

МЕТОДЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ МНОГОФАЗНЫХ СМЕСЕЙ

Р. И. Нигматулин

(Москва)

Рассмотрены главные положения при построении общей многоскоростной модели сплошной многофазной среды и получены основные уравнения (массы, импульса, энергии) механики для каждой фазы в гетерогенной смеси. На основе этих уравнений предложена замкнутая система, описывающая движения дисперсной смеси двух сжимаемых фаз при наличии фазовых превращений. Проанализированы энергетические переходы при фазовых превращениях. Выведены основные соотношения на поверхности разрыва. Исходя из предположения об аддитивности внутренней энергии смеси по массам составляющих и предположения о локальном равновесии в пределах фазы, проанализированы термодинамические вопросы гетерогенной смеси. В частности, получено явное выражение для диссипативной функции.

Основные идеи использования взаимопроникающих многоскоростных континуумов в механике смесей разработаны Х. А. Рахматулиным [1] и С. Труделлом [2]. Вопросы вывода соответствующих уравнений при помощи методов осреднения рассмотрены С. Г. Телетовым [3], где указана и более ранняя литература. Следует отметить, что некоторые уравнения многоскоростных континуумов содержались еще в [4,5].

Необходимо различать [6] гомогенные или многокомпонентные¹ смеси (растворы, сплавы, смеси газов) и гетерогенные или многофазные смеси (эмульсии, суспензии, газовзвеси, водонасыщенный грунт, смеси порошков и т. д.). В гомогенной смеси каждая составляющая (компонента) может рассматриваться как занимающая весь объем смеси

$$V_1 = V_2 = \dots = V_m = V$$

в то время как каждая составляющая (фаза) в гетерогенной смеси занимает лишь часть объема смеси, так что

$$V_1 + V_2 + \dots + V_m = V$$

Неучет этого обстоятельства, а также введение понятия температуры смеси при неравных между собой температурах составляющих привело авторов [7-9] к формальным теориям, не имеющим под собой физической реальности, во всяком случае, в области гетерогенных сред [10].

Полученные в этой работе результаты являются обобщением [11,12], где рассмотрена аналогичная смесь, но когда одна из фаз — несжимаема (в [11] — при отсутствии фазовых переходов). В качестве примера, когда нужно учитывать сжимаемости обеих фаз, укажем на течения парожидкостных дисперсных смесей при давлениях и температурах, достаточно близких к критическим. Другая область приложения представленных результатов — исследование распространения сильных ударных волн в конденсированных гетерогенных смесях.

Отметим работу [13], в которой рассмотрена модель двух сжимаемых фаз применительно к водонасыщенному грунту, но при отсутствии фазовых переходов, а также работу [14], где в односкоростной постановке получены уравнения движения применительно к двухфазному твердому телу с учетом фазовых переходов.

¹ К сожалению, термин «многокомпонентная смесь» иногда используется и для гетерогенных (многофазных) смесей.

§ 1. Основные допущения. Движение многофазной смеси будем рассматривать при следующем основном допущении — расстояния, на которых параметры течения меняются существенно (вне поверхности разрыва), много больше характерных размеров неоднородностей или включений. Это позволяет описывать многофазную смесь, как и гомогенную смесь, в виде совокупности m (по числу фаз) континуумов, заполняющих один и тот же объем. Тогда в каждой точке объема, занятого смесью, можно ввести средние плотности ρ_1, \dots, ρ_m , характеризующие массу фазы в единице объема смеси, скорости v_1, \dots, v_m и т.д., а также записать уравнения сохранения массы, импульса и энергии для каждой составляющей, куда войдут члены, характеризующие взаимодействие (массовое, силовое и энергетическое) между ними. Далее теории гомогенных и гетерогенных смесей расходятся в своих подходах. Последняя использует величины, характеризующие доли объема смеси α_i ($i = 1, \dots, m$), занимаемые каждой фазой

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1 \quad (\alpha_i \geq 0) \quad (1.1)$$

и, таким образом, помимо средних плотностей ρ_i определяются истинные плотности вещества фаз ρ_i° (масса i -й фазы в единице объема i -й фазы)

$$\rho_i^\circ = \rho_i / \alpha_i \quad (1.2)$$

Механика гетерогенных сред должна учитывать тот факт, что составляющие в смеси присутствуют в виде макроскопических (по отношению к молекулярным размерам) включений или среды, окружающей эти включения, так что многие механические и термодинамические свойства i -й фазы ($i = 1, \dots, m$) непосредственно не зависят от присутствия других фаз. Но деформация каждой фазы, определяющая ее состояние и реакцию, определяется не только смещением внешних границ (полем скоростей v_i) фазы, но и смещением межфазных поверхностей внутри выделенного объема.

В общем случае, для каждой составляющей необходимо рассматривать как внешний тензор скоростей деформации

$$e_i^{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i^k}{\partial x^l} + \frac{\partial v_i^l}{\partial x^k} \right) \quad (1.3)$$

так и целый набор ($m - 1$ для каждой фазы) некоторых тензоров (δ_{ij}^{kl} , $j = 1, \dots, m, j \neq i$), учитывающих смещения вещества i -й фазы на поверхностях раздела фаз, так что истинная скорость деформации фазы определяется тензором

$$e_i^{\circ kl} = e_i^{kl} + \sum_{j=1, j \neq i}^m \delta_{ij}^{kl} \quad (1.4)$$

Определение тензоров δ_{ij} каждый раз связано с привлечением условий совместного движения и деформирования фаз, условий, учитывающих структуру составляющих (форма и размер включений, их расположение и т.д.). В тех случаях, когда эффекты прочности не имеют значения (газовзвесь, жидкость с пузырями или частицами твердые тела в условиях очень высоких давлений), условия совместного движения являются существенно более простыми, чем в общем случае. Они по существу сводятся к заданию уравнений, определяющих объемные содержания фаз α_i . Отметим, что наиболее часто встречающимся такого рода уравнением является уравнение равенства давлений фаз.

