Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

К БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

С. А. Амбарцумян

(Ереван)

Рассматривается вопрос построения безмоментной теории анизотропных оболочек путем приведения трехмерной задачи теории упругости анизотропного тела к двухмерной задаче теории оболочек. Но при этом особое внимание обращается на те напряжения, которые в классической теории анизотропных оболочек не являются предметом обсуждения [1,2]. Предлагаются некоторые аналитические критерии безмометности оболочки.

1. Рассмотрим однородную анизотропную оболочку постоянной толщины h, когда в каждой точке оболочки имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной поверхности оболочки. Считается, что срединная поверхность представлена ортогональными криволинейными координатами α, β, которые совпадают с линиями главной кривизны срединной поверхности. Положение какой-либо точки оболочки определяется ортогональными координатами α, β, γ, где координата γ является прямолинейной. Считается также, что оболочка в процессе деформации остается упругой, подчиняясь обобщенному закону Гука, который имеет вид [1]

$$
\begin{gathered}
e_\alpha = a_{11}\sigma_\alpha + a_{12}\sigma_\beta + a_{13}\sigma_\gamma + a_{16}\tau_{\alpha\beta}, \quad e_{\beta\gamma} = a_{44}\tau_{\beta\gamma} + a_{45}\tau_{\alpha\gamma} \\
e_\beta = a_{12}\sigma_\alpha + a_{22}\sigma_\beta + a_{23}\sigma_\gamma + a_{26}\tau_{\alpha\beta}, \quad e_{\alpha\gamma} = a_{45}\tau_{\beta\gamma} + a_{55}\tau_{\alpha\gamma} \qquad (1.1) \\
e_\gamma = a_{13}\sigma_\alpha + a_{23}\sigma_\beta + a_{33}\sigma_\gamma + a_{36}\tau_{\alpha\beta} \\
e_{\alpha\beta} = a_{16}\sigma_\alpha + a_{26}\sigma_\beta + a_{36}\sigma_\gamma + a_{66}\tau_{\alpha\beta}
\end{gathered}
$$

где e_i — компоненты деформации, σ_i и τ_{ik} — компоненты напряжения, a_{ik} — упругие постоянные.

В основе предлагаемой здесь теории лежит предположение, что основные, с точки зрения классической теории, напряжения по толщине оболочки распределены равномерно, т. е.

$$
\sigma_\alpha = T_1 / h, \quad \sigma_\beta = T_2 / h, \quad \tau_{\alpha\beta} = S / h \qquad (1.2)
$$

где T_i и S — внутренние тангенциальные силы оболочки на единицу длины срединной поверхности.

Принимая (1.2), очевидно, с точностью $1 \pm k_i\gamma \approx 1$, для моментов получим

$$
M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad H = 0 \qquad (1.3)
$$

В последующем с такой же точностью, где это очевидно, величины порядка $k_i\gamma$ будут пренебрежены по сравнению с единицей. При этом определенная осторожность требуется при отбрасывании членов с множителями, содержащими a_{ik}. Дело в том, что в общем случае коэффициенты упругости могут образовать такие величины, которые в сочетании с $k_i\gamma$ не могут быть пренебрежены по сравнению с единицей.

2. Уравнения равновесия дифференциального элемента тела, с принятой точностью имеют вид [3]

$$\begin{gathered}
A\,(B\sigma_\alpha)_{,\alpha} - AB_{,\alpha}\sigma_\beta + A\,(A\tau_{\alpha\beta})_{,\beta} + AA_{,\beta}\,\tau_{\beta\alpha} + (H_1{}^2H_2\tau_{\alpha\gamma})_{,\gamma} = 0\\
B\,(A\sigma_\beta)_{,\beta} - BA_{,\beta\sigma\alpha} + B\,(B\tau_{\beta\alpha})_{,\alpha} + BB_{,\alpha}\tau_{\alpha\beta} + (H_2{}^2H_1\tau_{\beta\gamma})_{,\gamma} = 0 \qquad (2.1)\\
(H_1H_2\sigma_\gamma)_{,\gamma} - \sigma_\alpha ABk_1 - \sigma_\beta ABk_2 + (B\tau_{\alpha\gamma})_{,\alpha} + (A\tau_{\beta\gamma})_{,\beta} = 0\\
H_1 = A\,(1 + k_1\gamma), \qquad H_2 = B\,(1 + k_2\gamma)
\end{gathered}$$

Здесь H_1, H_2 — коэффициенты Ламе, A, B — коэффициенты первой квадратичной формы, k_i — главные кривизны срединной поверхности.

Пусть оболочка загружена так, что на ее внешних поверхностях

$$\begin{gathered}
\tau_{\alpha\gamma} = X^+, \quad \tau_{\beta\gamma} = Y^+, \quad \sigma_\gamma = Z^+, \quad (\gamma = {}^1\!/_2h) \qquad (2.2)\\
\tau_{\alpha\gamma} = -X^-, \quad \tau_{\beta\gamma} = -Y^-, \quad \sigma_\gamma = -Z^- \quad (\gamma = -{}^1\!/_2h)
\end{gathered}$$

Подставляя значения напряжений σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$ из (1.1) в первые два уравнения равновесия (2.1) и произведя интегрирование по γ, получим $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ с точностью до функций интегрирования, которые должны быть определены согласно (2.2). Подставляя полученные здесь значения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ совместно со значениями σ_α и σ_β в третье уравнение равновесия и производя интегрирование по γ, получим σ_γ и еще одну функцию интегрирования, которая тоже должна быть определена согласно (2.2).

