} = D(1-\sigma)\,\tau \quad (i \neq j = 1,2)$$

Здесь в фигурные скобки заключены члены, отсутствующие в соотношениях Л. И. Балабуха — В. В. Новожилова.

Нетрудно проверить неотрицательность упругого потенциала для (4.1)

$$2W = T^{mn}\varepsilon_{mn} + M^{mn}\mu_{mn} = B\{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 + 2\sigma(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \nu_1\nu_2) +$$
$$+ \frac{2h}{\sqrt{3}}\left(\frac{\nu_1\varepsilon_1}{R_{11}} + \frac{\nu_2\varepsilon_2}{R_{22}}\right)(1-\sigma) + (1-\sigma)\left[\left(1 - \frac{h^2}{R_{11}R_{22}}\right)\frac{\omega^2}{2} + \frac{2}{3}h^2\tau^2\right]\Bigg\} =$$
$$= B\{[{}^1/_2\varepsilon_1^2 + {}^1/_2\varepsilon_2^2 + 2\sigma\varepsilon_1\varepsilon_2] + [{}^1/_2\nu_1^2 + {}^1/_2\nu_2^2 + 2\sigma\nu_1\nu_2] +$$
$$+ \left[\frac{1}{2}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}\nu_1^2 + \frac{2\sigma h}{\sqrt{3}R_{11}}\nu_1\varepsilon_1\right] + \left[\frac{1}{2}\varepsilon_2^2 + \frac{1}{2}\nu_2^2 + \frac{2\sigma h}{\sqrt{3}R_{22}}\nu_2\varepsilon_2\right] +$$
$$+ (1-\sigma)[{}^1/_2(1 - {}^1/_3h^2/R_{11}R_{22})\omega^2 + {}^2/_3h^2\tau^2]\} \geqslant 0$$
$$(\nu_i = \varkappa_i h / \sqrt{3}, \ i = 1, 2)$$

так как члены, заключенные в каждую пару квадратных скобок, неотрицательны при условии $\sigma \leqslant {}^1/_2$.

5. Можно, наоборот, сохранить статико-геометрическую аналогию и нарушить симметрию матрицы коэффициентов в соотношениях упругости. В этом случае нарушается теорема взаимности и это можно оправдать тем, что сохранение статико-геометрической аналогии открывает путь к применению комплексного метода.

Тогда соотношения упругости, удовлетворяющие всем остальным требованиям, в том числе и условию неотрицательности упругого потенциала при $\sigma \leqslant {}^1/_2$, можно взять в виде

$$T^{mn} = B(a^{n\alpha}a^{m\beta} + \sigma c^{m\alpha}c^{n\beta})\varepsilon_{\alpha\beta} + D(1-\sigma)c^{ns}b_{sk}c^{k\alpha}a^{m\beta}\mu_{\alpha\beta}$$
$$\mu^{mn} = D'(a^{n\alpha}a^{m\beta} - \sigma c^{m\alpha}c^{n\beta})M_{\alpha\beta} + B'(1+\sigma)b^{n\alpha}a^{m\beta}T_{\alpha\beta}$$

В линиях кривизны им соответствуют такие соотношения упругости

$$T_i = B(\varepsilon_i + \sigma\varepsilon_j) - D(1-\sigma)\varkappa_i / R_{jj}$$
$$S_{ij} = (1-\sigma)\left[B\frac{\omega}{2} - \frac{D}{R_{ii}}\left(\tau - \frac{\omega}{2R_{ii}}\right)\right]$$
$$\varkappa_i = -D'(G_i - \sigma G_j) + B'(1+\sigma)T_i/R_{ii}$$
$$\tau - \frac{\omega}{2R_{ii}} = (1+\sigma)\left[D'H_{ij} - B'\frac{S_{ij}}{R_{ii}}\right], \quad i \neq j = 1,2$$

Эти соотношения упругости в общей тензорной записи намного проще, чем соотношения А. И. Лурье, которые, кроме того, не удовлетворяют требованию линейности относительно тензора b и статико-геометрической аналогии.

Б. Будянский и Дж. Л. Сандерс в статье [3] показали, что можно формально построить теорию оболочек, удовлетворив всем требованиям п. 2. Но для этого им пришлось заменить в уравнениях теории оболочек усилия и деформации их линейными комбинациями, что идет в ущерб физической наглядности уравнений теории оболочек.

Автор благодарит А. Л. Гольденвейзера за постоянное внимание к работе.

Поступила 18 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Балабух Л. И. Изгиб и кручение конических оболочек. Тр. Центр. аэрогидродинам. ин-та им. Н. Е. Жуковского, 1946, № 577.
2. Новожилов В. В. Новый метод расчета тонких оболочек. Изв. АН СССР. ОТН, 1946, № 1, стр. 35—48.
3. Budiansky B., Sanders J. L. On the «best» first order linear shell theory, «Progr. appl. mech.» New York, Macmillan Co.; London, Collier macmillan LtD, 1963, pp. 129—140.
4. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
5. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1951.
6. Гольденвейзер А. Л., Лурье А. И. О математической теории равновесия упругих оболочек. ПММ, 1947, т. 11, вып. 5.