§ 2. Интегральные уравнения. Рассмотрим фиксированный в некоторой инерциальной системе координат объем V , ограниченный поверхностью S . Уравнения сохранения масс для первой и второй фаз внутри объема V имеют вид

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dV &= - \int_S \rho_1 v_1^n dS + \int_V (J_{21} - J_{12}) dV, \quad \rho_1 = \rho_1^0 \alpha_1 \\ \int_V \frac{\partial \rho_2}{\partial t} dV &= - \int_S \rho_2 v_2^n dS + \int_V (J_{12} - J_{21}) dV, \quad \rho_2 = \rho_2^0 \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь J_{12} и J_{21} — «наблюдаемые» макроскопические скорости фазовых превращений, каждая из которых неотрицательна, так что J_{ij} дает скорость только образования (в противном случае $J_{ij} = 0$) j -й фазы за счет i -й в единице объема и времени. Т.е. фазовые переходы условно разбиты на две реакции (каждая из которых при кинетическом рассмотрении имеет прямую и обратную реакции). Это связано с тем, что два возможных результирующих направления фазовых превращений $1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 1$ приводят к различным изменениям импульса и энергии отдельной фазы, которые нельзя учесть сменой знака в скорости реакции (что достаточно, когда пишутся уравнения импульса и энергии всей смеси (см. ниже)). Складывая интегральные уравнения (2.1), имеем уравнение сохранения массы всей смеси

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2}{\partial t} \right) dV = - \int_S (\rho_1 v_1^n + \rho_2 v_2^n) dS \quad (2.2)$$

Уравнения сохранения импульсов каждой фазы в отдельности имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 v_1) dV &= - \int_S \rho_1 v_1 v_1^n dS + \int_S \sigma_1^n dS + \\ &+ \int_V r_{21} dV + \int_V (J_{21} v_{21} - J_{12} v_{12}) dV + \int_V \rho_1 F_1 dV \\ \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho_2 v_2) dV &= - \int_S \rho_2 v_2 v_2^n dS + \int_S \sigma_2^n dS - \int_V r_{21} dV + \\ &+ \int_V (J_{12} v_{12} - J_{21} v_{21}) dV + \int_V \rho_2 F_2 dV \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь r_{21} — объемная сила, отнесенная к единице объема смеси и обусловленная взаимодействием между фазами внутри объема V за счет сил трения, давления, сцепления между фазами, эффекта присоединенных масс и т. д. Четвертые слагаемые в правых частях (2.3) представляют собой изменение импульса соответствующей фазы за счет фазовых превращений. Например, переход $2 \rightarrow 1$ приводит к тому, что из второй фазы в первую уходит импульс $J_{21} v_{21}$, а переход $1 \rightarrow 2$ соответственно к тому, что из первой фазы во вторую уходит импульс $J_{12} v_{12}$. Т.е. v_{12} и v_{21} — скорости масс, претерпевающих фазовые переходы соответственно $1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 1$. Далее, F_1 и F_2 — внешние массовые силы, действующие на первую и вторую фазы.

Вторые слагаемые в правых частях (2.3) связаны с воздействием внешней относительно поверхности S среды на соответствующую фазу, характеризующую фазу, характеризующую тензорами поверхностных сил σ_i^{kl} ($i = 1, 2$), которые можно представить

$$\sigma_i^{kl} = \alpha_i \sigma_i^{okl} + \alpha_j \sigma_{ji}^{*kl} \quad (2.4)$$

где σ_i^{okl} — истинный тензор напряжений, связанный с действием поверхностных сил на i -ю фазу со стороны i -й же фазы на внешних границах выделенного объема смеси, а σ_{ji}^{*kl} — тензор межфазных поверхностных сил, действующих на i -ю фазу со стороны j -й на тех же внешних границах.

Складывая уравнения (2.3), имеем уравнение сохранения импульса всей смеси

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2) dV = - \int_S (\rho_1 v_1 v_1^n + \rho_2 v_2 v_2^n) dS + \\ + \int_S (\sigma_1^n + \sigma_2^n) dS + \int_V (\rho_1 F_1 + \rho_2 F_2) dV \quad (2.5)$$

Энергия смеси складывается из внутренней и кинетической энергии составляющих. При этом каждую фазу будем считать локально однородной. Т. е. в каждом элементарном объеме смеси вещество каждой фазы, в том числе и включений (капель, частиц, пузырей и т. д.), принимается однородным вплоть до самой поверхности раздела фаз, и поэтому энергия каждой составляющей считается пропорциональной ее массе. Это равносильно тому, что особенности поверхностного слоя вещества толщиной порядка радиуса молекулярного взаимодействия ($\sim 10^{-9}$ м), являющегося границей раздела фаз, далее не учитываются.

Для этого необходимо, чтобы размеры включений были во много раз больше толщины этого слоя. Кроме того, будет учитываться только та часть кинетической энергии смеси, которая связана с макроскопическим движением фаз со скоростями v_i . В действительности имеются еще мелкомасштабные (с характерным линейным размером, равным по порядку размеру неоднородностей смеси) течения (например, пульсационное движение вокруг пузырей, обратные токи несущей жидкости около включений). В существующих теориях взаимопроникающего движения кинетическая энергия таких течений не учитывается. Таким образом, рассматривается случай, когда энергия смеси при однородном представлении энергии фаз является аддитивной по массе фаз. Вопросу учета в гидромеханике смеси поверхностных явлений в рамках представлений Гиббса и кинетической энергии мелкомасштабного движения фаз будет посвящена отдельная работа автора.

Уравнения энергии запишем отдельно для первой и второй фаз внутри объема V

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_1 \left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) \right] dV = - \int_S \rho_1 \left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) v_1^n dS + \int_S C_1^n dS - \int_S q_1^n dS + \\ + \int_V \rho_1 (F_1 v_1 + Q_1) dV + \int_V \left[q_{21} + w_{21} + J_{21} \left(u_{21} + \frac{v_{21}^2}{2} \right) - J_{12} \left(u_{12} + \frac{v_{12}^2}{2} \right) \right] dV \\ \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_2 \left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) \right] dV = - \int_S \rho_2 \left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) v_2^n dS + \int_S C_2^n dS - \int_S q_2^n dS + \\ + \int_V \rho_2 (F_2 v_2 + Q_2) dV - \int_V \left[q_{21} + w_{21} + J_{21} \left(u_{21} + \frac{v_{21}^2}{2} \right) - J_{12} \left(u_{12} + \frac{v_{12}^2}{2} \right) \right] dV \quad (2.6)$$

Здесь u_i — внутренняя энергия i -й фазы. Вторые и третьи слагаемые в правых частях (2.6) соответствуют работе внешних поверхностных сил, действующих на i -ю фазу

на поверхности S , характеризуемой векторами C_i , и притоку тепла извне к i -й фазе через поверхность S , характеризуемому векторами q_i . Четвертые слагаемые представляют работу внешних массовых сил, а также мощность внешних тепловых источников, расположенных внутри объема V . Последние слагаемые в правых частях описывают обмен энергией, отнесенный к единице объема смеси и времени внутри объема V между первой и второй фазами за счет теплообмена (q_{21}), работы сил взаимодействия (сил трения, давления, сцепления и т. д.) между фазами (w_{21}) и фазовых переходов. Переход $2 \rightarrow 1$ приводит к тому, что энергия, приходящаяся на первую фазу, увеличивается на величину $J_{21}(u_{21} + \frac{1}{2}v_{21}^2)$ за счет второй фазы, а переход $1 \rightarrow 2$ приводит к тому, что энергия, приходящаяся на вторую фазу, увеличивается на величину $J_{12}(u_{12} + \frac{1}{2}v_{12}^2)$ за счет первой фазы. Т. е. u_{12} и u_{21} — внутренние энергии масс, переходящих соответственно из состояния 1 в 2 и из состояния 2 в 1.