При помощи полученных выше значений $\tau_{\alpha\gamma}$, $\tau_{\beta\gamma}$ и σ_γ, удовлетворяя условиям на поверхностях (2.2), получим

$$\begin{gathered}
(BT_1)_{,\alpha} - T_2B_{,\alpha} + (AS)_{,\beta} + SA_{,\beta} = -ABX_2\\
(AT_2)_{,\beta} - T_1A_{,\beta} + (BS)_{,\alpha} + SB_{,\alpha} = -ABY_2 \qquad (2.3)\\
T_1k_1 + T_2k_2 = Z_2 + {}^1\!/_2hZ_1{}^*
\end{gathered}$$

$$\tau_{\alpha\gamma} = \frac{X_1}{2} + \frac{\gamma}{h}X_2, \qquad \tau_{\beta\gamma} = \frac{Y_1}{2} + \frac{\gamma}{h}Y_2, \qquad \sigma_\gamma = P_1 + \gamma P_2 + \gamma^2P_3 \quad (2.4)$$

Здесь

$$\begin{gathered}
P_1 = \frac{Z_1}{2} + \frac{h}{8}Z_2{}^*, \quad P_2 = \frac{Z_2}{h}, \quad P_3 = -\frac{1}{2h}Z_2{}^*,\\
Z_i{}^* = \frac{1}{AB}\,[(BX_i)_{,\alpha} + (AY_i)_{,\beta}]\\
X_1 = X^+ - X^-, \quad Y_1 = Y^+ - Y^-, \quad Z_1 = Z^+ - Z^- \qquad (2.5)\\
X_2 = X^+ + X^-, \quad Y_2 = Y^+ + Y^-, \quad Z_2 = Z^+ + Z^-
\end{gathered}$$

Таким образом, получим систему уравнений (2.3), которая лишь в малом отличается от соответствующей системы обычной теории [1,4].

Наряду с (2.3) найдены формулы (2.4), при помощи которых могут быть определены те напряжения, которые совместно с «основными» (1.2) могут быть расчетными для оболочек, изготовленных из современных армированных пластиков с пониженной сопротивляемостью на сдвиг и поперечный отрыв [5].

3. Особый интерес в безмоментной теории анизотропных оболочек представляет вопрос определения перемещений [1,2].

Связь между компонентами деформации и перемещениями какой-либо точки оболочки $u_\alpha(\alpha,\beta,\gamma)$, $u_\beta(\alpha,\beta,\gamma)$, $u_\gamma(\alpha,\beta,\gamma)$, с принятой точностью запишется следующим образом:

$$e_\alpha = \frac{1}{A}u_{\alpha,\alpha} + \frac{1}{AB}A_{,\beta}u_\beta + k_1 u_\gamma \qquad e_\gamma = u_{\gamma,\gamma} \tag{3.1}$$

$$e_\beta = \frac{1}{B}u_{\beta,\beta} + \frac{1}{AB}B_{,\alpha}u_\alpha + k_2 u_\gamma$$

$$e_{\beta\gamma} = B\left(\frac{u_\beta}{H_2}\right)_{,\gamma} + \frac{1}{B}u_{\gamma,\beta} \qquad e_{\alpha\beta} = \frac{A}{B}\left(\frac{u_\alpha}{A}\right)_{,\beta} + \frac{B}{A}\left(\frac{u_\beta}{B}\right)_{,\alpha}$$

$$e_{\gamma\alpha} = A\left(\frac{u_\alpha}{H_1}\right)_{,\gamma} + \frac{1}{A}u_{\gamma,\alpha}$$

Согласно (1.1), (1.2), (2.4) и (3.1) можно записать

$$u_{\gamma,\gamma} = a_{13}\frac{T_1}{h} + a_{23}\frac{T_2}{h} + a_{36}\frac{S}{h} + a_{33}(P_1 + \gamma P_2 + \gamma^2 P_3) \tag{3.2}$$

Интегрируя (3.2) по γ в пределах от 0 до γ, при этом полагая $u_\gamma = w(\alpha, \beta)$ при $\gamma = 0$, получим

$$u_\gamma = w + \gamma\left(a_{13}\frac{T_1}{h} + a_{23}\frac{T_2}{h} + a_{36}\frac{S}{h} + a_{33}P_1\right) + \frac{\gamma^2}{2}a_{33}P_2 + \frac{\gamma^3}{3}a_{33}P_3 \tag{3.3}$$

Здесь $w(\alpha, \beta)$ — нормальное перемещение срединной поверхности оболочки.

Далее, согласно (1.1) и (3.1) в силу (2.4) и (3.3) легко получить

$$A\left(\frac{1}{H_1}u_\alpha\right)_{,\gamma} = a_{55}\left(\frac{X_1}{2} + \frac{\gamma}{h}X_2\right) + a_{45}\left(\frac{Y_1}{2} + \frac{\gamma}{h}Y_2\right) - \frac{1}{A}w_{,\alpha} -$$

$$-\frac{\gamma}{A}\left(a_{13}\frac{T_1}{h} + a_{23}\frac{T_2}{h} + a_{36}\frac{S}{h} + a_{33}P_1\right)_{,\alpha} - \frac{\gamma^2}{2A}a_{33}P_{2,\alpha} - \frac{\gamma^3}{3A}a_{33}P_{3,\alpha} \tag{3.4}$$

$$B\left(\frac{1}{H_2}u_\beta\right)_{,\gamma} = a_{44}\left(\frac{Y_1}{2} + \frac{\gamma}{h}Y_2\right) + a_{45}\left(\frac{X_1}{2} + \frac{\gamma}{h}X_2\right) - \frac{1}{B}w_{,\beta} -$$

$$-\frac{\gamma}{B}\left(a_{13}\frac{T_1}{h} + a_{23}\frac{T_2}{h} + a_{36}\frac{S}{h} + a_{33}P_1\right)_{,\beta} - \frac{\gamma^2}{2B}a_{33}P_{2,\beta} - \frac{\gamma^3}{3B}a_{33}P_{3,\beta}$$

