Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

О БИФУРКАЦИИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТРЕХМЕРНОГО УПРУГОГО ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА ПРИ БОЛЬШИХ ДОКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. Н. Гузь

(Киев)

Общие вопросы и вывод трехмерных линеаризированных уравнений при произвольных докритических деформациях (линеаризированных уравнений равновесия в напряжениях) рассмотрены в ряде работ [1–11]. При выводе линеаризированных уравнений в перемещениях при произвольных докритических деформациях и при решении задач для трехмерного упругого изотропного тела в большинстве работ применяются частные формы упругого потенциала [3,9,12–16], для некоторых из них построены общие решения в случае однородных докритических состояний [3,14]. Линеаризированные уравнения в перемещениях для произвольной формы упругого потенциала получены в работе [8], при таком подходе рассмотрено ряд задач [8,17,18].

Ниже, следуя [4], рассмотрены трехмерные линеаризированные уравнения в напряжениях, причем в качестве характеристик деформации выбраны компоненты тензора конечной деформации Грина. Для произвольной формы упругого потенциала получены линеаризированные уравнения в перемещениях. В частном случае однородных докритических состояний простроены общие решения, выраженные через решения уравнений второго порядка, для тела с произвольным контуром поперечного сечения. Исходя из общих решений получены характеристические уравнения для ряда задач при произвольной форме упругого потенциала. Приведены некоторые принятые в литературе формы упругого потенциала. Рассмотрены числовые примеры.

1. Постановка задач и метод исследования. Уравнения равновесия при произвольных деформациях в лагранжевых координатах, которые до деформации совпадают с декартовыми, имеют [4] вид

$$[\sigma_{in}^* (\delta_{mn} + u_{m,n})]_{,i} = 0 \quad (i, m = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

Граничные условия можем записать [4] в форме

$$N_i \sigma_{in}^* (\delta_{mn} + u_{m,n}) = P_m^* \tag{1.2}$$

Здесь N_i — орты нормали к поверхности тела до деформации, P_m^* — составляющие по осям декартовой системы координат вектора внешних сил, действующих в той же точке поверхности тела после деформации, но отнесенные к единице площади до деформации. Другие величины можно представить так

$$\sigma_{ij}^* = \frac{S_i^*}{S_i} \frac{\sigma_{ij}}{1 + E_j}, \quad \frac{S_i^*}{S_i} = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{nn})(1 + 2\varepsilon_{mm}) - (2\varepsilon_{nm})^2}$$
$$1 + E_j = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{jj}}, \quad 2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + u_{s,i} u_{s,j} \tag{1.3}$$

В (1.3) по i, j, n, m не суммировать; i, n, m составляют четную перестановку из 1, 2, 3; σ_{ij}^* — обобщенные напряжения [4], σ_{ij} — физические составляющие тензора напряжений, E_j — удлинения; S^*_N / S_N — изменение площади площадки, определяемой ортом N; ε_{ij} — компоненты тензора конечной деформации.

Обобщенные напряжения σ_{ij}^*, согласно [2,19,4], определяются через упругий потенциал Φ следующим образом:

$$\sigma_{ij}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ji}}\right)\Phi \tag{1.4}$$

Примем, что упругий потенциал есть дважды непрерывно дифференцируемая функция от трех независимых алгебраических инвариантов

$$\Phi = \Phi(I_1, I_2, I_3), \quad I_1 = \varepsilon_{nn}, \quad I_2 = \varepsilon_{nm}\varepsilon_{mn}, \quad I_3 = \varepsilon_{np}\varepsilon_{pm}\varepsilon_{mn} \tag{1.5}$$

В результате можем записать

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}^* = \psi_0(I_1, I_2, I_3)\,\delta_{ij} + \psi_1(I_1, I_2, I_3)\,\varepsilon_{ij} + \psi_2(I_1, I_2, I_3)\,\varepsilon_{in}\varepsilon_{nj} \\ \psi_0 = \partial\Phi/\partial I_1, \qquad \psi_1 = 2\partial\Phi/\partial I_2, \qquad \psi_2 = 3\partial\Phi/\partial I_3\end{gathered} \tag{1.6}$$

Первое выражение (1.6) можно получить из соотношений [20] между двумя соосными симметричными тензорами второго ранга.

Линеаризируем соотношения (1.1) — (1.6), следуя [4]. Для этого представим все величины в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{in}^{*\prime} = \sigma_{in}^{0*\circ} + \sigma_{in}^{*}, \qquad u_i' = u_i^\circ + u_i, \qquad \varepsilon_{ij}' = \varepsilon_{ij}^\circ + \varepsilon_{ij} \\ I_k' = I_k^\circ + I_k, \ldots, \quad P_m^{*\prime} = P_m^{*\circ} + P_m^{*}\end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь верхним индексом $^\circ$ обозначены все величины невозмущенного состояния, которые определяют из соотношений (1.1) — (1.6), возмущения не отмечены индексом.

В результате линеаризации получаем уравнения

$$[\sigma_{in}^{*}(\delta_{nm} + u^\circ_{m,n}) + \sigma_{in}^{*\circ} u_{m,n}]_{,i} = 0 \tag{1.8}$$

и граничные условия

$$N_i\,[\sigma_{in}^*(\delta_{nm} + u^\circ_{m,n}) + \sigma_{in}^{*\circ} u_{m,n}] = P_m^* \tag{1.9}$$

Линеаризированные соотношения (1.6) принимают вид

$$\sigma_{ij}^* = I_k A_{kij} + B\varepsilon_{ij} + C_{in}\varepsilon_{nj} + D_{nj}\varepsilon_{in} \tag{1.10}$$

В (1.10) введены обозначения

$$\begin{gathered}A_{kij} = \delta_{ij}\frac{\partial\psi_0^\circ}{\partial I_k^\circ} + \varepsilon_{ij}^\circ\frac{\partial\psi_1^\circ}{\partial I_k^\circ} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{in}\overset{\circ}{\varepsilon}_{nj}\frac{\partial\psi_2^\circ}{\partial I_k^\circ}, \qquad C_{in} = \varepsilon_{in}^\circ\psi_2^\circ \\ D_{nj} = \varepsilon_{nj}^\circ\psi_2^\circ, \qquad B = \psi_1^\circ, \qquad I_1 = \varepsilon_{nn}, \qquad I_2 = 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{nm}\varepsilon_{mn} \\ I_3 = 3\varepsilon_{nm}\overset{\circ}{\varepsilon}_{np}\overset{\circ}{\varepsilon}_{pm}, \qquad 2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + \overset{\circ}{u}_{s,i}u_{s,j} + u_{s,i}\overset{\circ}{u}_{s,j}\end{gathered} \tag{1.11}$$

Подставляя (1.10) и (1.11) в (1.8) и (1.9), получаем уравнения и граничные условия задачи о бифуркации состояния равновесия трехмерного упругого изотропного тела при произвольных докритических деформациях для произвольной формы упругого потенциала, при этом необходимо учитывать представления величин ψ_i через упругий потенциал (1.6).