Складывая уравнения (2.6), получим уравнение сохранения энергии смеси внутри объема V , которая может изменяться только за счет действия внешних источников

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_1 \left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) + \rho_2 \left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) \right] dV = \\ & = - \int_S \left[\rho_1 \left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) v_1^n + \rho_2 \left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) v_2^n \right] dS + \int_S (C_1^n + C_2^n) dS - \\ & - \int_S (q_1^n + q_2^n) dS + \int_V [\rho_1 (F_1 v_1 + Q_1) + \rho_2 (F_2 v_2 + Q_2)] dV \end{aligned} \quad (2.7)$$

§ 3. Дифференциальные уравнения. Используя формулу Гаусса — Остроградского в интегральных уравнениях и вводя оператор субстанциональной производной для каждой фазы (здесь и далее везде суммирование только по верхним индексам, относящимся к проекциям на координатные оси)

$$\frac{d_i}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_i \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_i^k \nabla^k \quad (3.1)$$

получим дифференциальные уравнения сохранения массы, импульса и энергии каждой фазы для непрерывного движения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla (\rho_i v_i) = J_{ji}^* - J_{ij} \quad (3.2) \\ & \rho_i \frac{d_i v_i}{dt} = \nabla^k \sigma_i^k + r_{ji} + J_{ji} (v_{ji} - v_i) - J_{ij} (v_{ij} - v_i) + \rho_i F_i \\ & \rho_i \frac{d_i}{dt} \left(u_i + \frac{v_i^2}{2} \right) = \nabla C_i + q_{ji} + w_{ji} + J_{ji} \left(u_{ji} - u_i + \frac{v_{ji}^2 - v_i^2}{2} \right) - \\ & - J_{ij} \left(u_{ij} - u_i + \frac{v_{ij}^2 - v_i^2}{2} \right) - \nabla q_i + \rho_i (F_i v_i + Q_i) \\ & \quad i, j = 1, 2; i \neq j \end{aligned}$$

Заметим, что уравнения сохранения моментов количества движения при отсутствии в каждой фазе внутренних моментов, массовых и поверхностных распределенных пар аналогично классическому случаю приводят к симметрии тензоров σ_i^{kl} .

Из (2.2), (2.5) и (2.7) аналогично (3.2) или, складывая соответствующие уравнения (3.2), можно получить уравнения сохранения массы, импульса и энергии для смеси

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 + \rho_2) + \nabla (\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2) = 0 \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{d_1 v_1}{dt} + \rho_2 \frac{d_2 v_2}{dt} &= \nabla^k (\sigma_1^k + \sigma_2^k) + (J_{12} - J_{21}) (v_1 - v_2) + \rho_1 F_1 + \rho_2 F_2 \\ \rho_1 \frac{d_1}{dt} \left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) + \rho_2 \frac{d_2}{dt} \left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) &= \nabla (C_1 + C_2) + (J_{12} - J_{21}) \times \\ &\times \left(u_1 - u_2 + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \right) - \nabla (q_1 + q_2) + \rho_1 (F_1 v_1 + Q_1) + \rho_2 (F_2 v_2 + Q_2) \end{aligned}$$

Из сравнения (3.2) и (3.3) видно, что в зависимости от направления ($2 \rightarrow 1$ или $1 \rightarrow 2$) результирующего фазового превращения в данной точке его силовое и энергетическое воздействия на отдельную фазу нельзя учесть сменой знака в скорости реакции, так как в общем случае $v_{12} \neq v_{21}$, $u_{12} \neq u_{21}$ и эффекты в правых частях уравнений (3.2), связанные с J_{12} и J_{21} , различны. В то время как для всей смеси силовой и энергетический эффекты можно учесть сменой знака в скорости перехода, так как этот эффект входит в уравнения (3.3) через разность $J_{12} - J_{21}$.

Из второго соотношения (3.2) следует уравнение кинетической энергии для отдельной фазы

$$\rho_i \frac{d_i}{dt} \left(\frac{v_i^2}{2} \right) = v_i \nabla^k \sigma_i^k + r_{ji} v_i + J_{ji} (v_{ji} v_i - v_i^2) - J_{ij} (v_{ij} v_i - v_i^2) + \rho_i F_i v_i \quad (3.4)$$

уравнение кинетической энергии смеси

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{d_1}{dt} \left(\frac{v_1^2}{2} \right) + \rho_2 \frac{d_2}{dt} \left(\frac{v_2^2}{2} \right) &= v_1 \nabla^k \sigma_1^k + v_2 \nabla^k \sigma_2^k + r_{12} (v_2 - v_1) + \\ &+ (J_{12} - J_{21}) \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + J_{21} (v_1 - v_2) (v_{21} - \frac{1}{2} (v_1 + v_2)) - \\ &- J_{12} (v_1 - v_2) (v_{12} - \frac{1}{2} (v_1 + v_2)) + \rho_1 F_1 v_1 + \rho_2 F_2 v_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

уравнение для внутренней энергии отдельной фазы

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{d_i u_i}{dt} &= \nabla C_i - v_i \nabla^k \sigma_i^k + w_{ji} - r_{ji} v_i + q_{ji} + J_{ji} (u_{ji} - u_i) - J_{ij} (u_{ij} - u_i) + \\ &+ \frac{1}{2} J_{ji} (v_{ji} - v_i)^2 - \frac{1}{2} J_{ij} (v_{ij} - v_i)^2 - \nabla q_i + \rho_i Q_i \end{aligned} \quad (3.6)$$

Это уравнение получено из формальных балансовых соотношений, и его непосредственная конкретизация связана со значительными трудностями. Для случая отсутствия фазовых переходов, привлекая некоторые дополнительные соображения, указанная конкретизация выполнена в [13]. Как будет показано ниже, в общем случае лучше и нагляднее исходить из аналогичного соотношения в виде уравнения притока тепла i -й фазы

$$\rho_i \frac{d_i u_i}{dt} = \rho_i A_i - J_{ji} x_{i,ji} - J_{ij} x_{i,ij} + q_{ji} - \nabla q_i + \rho_i Q_i \quad (3.7)$$

Здесь A_i представляет работу внутренних сил [15] в единице массы i -й фазы за единицу времени, а остальные — приток тепла, где $x_{i,ji}$ и $x_{i,ij}$ — потоки тепла от i -й фазы к веществу, терпящему превращение $j \rightarrow i$ и $i \rightarrow j$ соответственно и отнесенные к массе, претерпевающей этот переход.

§ 4. Учет механических и термодинамических свойств фаз. Конкретизация модели двухфазной сплошной среды естественно требует привлечения механических и термо-

динамических свойств фаз. Учитывая сказанное в § 1, будем полагать, что свойства каждой фазы в смеси определяются теми же самыми соотношениями, как если бы эта фаза при этих же условиях занимала весь объем, причем деформация в эти соотношения входит через истинный тензор деформации или истинные скорости деформации. Т.е. зная свойства каждой фазы, имеем уравнение для истинного тензора напряжений

$$\sigma_j^{*kl} = \sigma_i^{*kl}(\varepsilon_i^{*mn}, e_i^{*mn}, T_i, \chi_i^1, \dots, \chi_i^p) \quad (4.1)$$

который входит в выражение общего тензора поверхностных сил i -й фазы (2.4). Здесь $\chi_i^1, \dots, \chi_i^p$ — физико-химические параметры i -й фазы.