Интегрируя (3.4) по γ в пределах от 0 до γ, при этом полагая, что при $\gamma = 0$, $u_\alpha = u(\alpha, \beta)$, $u_\beta = v(\alpha, \beta)$ для тангенциальных перемещений какой-либо точки оболочки получим

$$u_\alpha = u - \frac{\gamma}{A}w_{,\alpha} + a_{55}\left(\frac{\gamma}{2}X_1 + \frac{\gamma^2}{2h}X_2\right) + a_{45}\left(\frac{\gamma}{2}Y_1 + \frac{\gamma^2}{2h}Y_2\right) -$$

$$-\frac{\gamma^2}{2A}P_{1,\alpha}^* - \frac{\gamma^3}{6A}a_{33}P_{2,\alpha} - \frac{\gamma^4}{12A}a_{33}P_{3,\alpha} \tag{3.5}$$

$$u_\beta = v - \frac{\gamma}{B}w_{,\beta} + a_{44}\left(\frac{\gamma}{2}Y_1 + \frac{\gamma^2}{2h}Y_2\right) + a_{45}\left(\frac{\gamma}{2}X_1 + \frac{\gamma^2}{2h}X_2\right) -$$

$$-\frac{\gamma^2}{2B}P^*_{1,\beta} - \frac{\gamma^3}{6B}a_{33}P_{2,\beta} - \frac{\gamma^4}{12B}a_{33}P_{3,\beta}$$

Подставляя значения u_α, u_β и u_γ соответственно из (3.5) и (3.3) в пока еще полностью не использованные геометрические соотношения (3.1), получим

$$e_\alpha = \varepsilon_1 + \gamma\left[L_1(w) + \frac{1}{2A}F_{1,\alpha} + \frac{1}{2AB}A_{,\beta}Q_1 + k_1 P_1^*\right] +$$

$$+\gamma^2\left[\frac{1}{2}L_1(P_1^*)-\frac{1}{2Ah}F_{2,\alpha}+\frac{1}{2ABh}A_{,\beta}Q_2+k_1\frac{a_{33}}{2}P_2\right]+$$
$$+\gamma^3\left[\frac{a_{33}}{6}L_1(P_2)+k_1\frac{a_{33}}{3}P_3\right]+\gamma^4\frac{a_{33}}{12}L_1(P_3)$$

$$e_\beta=\varepsilon_2+\gamma\left[L_2(w)+\frac{1}{2B}Q_{1,\beta}+\frac{1}{2AB}B_{,\alpha}F_1+k_2P_1^*\right]+ \tag{3.6}$$
$$+\gamma^2\left[\frac{1}{2}L_2(P_1^*)+\frac{1}{2Bh}Q_{2,\beta}+\frac{1}{2ABh}B_{,\alpha}F_2+k_2\frac{a_{33}}{2}P_2\right]+$$
$$+\gamma^3\left[\frac{a_{33}}{6}L_2(P_2)+k_2\frac{a_{33}}{3}P_3\right]+\gamma^4\frac{a_{33}}{12}L(P_3)$$

$$e_{\alpha\beta}=\omega+\gamma\left[2L_3(w)+\frac{A}{2B}\left(\frac{F_1}{A}\right)_{,\beta}+\frac{B}{2A}\left(\frac{Q_1}{B}\right)_{,\alpha}\right]+$$
$$+\gamma^2\left[L_3(P_1^*)+\frac{A}{2Bh}\left(\frac{F_2}{A}\right)_{,\beta}+\frac{B}{2Ah}\left(\frac{Q_2}{B}\right)_{,\alpha}\right]+$$
$$+\gamma^3\frac{a_{33}}{3}L_3(P_2)+\gamma^4\frac{a_{33}}{6}L_3(P_3)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$F_i=a_{55}X_i+a_{45}Y_i,\qquad Q_i=a_{44}Y_i+a_{45}X_i \tag{3.7}$$
$$P_1^*=a_{13}\frac{T_1}{h}+a_{23}\frac{T_2}{h}+a_{36}\frac{S}{h}+a_{33}P_1=T^*+a_{33}P_1$$
$$T^*=a_{13}\frac{T_1}{h}+a_{23}\frac{T_2}{h}+a_{36}\frac{S}{h}$$

а также известные представления

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A}u_{,\alpha}+\frac{1}{AB}A_{,\beta}v+k_1w,\qquad \varepsilon_2=\frac{1}{B}v_{,\beta}+\frac{1}{AB}B_{,\alpha}u+k_2w \tag{3.8}$$
$$\omega=\frac{A}{B}\left(\frac{u}{A}\right)_{,\beta}+\frac{B}{A}\left(\frac{v}{B}\right)_{,\alpha}$$

Для линейных операторов L_i имеем

$$L_1(q)=-\frac{1}{A}\left(\frac{1}{A}q_{,\alpha}\right)_{,\alpha}-\frac{1}{AB^2}A_{,\beta}q_{,\beta}, \tag{3.9}$$
$$L_2(q)=-\frac{1}{B}\left(\frac{1}{B}q_{,\beta}\right)_{,\beta}-\frac{1}{A^2B}B_{,\alpha}q_{,\alpha}$$
$$L_3(q)=-\frac{1}{AB}\left(q_{,\alpha\beta}-\frac{1}{A}A_{,\beta}q_{,\alpha}-\frac{1}{B}B_{,\alpha}q_{,\beta}\right)$$