Необходимо отметить, что обобщенные напряжения $\sigma_{in}{}^{*\circ}$ на поверхности тела определяются через $P_m{}^{*\circ}$ следующим образом:

$$N_i \sigma_{in}^{*\circ} (\delta_{mn} + \overset{\circ}{u}_{m,\,n}) = P_m^{*\circ} \tag{1.12}$$

Перейдем к рассмотрению однородных докритических состояний.

2. Общие решения для однородных докритических состояний. Рассмотрим случай, когда докритическое состояние определяется следующими перемещениями:

$$u_m{}^\circ = \delta_{im} (\lambda_i - 1) x_i, \quad E_i{}^\circ = \lambda_i - 1, \quad \lambda_i = \text{const} \tag{2.1}$$

Из (1.6) и (2.1) следует, что докритическое состояние трехосное

$$\sigma_{mm}^{*\circ} \lambda_m = P_m{}^{*\circ}, \quad \sigma_{im}^{*\circ} = 0, \quad i \neq m \tag{2.2}$$

Для определения величин $\sigma_{mm}{}^{*\circ}$ из (1.6) получаем выражение

$$\sigma_{mm}^{*\circ} = \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial I_1{}^\circ} + (\lambda_m{}^2 - 1) \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial I_2{}^0} + 3 \left(\frac{\lambda_m{}^2 - 1}{2} \right)^2 \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial I_3{}^\circ} \tag{2.3}$$

В соотношениях (2.2) и (2.3) по m не суммировать.

Согласно (2.1), (1.3) и (1.5), получаем значения величин докритического состояния, а согласно (2.1) и (1.11) — значения возмущений

$$2\varepsilon_{ij}{}^\circ = \delta_{ij} (\lambda_i{}^2 - 1), \quad I_1{}^\circ = {}^1/_2 (\lambda_n \lambda_n - 3), \quad I_2{}^\circ = {}^1/_4 (\lambda_n{}^2 - 1)(\lambda_n{}^2 - 1) \tag{2.4}$$
$$I_3{}^\circ = {}^1/_8 (\lambda_n{}^2 - 1)(\lambda_n{}^2 - 1)(\lambda_n{}^2 - 1)$$

$$2\varepsilon_{ij} = \lambda_i u_{i,\,j} + \lambda_j u_{j,\,i}, \quad I_1 = \lambda_n u_{n,\,n}, \quad I_2 = (\lambda_n{}^2 - 1) \lambda_n u_{n,\,n} \tag{2.5}$$
$$I_3 = {}^3/_4 (\lambda_n{}^2 - 1)^2 \lambda_n u_{n,\,n}, \qquad n = 1, 2, 3$$

Учитывая выражения (2.1) и (2.2), уравнения (1.8) и граничные условия (1.9) принимают следующий вид:

$$[\sigma_{im}^{*} \lambda_m + \sigma_{ii}^{*\circ} u_{m,\,i}]_{,\,i} = 0 \tag{2.6}$$

$$N_i [\sigma_{im}^{*} \lambda_m + \sigma_{ii}^{*\circ} u_{m,\,i}] = P_m{}^* \tag{2.7}$$

Учитывая соотношения (1.6), (1.10), (1.11), (2.1), (2.4) и (2.5), получаем выражение

$$\sigma_{ij}{}^* = \delta_{ij} a_{ik} \lambda_k u_{k,\,k} + (1 - \delta_{ij}) G_{ij} (\lambda_i u_{i,\,j} + \lambda_j u_{j,\,i}) \tag{2.8}$$

Здесь введены обозначения

$$a_{ik} = \left[\frac{\partial^2\Phi^\circ}{\partial I_1^\circ \partial I_t^\circ} + (\lambda_i^2 - 1)\frac{\partial^2\Phi^\circ}{\partial I_2^\circ \partial I_t^\circ} + 3\left(\frac{\lambda_i^2-1}{2}\right)^2 \frac{\partial^2\Phi^\circ}{\partial I_3^\circ \partial I_t^\circ}\right] \times$$

$$\times \left[\delta_{t1} + (\lambda_k^2 - 1)\delta_{t2} + 3\left(\frac{\lambda_k^2-1}{2}\right)^2 \delta_{t3}\right] + \delta_{ik}\left[2\frac{\partial\Phi^\circ}{\partial I_2^\circ} + 3(\lambda_k^2 - 1)\frac{\partial\Phi^\circ}{\partial I_3^\circ}\right],$$

$$G_{ij} = \frac{1}{2}\left[2\frac{\partial\Phi^\circ}{\partial I_2^\circ} + 3\frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - 2}{2}\frac{\partial\Phi^\circ}{\partial I_3^\circ}\right] \qquad (2.9)$$

Из выражений (2.8) и (2.9) следует, что в общем случае матрица $\|b_{ik}\|$ ($b_{ik} = a_{ik}\lambda_k$) несимметрична, следовательно, соотношения между приращениями (возмущениями) обобщенных напряжений и производными от приращений (возмущений) перемещений не совпадают с соответствующими соотношениями закона Гука для ортотропного тела при малых деформациях.

Подставляя соотношения (2.8) в уравнения (2.6), получаем основные уравнения в перемещениях

$$L_{mj}u_j = 0 \qquad (j, m = 1, 2, 3) \qquad (2.10)$$

Здесь

$$L_{mj} = a_{mj}\lambda_j \frac{\partial}{\partial x_m \partial x_j} + (1 - \delta_{jm})G_{jm}\lambda_j \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_j} +$$

$$+ (1 - \delta_{im})G_{im}\delta_{jm}\lambda_j \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\sigma_{ii}^{*\circ}}{\lambda_j}\delta_{jm}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \qquad (2.11)$$

Решение системы уравнений (2.10) представим в виде одной из трех форм или в виде их линейной комбинации

$$u_i^{(j)} = \frac{\partial \det\|L_{rs}\|}{\partial (L_{ji})}\Phi^{(j)} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \qquad (2.12)$$

В выражении (2.12) по j не суммировать.

Функции $\Phi^{(j)}$ определяются из уравнения

$$\det\|L_{rs}\|\,\Phi^{(j)} = 0 \qquad (2.13)$$

Подставляя выражение (2.8) в граничные условия (2.7), выводим граничные условия в перемещениях, их приводить не будем.