Далее принимаем гипотезу локального равновесия в пределах фазы, что позволяет ввести для каждой из них свою температуру (T_1, \dots, T_m) и другие термодинамические функции (энтропию, энтальпию, внутреннюю энергию и др.), соответствующие материалу фазы при ее температуре T_i , деформации ε_i^{*kl} и другим физико-химическим параметрам. Например

$$u_i = u_i(\varepsilon_i^{*kl}, T_i, \chi_i^1, \dots, \chi_i^p) \quad (4.2)$$

Второй закон термодинамики для i -й фазы при этом имеет вид

$$T_i d_i s_i = d_i q_i^{(e)} + d_i q_i', \quad d_i q_i' \geq 0 \quad (4.3)$$

где s_i — удельная энтропия i -й фазы, $d_i q_i^{(e)}$ — внешний приток тепла и $d_i q_i'$ — так называемое некомпенсированное тепло, отнесенные к единице массы i -й фазы. Причем $d_i q_i'$ определяется свойствами только i -й фазы.

Таким образом, проблема многофазного движения при известных физико-механических свойствах каждой фазы сводится к выявлению условий совместного движения и деформирования, т.е. к определению δ_{ij}^{kl} и других членов, характеризующих взаимодействие фаз ($\sigma_{ij}^{*kl}, J_{ji}, J_{ij}, r_{ij} = -r_{ji}, v_{ij}, v_{ji}, u_{ij}, u_{ji}, q_{ij} = -q_{ji}, w_{ij} = -w_{ji}$)

§ 5. Дисперсные смеси двух сжимаемых фаз. Рассмотрим гетерогенную среду, являющуюся смесью двух сжимаемых жидкостей, в каждой из которых отсутствуют эффекты прочности. Причем вторая фаза присутствует в виде отдельных, одинакового размера включений (частиц, капель, пузырей), непосредственными взаимодействиями (например столкновениями), между которыми можно пренебречь; первая фаза является несущей средой, описываемой моделью вязкой жидкости. В этом случае обычно можно принять

$$\sigma_1^{kl} = -p_1 \delta^{kl} + \tau_1^{kl}, \quad \sigma_2^{kl} = 0 \quad (5.1)$$

где δ^{kl} — символ Кронекера, p_1 — давление и τ_1^{kl} — тензор вязких напряжений первой фазы, для которого принимают закон Навье — Стокса, определяемый внешним тензором скоростей деформаций (1.3)

$$\tau_1^{kl} = \lambda_1^* \nabla v_1 + 2\mu_1^* e_1^{kl} \quad (5.2)$$

а влияние смещений на межфазных границах, от которых также зависит истинная скорость деформации первой фазы (1.4), учитывают поправками (типа Эйнштейновской) в коэффициентах вязкости λ_1^* и μ_1^* , учитываемыми помимо свойств несущей среды и свойства включений [16]. В концентрированных суспензиях иногда необходимо рассматривать и ненулевые (из-за хаотического движения частиц) значения [17, 18] тензора напряжений σ_2^{kl} .

Аналогично (5.1) и (5.2) при отсутствии лучистой передачи тепла можно принять закон теплопроводности внутри несущей фазы в виде

$$\underline{q}_1 = -k_1^* \nabla T_1, \quad q_2 = 0 \quad (5.3)$$

Учитывая гипотезу локального равновесия в пределах фазы (§ 4) и принимая, что фазы представляют двухпараметрические среды [15], т. е. термодинамические функции каждой зависят только от двух термодинамических параметров состояния (например, от истинной плотности ρ_i° и температуры T_i или давления p_i и температуры T_i), имеем

$$u_i = u_i(\rho_i^\circ, T_i), \quad p_i = p_i(\rho_i^\circ, T_i), \quad s_i = s_i(\rho_i^\circ, T_i) \quad (5.4)$$

При этом справедливо соотношение Гиббса

$$T_i \frac{d_i s_i}{dt} = \frac{d_i u_i}{dt} + p_i \frac{d_i}{dt} \frac{1}{\rho_i^\circ} \quad (i = 1, 2) \quad (5.5)$$

В достаточно широком круге задач, когда характерное время исследуемого макропроцесса во много раз превышает характерное время установления равновесия между фазами давления, можно (когда малы эффекты поверхностного натяжения (§ 2)) использовать «однодавленческую» модель, т. е.

$$p_1(\rho_1^\circ, T_1) = p_2(\rho_2^\circ, T_2) = p \quad (5.6)$$

что и представляет в данном случае условие совместного деформирования фаз, регулирующее их объемные содержания. Во многих случаях в качестве такого условия можно использовать несжимаемость одной из фаз. При неравновесности между фазами по давлению необходимо задавать кинетическое уравнение, связывающее p_1 и p_2 (типа уравнения Лемба для пузырька), и учитывать при этом кинетическую энергию пульсационного движения фаз, переходящую в энергию сжатия и обратно, что может сопровождаться диссипацией из-за вязкости.

Силу взаимодействия между несущей средой и включениями представим в виде

$$\mathbf{r}_{12} = -\alpha_2 \nabla p_1 + \mathbf{f}_{12} \quad (5.7)$$

Здесь первая составляющая связана с воздействием поля давления на включения (Архимедова сила), а вторая — со скоростной неравновесностью между фазами (несовпадением \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2), которая, в свою очередь, в данном случае обязана трем эффектам

$$\mathbf{f}_{12} = \mathbf{f}_f + \mathbf{f}_m + \mathbf{f}_r \quad (5.8)$$

Здесь \mathbf{f}_f — сила трения (Стоксова сила), обязанная действию вязких сил при взаимодействии между фазами, определяется разницей скоростей (скольжением) $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, размером, количеством и формой включений, а также физическими свойствами фаз. Далее \mathbf{f}_m — сила, связанная с воздействием «присоединенных масс» и возникающая из-за ускоренного движения включения относительно несущей среды, когда в последней возникают возмущения на расстояниях порядка размера включений. Эти мелкомасштабные возмущения и приводят к дополнительной силе давления, не учитываемой членом $-\alpha_2 \nabla p_1$. И, наконец, \mathbf{f}_r — сила дополнительного воздействия на включения

из-за градиентов в поле средних скоростей несущей фазы (сила Магнуса или Жуковского). Для указанных в (5.6) сил можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \{ f_f = \alpha_2 \rho_1^\circ K (v_1 - v_2), \quad K = K(\alpha_2, |v_1 - v_2|, \mu_1, \mu_2, a, \dots) \\ f_m = \alpha_2 \rho_1^\circ \chi' \frac{d_2}{dt} (v_1 - v_2), \quad f_r = \alpha_2 \rho_1^\circ \chi'' (v_1 - v_2) \times \text{rot } v_1 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Влияние формы частиц, их неоднородности и другие уточнения в выражениях сил f_f , f_m , f_r можно учесть в коэффициентах K , χ' и χ'' .