С другой стороны, для необходимых здесь уравнений обобщенного закона Гука, согласно (1.2), (2.4) (2.5), (3.7), имеем

$$e_\alpha=a_{11}\frac{T_1}{h}+a_{12}\frac{T_2}{h}+a_{16}\frac{S}{h}+a_{13}\left(\frac{Z_1}{2}+\frac{h}{8}Z_2^*\right)+\gamma a_{13}\frac{Z_2}{h}-\gamma^2\frac{a_{13}}{2h}Z_2^*$$
$$e_\beta=a_{22}\frac{T_2}{h}+a_{12}\frac{T_1}{h}+a_{26}\frac{S}{h}+a_{23}\left(\frac{Z_1}{2}+\frac{h}{8}Z_2^*\right)+\gamma a_{23}\frac{Z_2}{h}-\gamma^2\frac{a_{23}}{2h}Z_2^*$$
$$e_{\alpha\beta}=a_{66}\frac{S}{h}+a_{16}\frac{T_1}{h}+a_{26}\frac{T_2}{h}+a_{36}\left(\frac{Z_1}{2}+\frac{h}{8}Z_2^*\right)+\gamma a_{36}\frac{Z_2}{h}-\gamma^2\frac{a_{36}}{2h}Z_2^*$$

В приведенных здесь выражениях для компонент деформации (см. также (3.6)) множители при γ всех степеней в некоторых частных случаях могут быть настолько малы, что с принятой точностью должны быть пренебрежены по сравнению с ε_i, ω или по сравнению с членами, содержащими γ более низких степеней. Однако в общем случае этого сказать или сделать нельзя. Поэтому в дальнейших рассуждениях, все члены, входящие в формулы для компонент тензора деформаций, должны быть оставлены без каких-либо модификаций; однако при этом в очевидных случаях членами, имеющими порядок $k_i\gamma$, можно пренебрегать по сравнению с единицей.

Сопоставляя полученные значения компонент деформаций с соответствующими представлениями (3.6) и приравнивая коэффициенты при γ нулевой степени, получим (3.10)

$$\frac{1}{A}u_{,\alpha}+\frac{1}{AB}A_{,\beta}v+k_1w=a_{11}\frac{T_1}{h}+a_{12}\frac{T_2}{h}+a_{16}\frac{S}{h}+\frac{a_{13}}{2}Z_1+a_{13}\frac{h}{8}Z_2^*$$

$$\frac{1}{B}v_{,\beta}+\frac{1}{AB}B_{,\alpha}u+k_2w=a_{22}\frac{T_2}{h}+a_{12}\frac{T_1}{h}+a_{26}\frac{S}{h}+\frac{a_{23}}{2}Z_1+a_{23}\frac{h}{8}Z_2^*$$

$$\frac{A}{B}\left(\frac{u}{A}\right)_{,\beta}+\frac{B}{A}\left(\frac{v}{B}\right)_{,\alpha}=a_{66}\frac{S}{h}+a_{16}\frac{T_1}{h}+a_{26}\frac{T_2}{h}+\frac{a_{36}}{2}Z_1+a_{26}\frac{h}{8}Z_2^*$$

Приведенные уравнения составляют полную систему дифференциальных уравнений, при помощи которых могут быть определены искомые перемещения задачи. Эти уравнения содержат члены, которые появились в результате учета явлений, связанных с поперечными деформациями оболочки. Вероятно, не всегда влияние этих членов на перемещения оболочки ощутимы, однако в общем случае они должны быть оставлены для рассмотрения, ибо не исключены случаи, в которых учет явлений, связанных с поперечными деформациями оболочки может стать необходимым.

Далее, приравнивая коэффициенты при остальных γ, получим четыре группы соотношений:

первая группа (3.11)

$$L_1(w)+k_1T^*=\frac{a_{13}}{h}Z_2-a_{33}\frac{h}{8}L_1(Z_2)-k_1\frac{a_{33}}{2}Z_1-\frac{1}{2A}F_{1,\alpha}-\frac{1}{2AB}A_{,\beta}Q_1$$

$$L_2(w)+k_2T^*=\frac{a_{23}}{h}Z_2-a_{33}\frac{h}{8}L_2(Z_2)-k_2\frac{a_{33}}{2}Z_1-\frac{1}{2B}Q_{1,\beta}-\frac{1}{2AB}B_{,\alpha}F_1$$

$$2L_3(w)=\frac{a_{36}}{h}Z_2-\frac{1}{2}\frac{B}{A}\left(\frac{1}{B}Q_1\right)_{,\alpha}-\frac{1}{2}\frac{A}{B}\left(\frac{1}{A}F_1\right)_{,\beta}$$

вторая группа

$$L_1(T^*)=-\frac{a_{33}}{2}L_1(Z_1)-k_1\frac{a_{33}}{h}Z_2-\frac{a_{13}}{h}Z_2^*-\frac{1}{Ah}F_{2,\alpha}-\frac{1}{ABh}A_{,\beta}Q_2$$

$$L_2(T^*)=-\frac{a_{33}}{2}L_2(Z_1)-k_2\frac{a_{33}}{h}Z_2-\frac{a_{23}}{h}Z_2^*-\frac{1}{Bh}Q_{2,\beta}-\frac{1}{ABh}B_{,\alpha}F_2$$

$$L_3(T^*)=-\frac{a_{33}}{2}L_3(Z_1)-\frac{a_{36}}{2h}Z_2^*-\frac{1}{2h}\frac{A}{B}\left(\frac{1}{A}F_2\right)_{,\beta}-\frac{1}{2h}\frac{B}{A}\left(\frac{1}{B}Q_2\right)_{,\alpha}$$

(3.12)

третья группа

$$L_1(Z_2)-k_1Z_2^*=0,\quad L_2(Z_2)-k_2Z_2^*=0,\quad L_3(Z_2)=0 \qquad (3.13)$$

четвертая группа

$$L_1(Z_2^*)=0,\qquad L_2(Z_2^*)=0,\qquad L_3(Z_2^*)=0 \qquad (3.14)$$

Удовлетворяя условиям (3.11) — (3.14), полностью обеспечиваем безмоментное состояние оболочки. От уровня точности удовлетворения условий (3.11) — (3.14) зависит степень чистоты безмоментного состояния оболочки.