Величину $P^\circ_m\,(S_m^* \,/\, S_m)^\circ$ (по m не суммировать) можно рассматривать как интенсивность поверхностной нагрузки, отнесенной к единице площади в теле до деформации. Обозначим ее через T_{mm}°. В результате получаем

$$T_{mm}^\circ = \sigma_{mm}^{*\circ}\lambda_m \qquad (\text{по } m \text{ не суммировать}) \qquad (2.14)$$

Соотношения (2.3) и (2.14) полезны при решении частных задач.

Исследуем случай, когда выполняются равенства

$$\sigma_{11}^{*\circ} = \sigma_{22}^{*\circ} \neq 0, \qquad \sigma_{33}^{*\circ} \neq 0 \tag{2.15}$$

или, что тождественно

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0, \qquad \lambda_3 \neq 0 \tag{2.16}$$

Из (2.9) видим, что тогда выполняются равенства

$$a_{11} \equiv a_{22}, \quad a_{13} \equiv a_{23}, \quad 2G_{12} = a_{11} - a_{12}, \quad a_{ij} \equiv a_{ji} \tag{2.17}$$

Принимая во внимание (2.17), решение уравнения (2.13) представим в виде

$$\Phi^{(j)} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \zeta_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\Phi_i = 0 \quad \text{по } i \text{ не суммировать.} \tag{2.18}$$

Величины $\zeta^2{}_i$ являются корнями кубического уравнения, в виду громоздкости его приводить не будем. В результате решения уравнения получаем значения корней

$$\zeta_1^2 = \frac{G_{13} + \sigma_{33}^{*\circ}\lambda_1^{-2}}{G_{12} + \sigma_{11}^{*\circ}\lambda_1^{-2}}, \qquad \zeta_{2,3}^2 = C \pm \left[C^2 - \frac{(a_{33} + \sigma_{33}^{*\circ}\lambda_3^{-2})(G_{13} + \sigma_{33}^{*\circ}\lambda_1^{-2})}{(a_{11} + \sigma_{11}^{*\circ}\lambda_1^{-2})(G_{13} + \sigma_{11}^{*\circ}\lambda_3^{-2})}\right]^{1/2}$$

$$2C = \frac{a_{33} + \sigma_{33}^{*\circ}\lambda_3^{-2}}{G_{13} + \sigma_{11}^{\circ}\lambda_3^{-2}} + \frac{G_{13} + \sigma_{33}^{*\circ}\lambda_1^{-2}}{a_{11} + \sigma_{11}^{*\circ}\lambda_1^{-2}} - \frac{(a_{13} + G_{13})^2}{(a_{11} + \sigma_{11}^{*\circ}\lambda_1^{-2})(G_{13} + \sigma_{11}^{*\circ}\lambda_3^{-2})} \tag{2.19}$$

Для определения перемещений поступим следующим образом. Положим в (2.12) и (2.18)

$$\Phi^{(1)} = \Phi_1, \quad \Phi^{(2)} = \Phi_1, \quad \Phi^{(3)} = \Phi_2 + \Phi_3, \quad u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)} + u_i^{(3)} \tag{2.20}$$

и введем функции Ψ_i, которые будут решениями уравнений (2.18) и связаны с функциями Φ_i соотношениями

$$\Psi_1 = (a_{12} + G_{12})(G_{13} + \sigma_{11}^{*\circ}\lambda_3^{-2})\lambda_1\lambda_3\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{a_{33} + \sigma_{33}^{*\circ}\lambda_3^{-2}}{G_{13} + \sigma_{11}^{*\circ}\lambda_3^{-2}} - \frac{(a_{13} + G_{13})^2}{(a_{12} + G_{12})(G_{13} + \sigma_{11}^{*\circ}\lambda_3^{-2})}\right]\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right\}\Phi_1 \tag{2.21}$$

$$\Psi_i = (a_{13} + G_{13})(G_{12} + \sigma_{11}^{*\circ}\lambda_1^{-2})\lambda_1\lambda_3\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \zeta_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\Phi_i \qquad (i = 2, 3)$$

В результате из выражений (2.11), (2.12), (2.17) — (2.21) получаем

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}\Psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}(\Psi_2 + \Psi_3), \qquad u_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1}\Psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}(\Psi_2 + \Psi_3) \tag{2.22}$$

$$u_3 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}\,\frac{a_{11} + \sigma_{11}^{*\circ}\lambda_1^{-2}}{a_{13} + G_{13}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{G_{13} + \sigma_{33}^{*\circ}\lambda_1^{-2}}{a_{11} + \sigma_{11}^{*\circ}\lambda_1^{-2}}\,\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)(\Psi_2 + \Psi_3)$$

Для криволинейного контура поперечного сечения общие решения (2.22) принимают вид

$$u_n = \frac{\partial}{\partial s}\Psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial n\partial x_3}(\Psi_2+\Psi_3), \quad u_s = -\frac{\partial}{\partial n}\Psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial s\partial x_3}(\Psi_2+\Psi_3) \tag{2.23}$$

$$u_3 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}\frac{a_{11}+\sigma_{11}^{*\circ}\lambda_1^{-2}}{a_{13}+G_{13}}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left[\left(\frac{G_{13}+\sigma_{33}^{*\circ}\lambda_1^{-2}}{a_{11}+\sigma_{11}^{*\circ}\lambda_1^{-2}}-\zeta_2^2\right)\Psi_2 + \left(\frac{G_{13}+\sigma_{33}^{*\circ}\lambda_1^{-2}}{a_{11}+\sigma_{11}^{*\circ}\lambda_1^{-2}}-\zeta_3^2\right)\Psi_3\right]$$

Здесь u_n — перемещение вдоль нормали, u_s — перемещение вдоль касательной.

Запишем граничные условия на цилиндрической поверхности для криволинейного контура, когда ось Ox_3 совпадает с осью цилиндра. Из выражений (2.7) после ряда преобразований получаем

$$\lambda_1^2(a_{11}+\sigma_{11}^{*\circ}\lambda_1^{-2})(u_{n,n}-u_1N_{1,n}-u_2N_{2,n})+\lambda_1^2a_{12}(u_{s,s}-u_2N_{1,s}+u_1N_{2,s})+$$
$$+\lambda_1\lambda_3a_{13}u_{3,3}=P_n^*, \quad \lambda_1^2G_{12}[(1+\sigma_{11}^{*\circ}\lambda_1^{-2}G_{12}^{-1})(u_{s,n}+u_1N_{2,n}- \tag{2.24}$$
$$-u_2N_{1,n})+u_{n,s}-u_1N_{1,s}-u_2N_{2,s}]=P_s^*, \quad G_{13}[\lambda_1\lambda_3u_{n,3}+\lambda_3^2(1+$$
$$+\sigma_{11}^{*\circ}\lambda_3^{-2}G_{13}^{-1})u_{3,n}]=P_3^*, \; P_n^*=P_1^*N_1+P_2^*N_2, \; P_s^*=-P_1^*N_2+P_2^*N_1$$