Интенсивность взаимодействия фаз сильно зависит от характерного размера включений a и их числа n в единице объема смеси. Причем

$$\alpha_2 = \eta n a^3 \quad (5.10)$$

где η — безразмерный коэффициент, определяемый формой частиц ($\eta = 4\pi/3$ для сферических частиц радиуса a). Величина n помимо конвекции может меняться за счет процессов дробления, слипания частиц и образования новых, что характеризуется величиной ψ в уравнении числа частиц

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla (n v_2) = \psi \quad (5.11)$$

Ввиду отсутствия дробления, слипания, образования новых частиц ($\psi = 0$) и при условии несжимаемости материала включений ($\rho_2^\circ = \text{const}$) уравнение (5.11) есть следствие уравнения массы второй фазы при условии $a = \text{const}$.

§ 6. Энергетические переходы при фазовых превращениях. Чтобы конкретнее представить обмен энергией между фазами из-за фазовых превращений рассмотрим элементарный объем $dV = dV_1 + dV_2$, покоящейся среды (фигура) вблизи межфазной границы Σ в моменты времени t и $t + dt$, когда граница Σ смещается в положение Σ' за счет перехода $2 \rightarrow 1$.

При этом масса второй фазы

$$J_{21} dV dt \quad (J_{21} dV dt \ll \rho_1^\circ dV_i = \rho_i dV')$$

находящаяся в момент t между поверхностями Σ и Σ_2 , перейдет (расширится) в положение между поверхностями Σ' и Σ_1 .

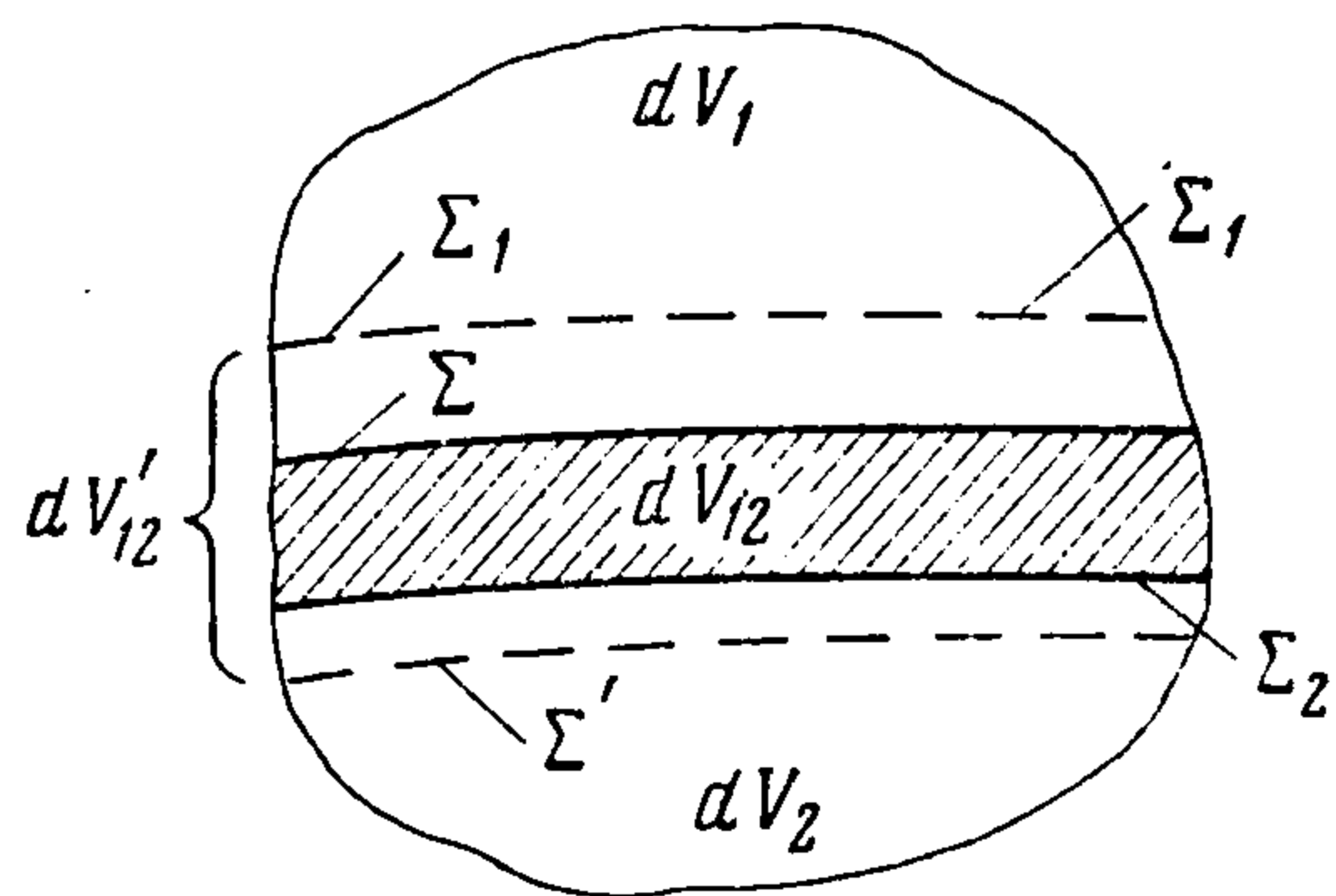
Для простоты не будем рассматривать взаимодействие выделенного объема dV с внешней средой, а также фазы будем считать однородными вплоть до самой межфазной границы.

Учитывая (5.4), запишем уравнения притока тепла для трех фиксированных масс:

1) масса вещества, которая в момент t была в виде первой фазы (над поверхностью Σ);

2) масса вещества, которая в момент $t + dt$ была в виде второй фазы (под поверхностью Σ');

3) масса вещества, которая претерпела переход $2 \rightarrow 1$ (в момент t занимала объем между Σ и Σ_2).