Рассматривая условия (3.11) — (3.14), замечаем также, что для обеспечения безмоментного состояния оболочки ограничения должны быть наложены не только на геометрию оболочки и на внешнюю нагрузку, но и на механические характеристики материала оболочки. Точнее на оболочку должны быть наложены согласованные между собой геометрические, статические и физические ограничения.

4. Напряжения σ_α, σ_β и $\tau_{\alpha\beta}$, на которые были наложены гипотетические ограничения, могут быть представлены при помощи деформаций.

Из (1.1), согласно (2.4) и (3.6), получим

$$\begin{gathered}
a_{11}\sigma_\alpha + a_{12}\sigma_\beta + a_{16}\tau_{\alpha\beta} = \varepsilon_1 - a_{13}\left(\frac{Z_1}{2} + \frac{h}{8} Z_2^*\right) + \\
+ \gamma\left[L_1(w) + \frac{1}{2A} F_{1,\alpha} + \frac{1}{2AB} A_{,\beta} Q_1 + k_1 P_1^* - a_{13}\frac{Z_2}{h}\right] + \\
+ \gamma^2\left[\frac{1}{2} L_1(P_1^*) + \frac{1}{2Ah} F_{2,\alpha} + \frac{1}{2ABh} A_{,\beta} Q_2 + k_1 \frac{a_{33}}{2} P_2 + \right. \\
\left. + \frac{a_{13}}{2h} Z_2^*\right] + \gamma^3\left[\frac{a_{33}}{6h} L_1(Z_2) - k_1\frac{a_{33}}{6h} Z_2^*\right] - \gamma^4 \frac{a_{33}}{24h} L_1(Z_2^*)
\end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered}
a_{22}\sigma_\beta + a_{12}\sigma_\alpha + a_{26}\tau_{\alpha\beta} = \varepsilon_2 - a_{23}\left(\frac{Z_1}{2} + \frac{h}{8} Z_2^*\right) + \\
+ \gamma\left[L_2(w) + \frac{1}{2B} Q_{1,\beta} + \frac{1}{2AB} B_{,\alpha} F_1 + k_2 P_1^* - a_{23}\frac{Z_2}{h}\right] + \\
+ \gamma^2\left[\frac{1}{2} L_2(P_1^*) + \frac{1}{2Bh} Q_{2,\beta} + \frac{1}{2ABh} B_{,\alpha} F_2 + k_2 \frac{a_{33}}{2} P_2 + \frac{a_{23}}{2h} Z_2^*\right] + \\
+ \gamma^3\left[\frac{a_{33}}{6h} L_2(Z_2) - k_2\frac{a_{33}}{6h} Z_2^*\right] - \gamma^4 \frac{a_{33}}{24h} L_2(Z_2^*)
\end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered}
a_{66}\tau_{\alpha\beta} + a_{16}\sigma_\alpha + a_{26}\sigma_\beta = \omega - a_{36}\left(\frac{Z_1}{2} + \frac{h}{8} Z_2^*\right) + \\
+ \gamma\left[2L_3(w) + \frac{A}{2B}\left(\frac{F_1}{A}\right)_{,\beta} + \frac{B}{2A}\left(\frac{Q_1}{B}\right)_{,\alpha} - a_{36}\frac{Z_2}{h}\right] + \\
+ \gamma^2\left[L_3(P_1^*) + \frac{A}{2Bh}\left(\frac{F_2}{A}\right)_{,\beta} + \frac{B}{2Ah}\left(\frac{Q_2}{B}\right)_{,\alpha} + a_{36}\frac{Z_2^*}{2h}\right] + \\
+ \gamma^3 \frac{a_{33}}{3h} L_3(Z_2) - \gamma^4 \frac{a_{33}}{12h} L_3(Z_2^*)
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Из (4.1) — (4.3), согласно (3.11) — (3.14), с учетом (2.4), (2.6) и (3.7) для определения напряжений получим

$$\begin{aligned}
a_{11}\sigma_\alpha + a_{12}\sigma_\beta + a_{16}\tau_{\alpha\beta} &= \varepsilon_1 - a_{13}P_1 \\
a_{12}\sigma_\alpha + a_{22}\sigma_\beta + a_{26}\tau_{\alpha\beta} &= \varepsilon_2 - a_{23}P_1 \\
a_{16}\sigma_\alpha + a_{26}\sigma_\beta + a_{66}\tau_{\alpha\beta} &= \omega - a_{36}P_1
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Систему (4.4), разрешая относительно напряжений, окончательно найдем

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha &= B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{16}\omega - K_1\left\{\frac{Z_1}{2} + \frac{h}{8}\frac{1}{AB}[(BX_2)_{,\alpha} + (AY_2)_{,\beta}]\right\} \\
\sigma_\beta &= B_{22}\varepsilon_2 + B_{12}\varepsilon_1 + B_{26}\omega - K_2\left\{\frac{Z_1}{2} + \frac{h}{8}\frac{1}{AB}[(BX_2)_{,\alpha} + (AY_2)_{,\beta}]\right\} \\
\tau_{\alpha\beta} &= B_{66}\omega + B_{16}\varepsilon_1 + B_{26}\varepsilon_2 - K_6\left\{\frac{Z_1}{2} + \frac{h}{8}\frac{1}{AB}[(BX_2)_{,\alpha} + (AY_2)_{,\beta}]\right\}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь ε_i, ω, согласно (3.8)

$$K_i = B_{i1}a_{13} + B_{i2}a_{23} + B_{i6}a_{36} \tag{4.6}$$

$$B_{11} = (a_{22}a_{66} - a_{26}^2)\,\Omega^{-1}, \qquad B_{16} = (a_{12}a_{26} - a_{22}a_{16})\,\Omega^{-1}$$

$$B_{22} = (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)\,\Omega^{-1}, \qquad B_{26} = (a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26})\,\Omega^{-1}$$
$$B_{66} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\,\Omega^{-1}, \quad B_{12} = (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66})\,\Omega^{-1}$$
$$\Omega = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\,a_{66} + 2a_{12}a_{16}a_{26} - a_{11}a_{26}^2 - a_{22}a_{16}^2 \tag{4.7}$$