Для круговой цилиндрической системы координат граничные условия (2.24) после преобразований принимают вид

$$\lambda_1^2(a_{11}+\sigma_{11}^{*\circ}\lambda_1^{-2})u_{r,r}+\lambda_1^2a_{12}(r^{-1}u_{\theta,\theta}+r^{-1}u_r)+\lambda_1\lambda_3a_{13}u_{3,3}=P_r^*$$
$$\lambda_1^2G_{12}[(1+\sigma_{11}^{*\circ}\lambda_1^{-2}G_{12}^{-1})u_{\theta,r}+r^{-1}u_{r,\theta}-r^{-1}u_\theta]=P_\theta^* \tag{2.25}$$
$$G_{13}[\lambda_1\lambda_3u_{r,3}+\lambda_3^2(1+\sigma_{11}^{*\circ}\lambda_3^{-2}G_{13}^{-1})u_{3,r}]=P_3^*$$

Запишем граничные условия при $x_3=\mathrm{const}$. Из (2.7) получаем

$$G_{13}[\lambda_1^2(1+\sigma_{33}^{*\circ}\lambda_1^{-2}G_{13}^{-1})u_{n,3}+\lambda_1\lambda_3u_{3,n}]=P_n^*$$
$$G_{23}[\lambda_1^2(1+\sigma_{33}^{*\circ}\lambda_1^{-2}G_{23}^{-1})u_{s,3}+\lambda_1\lambda_3u_{3,s}]=P_s^* \tag{2.26}$$
$$a_{13}\lambda_1\lambda_3\operatorname{div}\mathbf{u}+\lambda_3^2(a_{33}-a_{13}\lambda_1\lambda_3^{-1}+\sigma_{33}^{*\circ}\lambda_3^{-2})u_{3,3}=P_3^*$$

Необходимо отметить, что величины P_n^*, P_s^* и P_3^* условий (2.26) не совпадают с аналогичными величинами условий (2.24).

Рассмотрим случай плоской деформации в плоскости x_1x_3, когда $\sigma_{33}^{*\circ}\neq 0$, а $\sigma_{11}^{*\circ}=0$. В этом случае для возмущений имеем соотношения

$$\sigma_{11}^*=a_{11}\lambda_1u_{1,1}+a_{13}\lambda_3u_{3,3}, \quad \sigma_{13}^*=G_{13}(\lambda_1u_{1,3}+\lambda_3u_{3,1}) \tag{2.27}$$
$$\sigma_{33}^*=a_{31}\lambda_1u_{1,1}+a_{33}\lambda_3u_{3,3}, \quad \sigma_{13}^*\equiv\sigma_{31}^*$$

Перемещения определяются следующим образом:

$$u_1=\left[G_{13}\lambda_3\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+(a_{33}+\sigma_{33}^{*\circ}\lambda_3^{-2})\lambda_3\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right](\Psi_2+\Psi_3)$$
$$u_3=-\lambda_1(a_{13}+G_{13})\frac{\partial^2(\Psi_2+\Psi_3)}{\partial x_1\partial x_3} \tag{2.28}$$

Функции Ψ_i являются решениями уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \zeta_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\Psi_i = 0 \quad (i = 2, 3) \quad \text{по } i \text{ не суммировать} \tag{2.29}$$

Граничные условия при $x_1 = \text{const}$ имеют вид

$$\sigma_{11}^*\lambda_1 = P_1^*, \qquad \sigma_{13}^*\lambda_3 = P_3^* \tag{2.30}$$

Результаты, изложенные в этом параграфе, применим к решению ряда задач. Получим для этих задач характеристические уравнения для общего вида упругого потенциала.

Граничные условия в перемещениях записываются обычным образом.

При вычислении величин a_{ij} и G_{ij} по формулам (2.9) для плоской деформации необходимо ввести упрощения, свойственные плоской деформации.

§ 3. Характеристические уравнения. Рассмотрим устойчивость цилиндрической оболочки толщиной $2h$, длиной l и R — радиус срединной поверхности при сжатии вдоль образующей. В этом случае необходимо в (2.19), (2.23) и (2.25) везде положить $\overset{*\circ}{\sigma_{11}} = 0$, а $\overset{*\bullet}{\sigma_{33}}$ считать отрицательными. Для неосесимметричной формы потери устойчивости решения уравнений (2.18) выберем в форме

$$\Psi_1 = [A_{mn}^{11} I_n(\gamma\zeta_1 r) + A_{mn}^{12} K_n(\gamma\zeta_1 r)] \sin\gamma x_3 \sin n\theta, \quad \gamma = m\pi/l \tag{3.1}$$

$$\Psi_i = [A_{mn}^{i1} I_n(\gamma\zeta_i r) + A_{mn}^{i2} K_n(\gamma\zeta_i r)] \cos\gamma x_3 \cos n\theta \quad (i = 2,3)$$

При выборе решений в форме (3.1) на торцах оболочки будут выполняться условия шарнирного опирания. В (3.1) и ниже через I_n и K_n обозначены функции Бесселя чисто мнимого аргумента и функции Макдональда [21]. Подставляя (3.1) и (2.23) в граничные условия (2.25) при $P_r^* \equiv P_\theta^* \equiv P_3^* = 0$, в результате обычной процедуры получаем характеристическое уравнение в виде

$$\det \|\alpha_{ij}\| = 0 \qquad (i, j = 1,2, \ldots, 6) \tag{3.2}$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha_{11}(I_{n+1}, I_n) = \frac{2b_1 n\zeta_1}{\gamma(\varkappa+\varepsilon)} I_{n+1}[\zeta_1(\varkappa+\varepsilon)] + \frac{2b_1 n(n-1)}{\gamma(\varkappa+\varepsilon)^2} I_n[\zeta_1(\varkappa+\varepsilon)] \tag{3.3}$$

$$\alpha_{13}(I_{n+1}, I_n, \zeta_2) = -\frac{2b_1\zeta_2}{\varkappa+\varepsilon} I_{n+1}[\zeta_2(\varkappa+\varepsilon)] +$$
$$+\left[\zeta_2^2 + k_2 + \frac{2b_1 n(n-1)}{(\varkappa+\varepsilon)^2}\right] I_n[\zeta_2(\varkappa+\varepsilon)]$$

$$\alpha_{12} \equiv \alpha_{11}(-K_{n+1}, K_n), \quad \alpha_{14} \equiv \alpha_{13}(-K_{n+1}, K_n, \zeta_2), \quad \alpha_{15} \equiv \alpha_{13}(I_{n+1}, I_n, \zeta_3)$$