Тогда имеем

$$\begin{aligned} \rho_1 dV du_1 &= q_{21} dt - J_{21} dV dt x_{1,21} + J_{21} dV dt \kappa_1 p \Delta \vartheta \\ (\rho_2 dV - J_{21} dV dt) du_2 &= q_{12} dt - J_{21} dV dt x_{2,21} + J_{21} dV dt \kappa_2 p \Delta \vartheta \\ J_{21} dV dt (u_1 + du_1 - u_2) &= J_{21} dV dt (x_{1,21} + x_{2,21}) - J_{21} dV dt p \Delta \vartheta \\ (\kappa_1 + \kappa_2 = 1, \Delta \vartheta = 1 / \rho_1^\circ - 1 / \rho_2^\circ) & \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь последние слагаемые соответствуют работе внутренних сил при изменении объема. С точностью до малых более высокого порядка из (6.1) получим

$$\begin{aligned} \rho_1 du_1 &= q_{21} dt - J_{21} x_{1,21} dt + J_{21} \kappa_1 p \Delta \vartheta \\ \rho_2 du_2 &= -q_{21} dt - J_{21} x_{2,21} dt + J_{21} \kappa_2 p \Delta \vartheta \\ u_1 - u_2 &= x_{1,21} + x_{2,21} - p \Delta \vartheta \end{aligned} \quad (6.2)$$

Аналогичные соотношения можно получить, если рассмотреть переход $1 \rightarrow 2$. Вводя энтальпии фаз $i_i = u_i + p_i / \rho_i^\circ$, из последнего уравнения (6.2) следует

$$x_{1,21} + x_{2,21} = i_1 - i_2, \quad x_{1,12} + x_{2,12} = i_2 - i_1 \quad (6.3)$$

Обобщая полученные выражения и на случай перехода $1 \rightarrow 2$, первые два уравнения (6.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} d(\rho_1 u_1) / dt &= q_{21} + J_{21} (u_1 - x_{1,21}) - J_{12} (u_1 + x_{1,12}) + \\ &+ (J_{21} - J_{12}) \kappa_1 p \Delta \vartheta \\ d(\rho_2 u_2) / dt &= -q_{21} - J_{21} (u_2 + x_{2,21}) + J_{12} (u_2 - x_{2,12}) + (J_{21} - J_{12}) \kappa_2 p \Delta \vartheta \\ (\kappa_1 + \kappa_2 = 1, \Delta \vartheta = 1 / \rho_1^\circ - 1 / \rho_2^\circ) & \end{aligned} \quad (6.4)$$

Таким образом, при переходе $2 \rightarrow 1$ внутренняя энергия, приходящаяся на вторую фазу, уменьшается на величину $J_{21} (u_2 + x_{2,21})$, часть которой $J_{21} (u_1 - x_{1,21})$ переходит во внутреннюю энергию первой фазы, а оставшаяся часть $p \Delta \vartheta$ распределяется между фазами (пропорционально κ_i) в виде работы внутренних сил. В результате величины u_{12} и u_{21} можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_{12} &= u_2 - x_{2,12} + \kappa_2 p \Delta \vartheta = u_1 + x_{1,12} - \kappa_1 p \Delta \vartheta \\ u_{21} &= u_2 + x_{2,21} - \kappa_2 p \Delta \vartheta = u_1 - x_{1,21} + \kappa_1 p \Delta \vartheta \end{aligned} \quad (6.5)$$

Для дальнейшего необходимы данные о том, какая часть энергии $i_1 - i_2$ затрачивается или поглощается отдельно первой и второй фазами на превращение $2 \rightarrow 1$ (или $1 \rightarrow 2$) некоторой массы второй (первой) фазы, т. е. нужно задать соотношения для u_{12} и u_{21} (см. (3.6)) или $x_{1,12}$ и $x_{1,21}$. Следуя [12], будем принимать

$$x_{i,ij} = i_{js} - i_i \quad (6.6)$$

где индекс s относится к состоянию насыщения

$$i_{js} = i_j(p, T_s(p)) \quad (6.7)$$

а T_s — температура равновесного перехода $1 \rightleftharpoons 2$. С учетом (6.3) из (6.6) следует

$$x_{2,21} = i_{1s} - i_2, \quad x_{1,21} = i_1 - i_{1s}, \quad x_{2,12} = i_2 - i_{2s}, \quad x_{1,12} = i_{2s} - i_1 \quad (6.8)$$

Соотношения (6.6) или (6.8) фактически постулируют тот факт, что i -я составляющая при превращении $i \rightarrow j$ непосредственно затрачивает или поглощает энергию,

необходимую для приведения при окружающем давлении массы, претерпевающей этот переход, до состояния в виде j -й фазы при насыщении, а остальная энергия, необходимая для доведения этой массы из последнего состояния до состояния имеющейся j -й фазы, затрачивается (поглощается) самой j -й фазой.

Величину $q_{12} = -q_{21}$, описывающую интенсивность теплообмена между составляющими, который возникает из-за несовпадения их температур, во многих случаях (когда несуществен лучистый теплообмен) можно полагать пропорциональной разнице температур фаз

$$q_{12} = \beta (T_1 - T_2) \quad (6.9)$$

где β определяется формой, размером включений, физическими свойствами и относительным движением фаз.

§ 7. Полная система уравнений движения дисперсной смеси. Дальнейшая конкретизация модели движения смеси жидкости или газа с инородными включениями (§ 5) связана с явным определением мощности работы внутренних сил в единице массы i -й фазы A_i (см. (3.7)), которая, вообще говоря, представляется в виде (суммирование по верхним индексам)

$$A_i = \frac{\sigma_i^{okl} e_i^{okl}}{\rho_i^o} = \frac{p_i}{\rho_i^{o2}} \frac{d_i \rho_i^o}{dt} + \frac{\tau_i^{okl} e_i^{okl}}{\rho_i^o} \quad (7.1)$$

Второе слагаемое дает диссипируемую энергию в i -й фазе из-за внутренних вязких сил, проявляющихся как за счет градиентов в поле скоростей v_i , так и за счет взаимодействия с другой фазой. Так как непосредственное определение истинного тензора скоростей деформации в рассматриваемом случае является затруднительным, следует воспользоваться некоторыми допущениями, вытекающими из анализа движения включений в несущем потоке среды и (3.6). Например

$$\rho_i A_i = \frac{\alpha_i p_i}{\rho_i^o} \frac{d_i \rho_i^o}{dt} + v_i f_{ji} (v_j - v_i) + \tau_i^{kl} e_i^{kl} + J_{ji} \frac{(v_{ji} - v_i)^2}{2} - J_{ij} \frac{(v_{ij} - v_i)^2}{2} \quad (7.2)$$

$$v_1 + v_2 = 1$$

Коэффициенты v_i , впервые введенные из формальных соображений в [19], показывают долю диссипируемой кинетической энергии смеси из-за силового взаимодействия составляющих, переходящую непосредственно во внутреннюю энергию i -й фазы.

В связи с этим заметим, что составляющие межфазной силы r_{12} (см. (5.7) — (5.9)), — связанная с эффектом присоединенных масс f_m , сила Магнуса f_r , так же как и сила Архимеда, приводят непосредственно к переходу части кинетической энергии макроскопического движения не во внутреннюю (тепловую) энергию фаз, а в кинетическую энергию мелкомасштабных (см. замечание перед (2.6)) течений внутри и около включений. Последняя, как уже указывалось, не учитывается в существующих теориях взаимопроникающего движения, поэтому в (7.2) силы f_m и f_r входят как диссипативные.