Рассматривая (4.5), замечаем, что полученные таким образом напряжения σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$ по толщине оболочки не изменяются, т. е. исходное условие безмоментности оболочки обеспечено.

Из изложенного здесь хода получения формул для напряжений видно, что условия (3.11) — (3.14) достаточны для обеспечения безмоментного напряженного состояния оболочки.

Однако условия (3.11) — (3.14), обеспечивающие безмоментность оболочки, могут быть заменены смягченными условиями, которые обеспечат безмоментность оболочки с некоторым приближением.

Смягченные условия можно получить предполагая, что те части напряжений σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$, которые изменяются по толщине оболочки, пренебрежимо малы по сравнению с теми частями напряжений, которые не изменяются по толщине.

Из (4.1) — (4.3) легко получить смягченные условия безмоментности

$$\Big|\Big\{\gamma\Big[L_1(w) + \frac{1}{2A}F_{1,\alpha} + \frac{1}{2AB}A_{,\beta}Q_1 + k_1P_1^* - a_{13}\frac{Z_2}{h}\Big] +$$
$$+\gamma^2\Big[\frac{1}{2}L_1(P_1^*) + \frac{1}{2Ah}F_{2,\alpha} + \frac{1}{2ABh}A_{,\beta}Q_2 + k_1\frac{a_{33}}{2}P_2 +$$
$$+\frac{a_{13}}{2h}Z_2^*\Big] + \gamma^3\Big[\frac{a_{33}}{6h}L_1(Z_2) - k_1\frac{a_{33}}{6h}Z_2^*\Big] -$$
$$-\gamma^4\frac{a_{33}}{24h}L_1(Z_2^*)\Big\}[\varepsilon_1 - a_{13}P_1]^{-1}\Big| \leqslant |(k_ih)^m|$$

$$\Big|\Big\{\gamma\Big[L_2(w) + \frac{1}{2B}Q_{1,\beta} + \frac{1}{2AB}B_{,\alpha}F_1 + k_2P_1^* - a_{23}\frac{Z_2}{h}\Big] +$$
$$+\gamma^2\Big[\frac{1}{2}L_2(P_1^*) + \frac{1}{2Bh}Q_{2,\beta} + \frac{1}{2ABh}B_{,\alpha}F_2 + k_2\frac{a_{33}}{2}P_2 +$$
$$+\frac{a_{23}}{2h}Z_2^*\Big] + \gamma^3\Big[\frac{a_{33}}{6h}L_2(Z_2) - k_2\frac{a_{33}}{6h}Z_2^*\Big] -$$
$$-\gamma^4\frac{a_{33}}{24h}L_2(Z_2^*)\Big\}[\varepsilon_2 - a_{23}P_1]^{-1}\Big| \leqslant |(k_ih)^m|$$

$$\Big|\Big\{\gamma\Big[2L_3(w) + \frac{A}{2B}\Big(\frac{F_1}{A}\Big)_{,\beta} + \frac{B}{2A}\Big(\frac{Q_1}{B}\Big)_{,\alpha} - a_{36}\frac{Z_2}{h}\Big] +$$
$$+\gamma^2\Big[L_3(P_1^*) + \frac{A}{2Bh}\Big(\frac{F_2}{A}\Big)_{,\beta} + \frac{B}{2Ah}\Big(\frac{Q_2}{B}\Big)_{,\alpha} + a_{36}\frac{Z_2^*}{2h}\Big] +$$
$$+\gamma^3\frac{a_{33}}{3h}L_3(Z_2) - \gamma^4\frac{a_{33}}{12h}L_3(Z^*)\Big\}[\omega - a_{36}P_1]^{-1}\Big| \leqslant |(k_ih)^m| \tag{4.8}$$

где m — число, характеризующее степень требуемой точности.

5. Заслуживает внимания безмоментная теория анизотропных оболочек в предположении, что нормальное перемещение u_γ не зависит от координаты γ.

Присоединим к основному предположению (1.2) новое допущение, которое аналитически представляется следующим образом:

$$e_\gamma = u_{\gamma,\gamma} = 0, \qquad u_\gamma = w(\alpha,\ \beta) \tag{5.1}$$

В новой постановке статическая часть задачи не претерпевает никаких изменений, т. е. внутренние силы будут определяться согласно (2.3), а напряжения по формулам (1.2), (2.4), (4.5). Значительно упрощаются формулы и уравнения для перемещений.