$$\alpha_{16} \equiv \alpha_{13}(-K_{n+1} K_n, \zeta_3), \quad \alpha_{31}(I_n) = \frac{b_1 n}{\gamma(\varkappa+\varepsilon)} I_n[\zeta_1(\varkappa+\varepsilon)], \quad \alpha_{32} \equiv \alpha_{31}(K_n)$$

$$\alpha_{33}(I_{n+1}, I_n, \zeta_2) = (\zeta_2^3 + k_1\zeta_2) I_{n+1}[\zeta_2(\varkappa+\varepsilon)] + \frac{n(\zeta_2^2 + k_1)}{\varkappa+\varepsilon} I_n[\xi_2(\varkappa+\varepsilon)]$$

$$\alpha_{53}(I_{n+1}, I_n, \zeta_2) = -\frac{2n\gamma\zeta_2}{\varkappa+\varepsilon} I_{n+1}[\zeta_2(\varkappa+\varepsilon)] + \frac{2n\gamma(1-n)}{(\varkappa+\varepsilon)^2} I_n[\zeta_2(\varkappa+\varepsilon)]$$

$$\alpha_{52} \equiv \alpha_{51}(-K_{n+1}, K_n), \qquad \alpha_{54} \equiv \alpha_{53}(-K_{n+1}, K_n, \zeta_2), \qquad \alpha_{55} \equiv \alpha_{53}(I_{n+1}, I_n, \zeta_3)$$

$$\alpha_{56} \equiv \alpha_{53}(-K_{n+1}, K_n, \zeta_3), \qquad \varkappa = m\pi R/l, \qquad \varepsilon = m\pi h/l$$

$$k_1 = (a_{13} - \sigma_{33}{}^{*\circ}\lambda_1{}^{-2})/a_{11}, \qquad k_2 = a_{13}(G_{13} + \sigma_{33}{}^{*\circ}\lambda_1{}^{-2})/a_{11}G_{13},$$

$$b_1 = G_{12}(a_{13} + G_{13})/a_{11}$$

Для определения элементов второй, четвертой и шестой строк необходимо соответственно в элементах первой, третьей и пятой строк изменить перед ε знак на противоположный. В случае осесимметричной формы потери устойчивости решения уравнений (2.18) выберем в форме

$$\Psi_1 \equiv 0, \quad \Psi_i = [A_{m0}^{i1} I(\gamma\zeta_i r) + A_{m0}^{i2} K(\gamma\zeta_i r)] \cos\gamma x_3 \qquad (i = 2, 3) \tag{3.4}$$

Характеристическое уравнение имеет вид (3.2) при $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Значения элементов определителя представим в виде

$$\alpha_{11}(I_1, I, \zeta_2) = -\frac{2b_1\zeta_2}{\varkappa+\varepsilon} I_1[\zeta_2(\varkappa+\varepsilon)] + (\zeta_2{}^2 + k_2) I[\zeta_2(\varkappa+\varepsilon)] \tag{3.5}$$

$$\alpha_{12} \equiv \alpha_{11}(-K_1, K, \zeta_2), \qquad \alpha_{13} \equiv \alpha_{11}(I_1, I, \zeta_3), \qquad \alpha_{14} \equiv \alpha_{11}(-K_1, K, \zeta_3)$$

$$\alpha_{31}(I_1, \zeta_2) = (\zeta_2{}^3 + k_1\zeta_2) I_1[\zeta_2(\varkappa+\varepsilon)], \qquad \alpha_{32} \equiv \alpha_{31}(-K_1, \zeta_2)$$

$$\alpha_{33} \equiv \alpha_{31}(I_1, \zeta_3), \qquad \alpha_{34} \equiv \alpha_{31}(-K_1, \zeta_3)$$

Для определения элементов второй и четвертой строк необходимо соответственно в элементах первой и третьей строк изменить знак перед ε на противоположный.

Рассмотрим образование осесимметричной шейки длиной l при растяжении цилиндрического образца радиусом R. С этой целью в решении (3.4) положим $A_{m0}^{i2} = 0$ и подставим (3.4) в граничные условия (2.25) при $P_r{}^* \equiv P_\theta{}^* \equiv P^*{}_3 = 0$. В результате обычной процедуры получаем характеристическое уравнение в виде (3.2) при $i, j = 1, 2$. Элементы определителя имеют следующий вид:

$$\alpha_{11}(\zeta_2) = -\frac{2b_1\zeta_2}{\varkappa} I_1(\zeta_2\varkappa) + (\zeta_2{}^2 + k_2) I(\zeta_2\varkappa), \qquad \alpha_{12} \equiv \alpha_{11}(\zeta_3) \tag{3.6}$$

$$\alpha_{21}(\zeta_2) = \zeta_2(\zeta^2{}_2 + k_1) I_1(\zeta_2\varkappa), \qquad \alpha_{22} \equiv \alpha_{21}(\zeta_3)$$

Если в (3.6) заменить функции Бесселя на функции Макдональда и изменить знак перед K_1, то получим элементы характеристического определителя для задачи о поверхностной неустойчивости цилиндрической полости при осесимметричных деформациях Длина шейки находится в результате минимизации корней уравнения (3.2) и (3.6) при $i, j = 1, 2$.

Рассмотрим устойчивость стержня длиной l кругового поперечного сечения радиусом R при сжатии. Ограничимся плоской формой потери устойчивости в плоскости x_1x_3 для случая шарнирного опирания. Решения основных уравнений (2.18) выберем в форме

$$\Psi_1 = A_m^{(1)} I_1(\gamma\zeta_1 r) \sin\gamma x_3 \sin\theta, \quad \Psi_i = A_m^{(i)} I_1(\gamma\zeta_i r) \cos\gamma x_3 \cos\theta \qquad (i = 2, 3) \tag{3.7}$$

В результате обычной процедуры получаем характеристическое уравнение в форме (3.2) при $i, j = 1, 2, 3$. Значения элементов определителя имеют вид

$$\alpha_{11} = (a_{11} - a_{12})\varkappa\zeta_1 I_2(\varkappa\zeta_1), \quad \alpha_{12}(\zeta_2) = \varkappa a_{11}(\varkappa\zeta_2)^2 I_1''(\varkappa\zeta_2) + a_{12}\varkappa^2\zeta_2 I_2(\varkappa\zeta_2) +$$

$$+ \varkappa^3 a_{13}(a_{13} + G_{13})^{-1}(G_{13} + \sigma_{33}{}^{*\circ}\lambda_1{}^{-2} - a_{11}\zeta_2{}^2) I_1(\varkappa\zeta_2), \quad \alpha_{13} \equiv \alpha_{12}(\zeta_3)$$

$$\alpha_{21} = \varkappa\zeta_1 I_2(\varkappa\zeta_1) - (\varkappa\zeta_1)^2 I_1''(\varkappa\zeta_1), \quad \alpha_{22}(\zeta_2) = -2\varkappa^2\zeta_2 I_2(\varkappa\zeta_2) \tag{3.8}$$

$$\alpha_{23} \equiv \alpha_{22}(\zeta_3), \quad \alpha_{31} = I_1(\varkappa\zeta_1), \quad \alpha_{32}(\zeta_2) = \varkappa^2\zeta_2(a_{13} + G_{13})^{-1}(a_{13} -$$

$$- \sigma_{33}{}^{*\circ}\lambda_1{}^{-2} + \zeta_2{}^2 a_{11}) I_1'(\varkappa\zeta_2), \quad \alpha_{33} \equiv \alpha_{32}(\zeta_3)$$