Во многих случаях, когда сдвиговыми деформациями включений (частиц, капель, пузырей) по сравнению с несущей фазой можно пренебречь, справедливы следующие соотношения:

$$v_2 = 0, \quad v_1 = 1, \quad v_{21} = v_{12} = v_2 \quad (7.3)$$

Таким образом, с учетом (3.7), (5.1), (5.2), (5.5), (5.6), (6.8) и (7.2) система уравнений двухфазного движения (3.2) для указанных в § 5 диспер-

сных гетерогенных смесей примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla (\rho_1 v_1) &= J_{21} - J_{12} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla (\rho_2 v_2) &= J_{12} - J_{21}, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla (n v_2) = \psi \\ \rho_1 \frac{d_1 v_1}{dt} &= -\alpha_1 \nabla P + \nabla^k \tau_1^k - f_{12} + J_{21} (v_{21} - v_1) - J_{12} (v_{12} - v_1) + \rho_1 F_1 \\ \rho_2 \frac{d_2 v_2}{dt} &= -\alpha_2 \nabla P + f_{12} - J_{21} (v_{21} - v_2) + J_{12} (v_{12} - v_2) + \rho_2 F_2 \\ \rho_1 \frac{d_1 u_1}{dt} &= \frac{\alpha_1 p}{\rho_1^\circ} \frac{d_1 \rho_1^\circ}{dt} + v_1 f_{12} (v_1 - v_2) + \tau_1^{kl} e_1^{kl} + J_{21} \frac{(v_{21} - v_1)^2}{2} - \\ &\quad - J_{12} \frac{(v_{12} - v_1)^2}{2} + J_{21} (i_{1s} - i_1) - J_{12} (i_{2s} - i_1) - q_{12} - \nabla q_1 + \rho_1 Q_1 \\ \rho_2 \frac{d_2 u_2}{dt} &= \frac{\alpha_2 p}{\rho_2^\circ} \frac{d_2 \rho_2^\circ}{dt} + v_2 f_{12} (v_1 - v_2) - J_{21} \frac{(v_{21} - v_2)^2}{2} + J_{12} \frac{(v_{12} - v_2)^2}{2} - \\ &\quad - J_{21} (i_{1s} - i_2) + J_{12} (i_{2s} - i_2) + q_{12} + \rho_2 Q_2 \\ p_1 (\rho_1^\circ, T_1) &= p_2 (\rho_2^\circ, T_2) = p \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \rho_1^\circ = \rho_1 / \alpha_1, \rho_2^\circ = \rho_2 / \alpha_2, v_1 + v_2 = 1, a^3 = \alpha_2 / \eta n)$$

Соотношения (5.1) — (5.4) (или их обобщения), характеризующие физико-химические свойства фаз, соотношения (или их обобщения) типа (5.7) — (5.9), (6.9), (7.3), описывающие взаимодействие фаз, вместе с уравнениями кинетики для ψ , J_{12} и J_{21} при заданных внешних воздействиях (F_1 , F_2 , Q_1 , Q_2) замыкают систему уравнений (7.4) в области непрерывного течения.

Из (7.4) можно получить уравнения импульса и энергии каждой фазы в форме (3.2), но имеющие более явный вид

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{d_i v_i}{dt} &= \nabla^k \sigma_i^{*k} + r_{ji}^* + J_{ji} (v_{ji} - v_i) - J_{ij} (v_{ij} - v_i) + \rho_i F_i \quad (7.5) \\ \rho_i \frac{d_i}{dt} \left(u_i + \frac{v_i^2}{2} \right) &= \nabla^k \sigma_i^{*k} v_i - p \frac{\partial x_i}{\partial t} + f_{ji} v_i + v f_{ji} (v_j - v_i) + \\ &\quad + J_{ji} \left(i_{is} - e_i + \frac{v_{ji}^2 - v_i^2}{2} \right) - J_{ij} \left(i_{js} - e_i + \frac{v_{ij}^2 - v_i^2}{2} \right) + q_{ji} - \nabla q_i + \\ &\quad + \rho_i (F_i v_i + Q_i) \\ \sigma_1^{*kl} &= -\alpha_1 p \delta^{kl} + \tau_1^{kl}, \quad \sigma_2^{*kl} = -\alpha_2 p \delta^{kl}, \quad r_{12}^* = -r_{21}^* = f_{12} + p \nabla \alpha_2 \\ &\quad (i = 1, 2; i \neq j) \end{aligned}$$

Эта система соответствует взаимопроникающему движению двух взаимодействующих сплошных сред, в которых формально определены приведенные тензора поверхностных сил σ_1^{*kl} и σ_2^{*kl} , работа этих сил, приведенные силы взаимодействия r_{12}^* и другие члены, описывающие обмен массой, импульсом и энергией.

Учитывая (7.5), можно в более явном виде записать интегральные уравнения для смеси (2.5) и (2.7), которые понадобятся при выводе соотношений на поверхности разрыва

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 \mathbf{v}_1 + \rho_2 \mathbf{v}_2) dV = - \int_S (\rho_1 \mathbf{v}_1 v_1^n + \rho_2 \mathbf{v}_2 v_2^n) dS +$$

$$+ \int_S (\sigma_1^{*n} + \sigma_2^{*n}) dS + \int_V (\rho_1 \mathbf{F}_1 + \rho_2 \mathbf{F}_2) dV$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_1 \left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) + \rho_2 \left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) \right] dV = - \int_S \left[\rho_1 \left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) v_1^n + \right.$$

$$\left. + \rho_2 \left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) v_2^n \right] dS + \int_S (\sigma_1^{*n} \mathbf{v}_1 + \sigma_2^{*n} \mathbf{v}_2) dS - \int_S (q_1^n + q_2^n) dS +$$

$$+ \int_V [\rho_1 (\mathbf{F}_1 \mathbf{v}_1 + Q_1) + \rho_2 (\mathbf{F}_2 \mathbf{v}_2 + Q_2)] dV$$

$$(\sigma_1^{*kl} = -\alpha_1 p \delta^{kl} + \tau_1^{kl}, \quad \sigma_2^{*kl} = -\alpha_2 p \delta^{kl}) \quad (7.6)$$