Поступая обычным образом, для тангенциальных перемещений получим

$$
\begin{aligned}
u_\alpha &= u - \frac{\gamma}{A} w_{,\alpha} + a_{55}\left(\frac{\gamma}{2} X_1 + \frac{\gamma^2}{2h} X_2\right) + a_{45}\left(\frac{\gamma}{2} Y_1 + \frac{\gamma^2}{2h} Y_2\right) \qquad (5.2)\\
u_\beta &= v - \frac{\gamma}{A} w_{,\beta} + a_{44}\left(\frac{\gamma}{2} Y_1 + \frac{\gamma^2}{2h} Y_2\right) + a_{45}\left(\frac{\gamma}{2} X_1 + \frac{\gamma^2}{2h} X_2\right)
\end{aligned}
$$

Далее для неиспользованных еще компонент деформаций получим более упрощенные представления

$$
\begin{aligned}
e_\alpha &= \varepsilon_1 + \gamma\left[L_1(w) + \frac{1}{2A} F_{1,\alpha} + \frac{1}{2AB} A_{,\beta} Q_1\right] + \gamma^2\left[\frac{1}{2Ah} F_{2,\alpha} + \frac{1}{2ABh} A_{,\beta} Q_2\right]\\
e_\beta &= \varepsilon_2 + \gamma\left[L_2(w) + \frac{1}{2B} Q_{1,\beta} + \frac{1}{2AB} B_{,\alpha} F\right] +\\
&\quad + \gamma^2\left[\frac{1}{2Bh} Q_{2,\beta} + \frac{1}{2ABh} B_{,\alpha} F_2\right] \qquad (5.3)\\
e_{\alpha\beta} &= \omega + \gamma\left[L_3(w) + \frac{A}{2B}\left(\frac{F_1}{A}\right)_{,\beta} + \frac{B}{2A}\left(\frac{Q_1}{B}\right)_{,\alpha}\right] +\\
&\quad + \gamma^2\left[\frac{A}{2Bh}\left(\frac{F_2}{A}\right)_{,\beta} + \frac{B}{2Ah}\left(\frac{Q_2}{B}\right)_{,\alpha}\right]
\end{aligned}
$$

Сравнивая (5.2) и (5.3) соответственно с (3.5) и (3.6), заметим существенное упрощение новых представлений, заключающееся в том, что здесь отсутствуют все члены с множителями γ выше второй степени. Несколько упрощены и коэффициенты при γ низших степеней.

Согласно (1.1) и (5.3), с учетом (1.2), (2.4) — (2.6) и (3.7), получим три уравнения для определения искомых перемещений и две группы соотношений, удовлетворение которых обеспечивает безмоментность оболочки.

Уравнения для определения перемещений ничем не отличаются от ранее полученных уравнений общего случая, т. е. от (3.10).

Однако, принимая (5.1), тем самым несколько смягчаем условия (3.11)—(3.14), здесь в замен четырех групп соотношений безмоментности получаем две, более простые группы соотношений безмоментности:

первая группа

$$
\begin{aligned}
L_1(w) &= a_{13}\frac{Z_2}{h} - \frac{1}{2A} F_{1,\alpha} - \frac{1}{2AB} A_{,\beta} Q_1\\
L_2(w) &= a_{23}\frac{Z_2}{h} - \frac{1}{2B} Q_{1,\beta} - \frac{1}{2AB} B_{,\alpha} F_1 \qquad (5.4)\\
2L_3(w) &= a_{36}\frac{Z_2}{h} - \frac{1}{2}\frac{B}{A}\left(\frac{Q_1}{B}\right)_{,\alpha} - \frac{1}{2}\frac{A}{B}\left(\frac{F_1}{A}\right)_{,\beta}
\end{aligned}
$$

вторая группа

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{A} F_{2,\alpha} + \frac{1}{AB} A_{,\beta} Q_2 = -a_{13} Z_2^*\\
&\frac{1}{B} Q_{2,\beta} + \frac{1}{AB} B_{,\alpha} F_2 = -a_{23} Z_2^* \qquad (5.5)\\
&\frac{A}{B}\left(\frac{F_2}{A}\right)_{,\beta} + \frac{B}{A}\left(\frac{Q_2}{B}\right)_{,\alpha} = -a_{36} Z_2^*
\end{aligned}
$$

Упрощаются также смягченные условия безмоментности, здесь взамен (4.8), имеем

$$\left|\left\{\gamma\left[L_1(w)+\frac{1}{2A}F_{1,\alpha}+\frac{1}{2AB}A_{,\beta}Q_1-a_{13}\frac{Z_2}{h}\right]+\gamma^2\left[\frac{a_{13}}{2h}Z_2^*+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{1}{2Ah}F_{2,\alpha}+\frac{1}{2ABh}A_{,\beta}Q_2\right]\right\}[\varepsilon_1-a_{13}P]^{-1}\right|\leqslant|(k_ih)^m|$$
$$\left|\left\{\gamma\left[L_2(w)+\frac{1}{2B}Q_{1,\beta}+\frac{1}{2AB}B_{,\alpha}F_1-a_{23}\frac{Z_2}{h}\right]+\gamma^2\left[\frac{a_{23}}{2h}Z_2^*+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{1}{2Bh}Q_{2,\beta}+\frac{1}{2ABh}B_{,\alpha}F_2\right]\right\}[\varepsilon_2-a_{23}P_1]^{-1}\right|\leqslant|(k_ih)^m| \qquad (5.6)$$
$$\left|\left\{\gamma\left[2L_3(w)+\frac{A}{2B}\left(\frac{F_1}{A}\right)_{,\beta}+\frac{B}{2A}\left(\frac{Q_1}{B}\right)_{,\alpha}-a_{36}\frac{Z_2}{h}\right]+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\gamma^2\left[\frac{A}{2Bh}\left(\frac{F_2}{A}\right)_{,\beta}+\frac{B}{2Ah}\left(\frac{Q_2}{B}\right)_{,\alpha}+a_{36}\frac{Z_2^*}{2h}\right]\right\}[\omega-a_{36}P_1]^{-1}\right|\leqslant|(k_ih)^m|$$

6. Для иллюстрации рассмотрим один примитивный пример.