Необходимо отметить, что во всех выражениях (3.3), (3.5), (3.6), (3.8) величины ζ_i^2 нужно подсчитать по (2.19) при $\sigma_{11}^{*\circ} = 0$, причем в (3.3), (3.5) и (3.8) $\sigma_{33}^{*\circ} < 0$, а в (3.6) $\sigma_{33}^{*\circ} > 0$.

Рассмотрим устойчивость жестко-защемленной круговой пластинки толщиной $2h$ и радиусом R при равномерном сжатии в плоскости x_1x_2. Решение основных уравнений (2.18) выберем в форме

$$\Psi_1 = A_{kn}^{(i)} J_n\left(\frac{\varkappa_k}{R} r\right) \operatorname{sh} \frac{\varkappa_k}{R\zeta_1} x_3 \sin n\theta, \qquad J_n'(x_k) = 0 \tag{3.9}$$

$$\Psi_i = A_{kn}^{(i)} J_n\left(\frac{\varkappa_k}{R} r\right) \operatorname{ch} \frac{\varkappa_k}{R\zeta_i} x_3 \cos n\theta, \qquad i = 2,3$$

Необходимо отметить, что граничные условия при этом выполняются в интегральном смысле и $\sigma_{33}^{*\circ} = 0$. Для осесимметричной формы потери устойчивости решение принимает вид

$$\Psi_1 = 0 \qquad \Psi_i = A_{k0}^{(i)} J\left(\frac{\varkappa_k}{R} r\right) \operatorname{ch} \frac{\varkappa_k}{R\zeta_i} x_3 \qquad (i = 2,3) \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10), (2.19), (2.23) в граничные условия (2.26) при $P_n{}^* \equiv P_s{}^* \equiv P_3{}^* = 0$ и $\sigma_{33}^{*\circ} = 0$, после ряда преобразований получаем характеристическое уравнение в виде (3.2) при $i, j = 1, 2$. Элементы определителя представим в форме

$$\alpha_{11}(\zeta_2) = \frac{1}{\zeta_2}\left[a_{33}\frac{a_{11} + \sigma_{11}{}^{*\circ}\lambda_1{}^{-2}}{a_{11} + G_{13}}\left(\frac{G_{13}}{a_{11} + \sigma_{11}{}^{*\circ}\lambda_1{}^{-2}} - \zeta_2{}^2\right) + a_{13}\zeta_2{}^2\right] \operatorname{sh}\frac{\varkappa_k}{\zeta_2}\frac{h}{R} \tag{3.11}$$

$$\alpha_{21}(\zeta_2) = \left[\frac{a_{11} + \sigma_{11}{}^{*\circ}\lambda_1{}^{-2}}{a_{13} + G_{13}}\left(\frac{G_{13}}{a_{11} + \sigma_{11}{}^{*\circ}\lambda_1{}^{-2}} - \zeta_2{}^2\right) - 1\right] \operatorname{ch}\frac{\varkappa_k}{\zeta_2}\frac{h}{R}$$

$$\alpha_{12} \equiv \alpha_{11}(\zeta_3), \qquad \alpha_{22} \equiv \alpha_{21}(\zeta_3)$$

При выводе характеристического уравнения предполагалось, что $\zeta_2\zeta_3 \neq 0$.

Рассмотрим устойчивость шарнирно-опертой прямоугольной пластины толщиной $2h$, длиной a и шириной b при всестороннем равномерном сжатии, т. е. при $\sigma_{33}^{*\circ} = 0$. Решение уравнений (2.18) выберем в виде

$$\Psi_1 = A_{mn}^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\gamma}{\zeta_1} x_3 \cos m\frac{\pi}{a} x_1 \cos n\frac{\pi}{b} x_2, \qquad \gamma = \left[\left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\Psi_i = A_{mn}^{(i)} \operatorname{ch} \frac{\gamma}{\zeta_i} x_3 \sin m\frac{\pi}{a} x_1 \sin n\frac{\pi}{b} x_2, \qquad i = 2,3 \tag{3.12}$$

После ряда преобразований можно получить характеристический определитель, элементы которого имеют вид (3.11), если в последних $\varkappa_k/R$ заменить на γ.

Рассмотрим в рамках плоской деформации в плоскости x_1x_3 устойчивость шарнирно-опертой полосы толщиной $2h$ и длиной l при сжатии вдоль оси Ox_3. Решение уравнений (2.29) выберем в виде

$$\Psi_2 + \Psi_3 = \left(A \operatorname{ch}\frac{\pi}{l}\zeta_2 x_1 + B \operatorname{ch}\frac{\pi}{l}\zeta_3 x_1\right) \sin\frac{\pi}{l} x_3 \tag{3.13}$$

Подставляя (2.27), (2.28), (3.13) в граничные условия (2.30) при $P_1{}^* \equiv P_3{}^* = 0$, в результате обычной процедуры получаем характеристическое уравнение (3.2) при

$i, j = 1, 2$. Элементы определителя имеют вид

$$\alpha_{11}(\zeta_2) = \zeta_2\left[\zeta_2^2 - \frac{a_{11}(a_{33} + \sigma_{33}^{*\circ}\lambda_3^{-2}) - a_{13}(a_{13} + G_{13})}{a_{11}G_{13}}\right]\operatorname{sh}\alpha\zeta_2, \qquad \alpha = \pi\frac{h}{l} \tag{3.14}$$

$$\alpha_{21}(\zeta_2) = \left(\zeta_2^2 + \frac{a_{33} + \sigma_{33}^{*\circ}\lambda_3^{-2}}{a_{13}}\right)\operatorname{ch}\alpha\zeta_2, \quad \alpha_{22} \equiv \alpha_{21}(\zeta_3), \qquad \alpha_{12} \equiv \alpha_{11}(\zeta_3)$$