Замкнутая круговая цилиндрическая оболочка ($k_1=0,\ k_2=1/R_2=1/R$, $A=1,\ B=1$, длиною l) по торцам, перпендикулярным к оси вращения, закреплена так, что

$$u=0,\quad v=0\quad(\alpha=0)$$
$$T_1=0,\quad S=0\quad(\alpha=l) \qquad (6.1)$$

Оболочка загружена так, что

$$X^+=p\alpha,\quad X^-=0,\quad Z^+=-q,\quad Z^-=0,\quad Y^+=Y^-=0 \qquad (6.2)$$

тогда из (2.4) — (2.6) для грузовых членов получим

$$X_1=X_2=p\alpha,\quad Z_1=Z_2=-q,\quad Y_1=Y_2=0 \qquad (6.3)$$
$$Z_1^*=Z_2^*=p,\quad P_1={}^1/_8hp-{}^1/_2q,\quad P_2=-{}^1/_2q,\quad P_3=-{}^1/_2p/h$$

Решая систему уравнений (2.3), с учетом (6.1) — (6.3), для тангенциальных сил получим

$$T_1={}^1/_2p\,(l^2-\alpha^2),\quad S=0,\quad T_2=R\,({}^1/_2hp-q) \qquad (6.4)$$

Из (1.2), (2.4) в силу (6.2) — (6.4) для напряжений имеем

$$\sigma_\alpha=\frac{p}{2h}(l^2-\alpha^2),\quad \sigma_\beta=\frac{R}{h}\left(\frac{h}{2}p-q\right),\quad \tau_{\alpha\beta}=0 \qquad (6.5)$$
$$\tau_{\alpha\gamma}=p\alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{h}\right),\quad \tau_{\beta\gamma}=0,\quad \sigma_\gamma=\left(\frac{h}{8}p-\frac{q}{2}\right)-\gamma\frac{q}{2}-\gamma^2\frac{p}{2h}$$

Очевидно, все эти напряжения для анизотропной оболочки могут представить расчетный интерес.

Решая систему уравнений (3.10) с учетом (6.1), (6.3), (6.4), для перемещений $u(\alpha)$, $v(\alpha)$, $w(\alpha)$ получим

$$u=a_{11}\frac{P}{2h}\left(l\alpha^2-\frac{\alpha^3}{3}\right)+a_{12}\frac{R}{h}\left(\frac{h}{2}p-q\right)\alpha-a_{13}\left(\frac{q}{2}-\frac{h}{8}p\right)\alpha \qquad (6.6)$$
$$v=a_{16}\frac{P}{2h}\left(l\alpha^2-\frac{\alpha^3}{3}\right)+a_{26}\frac{R}{h}\left(\frac{h}{2}p-q\right)\alpha-a_{36}\left(\frac{q}{2}-\frac{h}{8}p\right)\alpha$$
$$w=a_{12}\frac{PR}{2h}(l^2-\alpha^2)+a_{22}\frac{R^2}{h}\left(\frac{h}{2}p-q\right)-a_{23}R\left(\frac{q}{2}-\frac{h}{8}p\right)$$

Рассматривая (6.5) и (6.6), замечаем, что в новой постановке безмоментной теории, в оболочке могут проявляться расчетные напряжения и перемещения, которые происходят от учета явлений, связанных с поперечными механическими характеристиками оболочки.

В рассматриваемом случае условия безмоментности (6.5) и (5.5), согласно (3.7), (3.9), (6.2), (6.3), запишутся следующим образом:

$$-a_{12}\frac{pR}{h}+a_{55}\frac{p}{2}+a_{13}\frac{q}{h}=0,\qquad a_{23}\frac{q}{h}=0,\qquad a_{33}\frac{q}{h}+a_{45}\frac{p}{2}=0 \tag{6.7}$$

$$a_{55}p+a_{13}p=0,\qquad a_{23}p=0,\qquad a_{45}p+a_{36}p=0 \tag{6.8}$$

Из (6.7) и (6.8) нетрудно установить те значения геометрических, силовых и физических характеристик оболочки, при которых будет обеспечено безмоментное состояние оболочки.

Пусть, например, $p=0$, $q\neq 0$, тогда условия (6.7) и (6.8) примут вид

$$a_{13}\frac{q}{h}=0,\qquad a_{23}\frac{q}{h}=0,\qquad a_{36}\frac{q}{h}=0 \tag{6.9}$$

Тогда для обеспечения безмоментности достаточно, чтобы $a_{13}=a_{23}=a_{36}=0$ (условие $h\to\infty$, по очевидным причинам не обсуждается). В этом случае из (6.6) для перемещений получим

$$u=-a_{12}\frac{qR}{h}\alpha,\qquad v=-a_{26}\frac{qR}{h}\alpha,\qquad w=-a_{22}\frac{qR^2}{h} \tag{6.10}$$

Приведенные здесь значения перемещений (6.10) совпадают с соответствующими перемещениями, полученными по классической теории [1]. Так и должно быть. Принимая $a_{13}=a_{23}=a_{36}=0$, по сути дела пренебрегаем нормальными напряжениями σ_γ в процессе определения перемещений, а это, в совокупности с принятыми выше исходными предположениями, составляет комплект исходных гипотез классической теории.

Наконец укажем, что смягченные условия безмоментности (5.6) в обсужденном примере ($p=0$, $q\neq 0$) удовлетворяются, если, например, $a_{13}/a_{12}<1$, $a_{23}/a_{22}<1$, $a_{36}/a_{26}<1$ (при $m=1$).

Поступила 13 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
2. Мовсисян Л. А. О некоторых специфических особенностях анизотропных оболочек. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. н., 1958, т. 11, № 4.
3. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
4. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
5. Тарнопольский Ю. М., Розе А. В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. Рига, «Зинатне», 1969.