Рассмотрим поверхностную неустойчивость нижней полуплоскости $x_1 < 0$ в рамках плоской деформации при сжатии вдоль оси Ox_3. По-видимому, впервые понятие о поверхностной неустойчивости было введено в [22], где была исследована поверхностная неустойчивость полуплоскости для несжимаемого материала. Решение уравнений (2.29) выберем в форме

$$\Psi_2 + \Psi_3 = \left(A\exp\frac{\pi}{l}\zeta_2 x_1 + B\exp\frac{\pi}{l}\zeta_3 x_1\right)\sin\frac{\pi}{l}x_3 \tag{3.15}$$

В результате обычной процедуры получаем характеристическое уравнение в виде (3.2) при $i, j = 1, 2$. Элементы определителя имеют вид

$$\alpha_{11}(\zeta_2) = \zeta_2\left[\zeta_2^2 - \frac{a_{11}(a_{33} + \sigma_{33}^{*\circ}\lambda_3^{-2}) - a_{13}(a_{13} + G_{13})}{a_{11}G_{13}}\right], \qquad \alpha_{12} \equiv \alpha_{11}(\zeta_3)$$

$$\alpha_{21}(\zeta_2) = \zeta_2^2 + \frac{a_{33} + \sigma_{33}^{*\circ}\lambda_3^{-2}}{a_{13}}, \qquad \alpha_{22} \equiv \alpha_{21}(\zeta_3) \tag{3.16}$$

Здесь l определяется в результате минимизации корней характеристического уравнения. Если в (3.14) поменять местами $\operatorname{ch}\alpha\zeta_i$ и $\operatorname{sh}\alpha\zeta_i$ и считать $\sigma_{33}^{*\circ} > 0$, то получим характеристическое уравнение для задачи об образовании шейки в плоском образце при растяжении.

Рассмотрим внутреннюю неустойчивость при сжатии вдоль оси Ox_3, т. е. при $\sigma_{11}^{**} = 0$, а $\sigma_{33}^{**} < 0$. По-видимому, впервые понятие о внутренней неустойчивости введено в [23], где также рассмотрено это явление для плоской деформации. Под внутренней неустойчивостью понимается то явление, когда появляются решение гиперболического уравнения. Соответствующее значение параметра нагружения, при котором получается указанное явление, называется критическим значением. Из (2.18) и (2.19) получаем, что критическое значение параметра нагружения определяется как меньший корень уравнения.

$$G_{13} + \sigma_{33}^{**}\lambda_1^{-2} = 0 \tag{3.17}$$

Необходимо отметить, что во всех характеристических уравнениях, за исключением случаев образования шейки в плоском и цилиндрическом образцах при растяжении, величины $\sigma_{33}^{*\circ}$ или σ_{11}^{**} являются отрицательными.

Все результаты этого параграфа получены для произвольной формы потенциала и только теперь для получения числовых результатов необходимо конкретизировать форму упругого потенциала.

Вид характеристических уравнений значительно упрощается для тонкостенных конструкций, если применить разложения специальных функций по параметру тонкостенности. В результате получаем алгебраические уравнения вместо трансцендентных.

§ 4. Формы упругого потенциала. Из выражений (1.6) и соотношений, предложенных в [19,24], можно установить соответствие между величинами ψ_0, ψ_1, ψ_2, и K^*, G^*, ω^* [19,24], в результате можно выразить величины a_{ij} и G_{ij} (2.9) через величины K^*, G^* и ω^* и их производные. Следовательно, при наличии экспериментально проверенных зависимостей величин

K^*, G^* и ω^* от инвариантов тензора деформации для определенного материала из характеристических уравнений предыдущего параграфа можно получить числовые значения критических параметров. Учитывая обозначения [19], выразим значения величин ψ_0, ψ_1 и ψ_2 через значения величин K^*, G^* и ω^* и введенные в [24] инварианты тензора деформаций e, e° и φ

$$\psi_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} = K^* e + 2G^* \left\{ -\frac{\cos(3\varphi + \omega^*)}{3\cos 3\varphi} e + \frac{\sqrt{3}}{e^\circ} \frac{\sin \omega^*}{\cos 3\varphi} \left[\frac{2}{3} (e^\circ)^2 - \frac{1}{9} e^2 \right] \right\}$$

$$\psi_1 = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} = 2G^* \left\{ \frac{\cos(3\varphi + \omega^*)}{3\cos 3\varphi} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{e}{e^\circ} \frac{\sin \omega^*}{\sin 3\varphi} \right\} \qquad (4.1)$$

$$\psi_2 = 3 \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} = 2G^* \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{e^\circ} \frac{\sin \omega^*}{\cos 3\varphi} \right\}$$

Подставляя частные производные от потенциала (4.1) в (2.9), получим значения величин a_{ij} и G_{ij}, выраженные через величины K^*, G^*, ω^*, e, e° и φ. Необходимо заметить, что

$$e \equiv I_1, \qquad e^{\circ 2} = {}^1/_2 I_2 - {}^1/_6 I_1^2 \qquad (4.2)$$

Соотношения (4.1) значительно упрощаются, если девиаторы подобны, т. е. фаза подобия девиаторов $\omega^* = 0$. В этом случае из (4.1) получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} = \left(K^* - \frac{2}{3} G^* \right) e, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} = \frac{1}{3} G^*, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} = 0 \qquad (4.3)$$

Таким образом, выражения (4.1) — (4.3) дают возможность получить числовые результаты из характеристических уравнений предыдущего параграфа, когда связь между компонентами тензора обобщенных напряжений и тензора конечной деформации дана в форме В. В. Новожилова [24].

Подробное обсуждение видов упругого потенциала для несжимаемых каучукоподобных материалов можно найти в [2,25], во второй работе нашли отражение результаты последних лет.

В работах [3,14,9,15,16] упругий потенциал выбран в форме, которая по виду совпадает с формой упругого потенциала для малых деформаций и, естественно, при малых деформациях переходит в него. Экспериментальной проверки такой формы упругого потенциала в указанных работах не выполнено ни для какого материала. В принятых здесь обозначениях этот потенциал можно представить в виде

$$\Phi = \mu I_2 + {}^1/_2 I_1^2, \qquad \lambda, \mu \text{ — параметры Ляме} \qquad (4.4)$$

Материал, имеющий потенциал в виде (4.4), в работе [14] назван «полулинейным», а в [9,15,16] — «гармоническим», что связано с особенностями решения краевых задач для такого материала.

Выпишем значения некоторых величин, которые получаются из потенциала (4.4). Из (1.6) и (4.4) выводим

$$\psi_0 = \lambda I_1, \quad \psi_1 = 2\mu, \quad \psi_2 = 0 \qquad (4.5)$$

Из (2.9) и (4.4) получаем

$$a_{ij} = \lambda + 2\mu\delta_{ij}, \qquad G_{ij} = \mu \tag{4.6}$$

Таким образом, соотношения (2.8) и (2.9) как бы совпадают с соотношениями для малых деформаций изотропного тела.

Из выражений (2.3), (2.4) и (4.4) для пространственной задачи выводим

$$\sigma_{11}^{*\circ} = {}^1/_2\lambda(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + \mu(\lambda_1^2 - 1), \quad \sigma_{22}^{*\circ} = {}^1/_2\,\lambda(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + \mu\,(\lambda_2^2 - 1)$$

$$\sigma_{33}^{*\circ} = {}^1/_2\lambda(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + \mu(\lambda_3^2 - 1) \tag{4.7}$$

и для плоской задачи в плоскости x_1x_3

$$\sigma_{11}^{*\circ} = {}^1/_2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 2)\lambda + \mu(\lambda_1^2 - 1), \quad \sigma_{33}^{*\circ} = {}^1/_2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 2)\lambda + \mu(\lambda_3^2 - 1) \tag{4.8}$$

Примечание. В случае потенциала (4.4) исследование характеристических уравнений предыдущего параграфа существенно упрощается, так как величины a_{ij} и G_{ij} (4.6) не зависят от λ_i и компоненты докритического напряженного состояния просто выражаются через λ_i в соотношениях (4.7) и (4.8). Эти уравнения почти не отличаются от соответствующих уравнений теории малых докритических деформаций. Ряд результатов в рамках потенциала (4.4) получен в работах [3,14,9,16].

§ 5. **Числовой пример.** В рамках потенциала (4.4) исследуем устойчивость полосы толщиной $2h$ и длиной l при сжатии вдоль оси ox_3. Рассмотрим случай плоской деформации в плоскости x_1x_3 и сравним с решением этой же задачи в рамках теории малых докритических деформаций [26]. Согласно (4.3), при $\sigma_{11}^{*\circ} = 0$ получаем

$$\lambda_3^2 = 2E^{-1}(1 - \nu^2)\sigma_{33}^{*\circ} + 1, \; \lambda_1^2 = -2\nu(1 + \nu)\, E^{-1}\, \sigma_{33}^{*\circ} + 1 \tag{5.1}$$

Подставляя (4.6), (5.1) в (3.14), получаем характеристическое уравнение для определения $\sigma_{23}^{*\circ} = -p^*$. С точностью до $\alpha^4 = (\pi h/l)^4$ получаем

$$p^* \approx p_0\left(1 - \frac{17 + 3\nu}{1 - \nu}\frac{\alpha^2}{15}\right), \qquad p_0 = \frac{E}{1 - \nu^2}\frac{\alpha^2}{3} \tag{5.2}$$

Обозначим через p интенсивность поверхностной нагрузки, отнесенной к площади тела до деформации. Согласно (2.14), (5.1) и (5.2) с токой же точностью

$$p \approx p_0\left(1 - \frac{12 + 8\nu}{1 - \nu}\frac{\alpha^2}{15}\right) \tag{5.3}$$

По теории малых докритических деформаций при пренебрежении деформациями по сравнению с углами поворота [4] получаем [26]

$$p \approx p_0\left(1 - \frac{12 - 2\nu}{1 - \nu}\frac{\alpha^2}{15}\right) \tag{5.4}$$

Следовательно, как по теории больших докритических деформаций в рамках потенциала (4.4), так и по теории малых докритических деформаций значение критической нагрузки меньше p_0, но величина их различна. Необходимо отметить, что величина критической нагрузки существенно зависит от формы упругого потенциала.

Поступила 5 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Вопросы общей теории упругой устойчивости. ПММ, 1956, т. 20, вып. 5.
2. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., «Мир», 1965.
3. Лурье А. И. Бифуркация равновесия идеально упругого тела. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
4. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М., Гостехиздат, 1948.
5. Толоконников Л. А. Вариационное уравнение задачи устойчивости состояния равновесия. Тр. Тульск. горн. ин-та, сб. 3, 1961, вып. 3.
6. Biot M. A. Nonlinear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress. Philos. Mag., Ser., 7, 1939, vol. 27.
7. Biot M. A. Mechanice of incremental deformations. Theory of elasticity and viscolasticity of initially stressed solids and fluids, including thermodynamic foundations and applications to finite strains. New York, Wiley, 1965.
8. Green A. E., Rivilin R. S., Shield R. T. General theory of a small elastic deformation superposed on finite elastic deformations. Proc. Roy. Soc. A, 1952, vol. 211, No. 1104.
9. John F. Plane strain problem for a perfectly elastic material of harmonic type. Communs Pure and Appl. Math., 1960, vol. 13, No. 2.
10. Hill R. On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain. J. Mech. and Phys. Solids, 1957, vol. 5, No. 4.
11. Pearson C. E. General theory of elastic stability. Quart. Appl. Math., 1956, vol. 4, No. 2.
12. Бидерман В. Л. Устойчивость полосы из неогуковского материала III Всес. съезда по теорет. и прикл. механ., М., «Наука», 1968.
13. Киреева Г. Б. Устойчивость продольно-сжатой круговой цилиндрической оболочки из нелинейно-упругого материала. Прикл. механ., 1967, т. 3, вып. 4.
14. Лурье А. И. Теория упругости для полулинейного материала. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
15. John F. On finite deformations of an elastic isotropic material. ASTIA T., No. 58—955 (N. Y. Univ, Inst. Math. Sci., 250; ASTIA AD 205 348), 1958.
16. Sensening C. B. Instability of thick elastic solids, Communs Pure and Appl. Math., 1964, vol. 17, No. 4.
17. Green A. E., Spencer A. J. M. The stability of a circular cylinder under finite extension and torsion, J. Math. and Phys., 1959, vol. 37, No. 4.
18. Wesolowski Z. Stability in some cases of tension in the light of the theory of finite strain. Arch. Mech. Stosowanej, 1962, vol. 14, No. 6.
19. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
20. Reiner M. A mathematical theory of dilatancy. Amer. J. Math., 1945, vol. 67, No. 3.
21. Ватсон Дж. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
22. Biot M. A. Surface instability in finite anisotropic elasticity under inital stress. Proc. Roy. Soc. A, 1963, vol. 273, No. 1354.
23. Biot M. A. Internal buckling under initial stress in finite elasticity. Proc. Roy. Soc. A, 1963, vol. 273, No. 1354.
24. Новожилов В. В. О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов. ПММ, 1951, вып. 6.
25. Alexander H. A constitutive relation for rubber — like materials. Internat. J. Engng. Sci., 1968, vol. 6, No. 9.
26. Гузь А. Н. О точности гипотезы Кирхгофа — Лява при определении критических сил в теории упругой устойчивости. Докл. АН СССР, 1968, т. 179, № 3.