§ 8. Условия на поверхностях разрыва. При течении гетерогенной смеси могут возникать зоны (ударные волны, пристенные слои, контактные поверхности), в которых параметры среды изменяются существенно на расстояниях порядка размеров самих включений или меньших (нулевых с точки зрения сплошной среды). В этих зонах представления сплошной гетерогенной среды и следующие из них дифференциальные уравнения (3.2) или (7.4) не имеют смысла. Поэтому, как это обычно делается, необходимо ввести в рассмотрение поверхности разрыва параметров течения, по обе стороны от которой выполняются уравнения непрерывного движения. Получим основные условия на поверхности разрыва Σ в системе координат, связанной с последней, исходя из интегральных уравнений § 2, которые применим к малому цилиндрическому объему, покоящемуся относительно Σ , с основаниями, параллельными Σ и расположенными по разные стороны от нее. При этом будем предполагать, что процессы тепло- и массообмена на этих поверхностях не успевают произойти. Пропуская обычные в таких случаях выкладки [15], из (2.1) и (7.6) получим

$$(\rho_1 v_1^n)^+ = (\rho_1 v_1^n)^- = j_1, \quad (\rho_2 v_2^n)^+ = (\rho_2 v_2^n)^- = j_2$$

$$j_1 [\mathbf{v}_1] + j_2 [\mathbf{v}_2] + [\sigma_1^{*n}] + [\sigma_2^{*n}] = 0 \quad (8.1)$$

$$j_1 [u_1 + 1/2 v_1^2] + j_2 [u_2 + 1/2 v_2^2] + [\sigma_1^{*n} \mathbf{v}_1] + [\sigma_2^{*n} \mathbf{v}_2] + [q_1^n] + [q_2^n] = 0$$

$$([\] = ()^+ - ()^-)$$

Здесь индексы плюс и минус сверху относятся к состояниям по разные стороны от поверхности разрыва; \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ — нормальное и касательное направления к поверхности Σ . Чтобы замкнуть систему (8.1), т. е. иметь возможность по параметрам с одной стороны Σ определять все параметры течения с другой, необходимо использовать данные о физико-механических свойствах фаз и их взаимодействиях друг с другом в рассматриваемых узких зонах.

Для указанных в § 5 гетерогенных сред с учетом выражений (7.6) для приведенных тензоров σ_i^{*kl} , если пренебречь действием вязких напряжений и теплопроводности вне поверхности разрыва, соотношения (8.1) примут вид

$$j_1 [v_1^n] + j_2 [v_2^n] + [p] = 0, \quad j_1 [v_1^\tau] + j_2 [v_2^\tau] = 0$$

$$j_1 [i_1 + 1/2 v_1^2] + j_2 [i_2 + 1/2 v_2^2] = 0 \quad (8.2)$$

Одно из возможных дополнительных соотношений получено в [20] путем рассмотрения предела последовательности непрерывных решений, стремящихся к разрывному. В результате вместо третьего уравнения (8.2) имеет место

$$j_1 [i_1 + 1/2 v_1^2] = 0, \quad j_2 [i_2 + 1/2 v_2^2] = 0 \quad (8.3)$$

Наряду с уравнениями состояния фаз (5.4), уравнением (5.6) (равновесие фаз по давлению) для замыкания (8.2) и (8.3) необходимо использовать соотношения, характеризующие обмен импульсом между составляющими на скачке. В [11] для случая смеси газа с несжимаемыми частицами в качестве таких соотношений используются

$$1/2 [v_2^2] + [p] / \rho_2^0 = 0, \quad j_1 [v_1^\tau] = j_2 [v_2^\tau] = 0 \quad (8.4)$$

и, кроме того, проведена классификация разрывов.

§ 9. Термодинамический анализ. Производство энтропии. Исходя из предположения об аддитивности внутренней энергии смеси по массам составляющих (§ 2) и предположения о локальном равновесии в пределах фазы, можно ввести функцию удельной внутренней энергии для смеси

$$\rho u(\rho_1^\circ, \rho_2^\circ, T_1, T_2, \alpha) = \rho_1 u_1(\rho_1^\circ, T_1) + \rho_2 u_2(\rho_2^\circ, T_2) \quad (9.1)$$

и аналогично удельную энтропию смеси

$$\rho s(\rho_1^\circ, \rho_2^\circ, T_1, T_2, \alpha) = \rho_1 s_1(\rho_1^\circ, T_1) + \rho_2 s_2(\rho_2^\circ, T_2) \quad (9.2)$$

При этом введение понятия температуры T смеси при $T_1 \neq T_2$, как это делается в [7,8], является некорректным, так как, несмотря на локальное равновесие каждой фазы, смесь не будет локально равновесной. Поэтому представления типа $u(\rho, T)$ и $s(\rho, T)$ для гетерогенных смесей при $T_1 \neq T_2$ лишено смысла и, например, что сразу видно, приводит или к игнорированию некоторых степеней свободы поведения смеси, или вынуждает [7] рассматривать T как функционал, определяемый историей процесса.

Получим диссипативную функцию для среды, описываемой уравнениями (7.4) или (7.5), т. е. функцию, дающую производство энтропии смеси для фиксированной массы среды за счет внутренних процессов. Следуя [21], определим субстанциональную производную для любой аддитивной по массам составляющих функции (например s). Для рассмотренного в § 2 объема V имеем

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho s) dV = - \int_V \sum_{j=1}^m \rho_j s_j v_j^n dS + \int_V \rho \frac{ds}{dt} dV \quad (9.3)$$

Здесь последний член дает изменение s , не связанное с переносом вещества. Переходя к дифференциальной форме, используя (9.2) и уравнения сохранения масс каждой фазы (3.2), для случая $m = 2$ получим

$$\rho \frac{ds}{dt} = \rho_1 \frac{d_1 s_1}{dt} + \rho_2 \frac{d_2 s_2}{dt} + (J_{12} - J_{21})(s_2 - s_1) \quad (9.4)$$

Фактически (9.3) или (9.4) есть определение оператора d/dt для любой функции, аддитивной по массе входящих в смесь фаз.

Условие локального равновесия в пределах каждой фазы приводит к соотношению Гиббса (5.5) для вещества каждой фазы, которое, принимая во внимание (1.2) и (5.6), можно представить в виде

$$\rho_i T_i \frac{d_i s_i}{dt} = \rho_i \frac{d_i u_i}{dt} - \frac{\alpha_i p_i}{\rho_i^\circ} \frac{d_i \rho_i^\circ}{dt} \quad (9.5)$$

Заметим, что требование локального равновесия фаз помимо обычных накладывает ограничение сверху на разницу температур фаз $|T_1 - T_2|$.

Таким образом, из (9.4), (9.5) и (7.4) имеем

$$\begin{aligned} \rho \frac{ds}{dt} = & \frac{\rho_1 Q_1}{T_1} + \frac{\rho_2 Q_2}{T_2} - \frac{\nabla q_1}{T_1} + \frac{\tau_1^{kl} e_1^{kl}}{T_1} + f_{12} (v_1 - v_2) \left(\frac{v_1}{T_1} + \frac{v_2}{T_2} \right) + \\ & + q_{12} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) + J_{21} \left(s_1 - s_2 + \frac{i_{1s} - i_1}{T_1} - \frac{i_{2s} - i_2}{T_2} + \frac{(v_{21} - v_1)^2}{2T_1} - \right. \\ & \left. - \frac{(v_{21} - v_2)^2}{2T_2} \right) + J_{12} \left(s_2 - s_1 - \frac{i_{2s} - i_1}{T_1} + \frac{i_{2s} - i_2}{T_2} - \frac{(v_{12} - v_1)^2}{2T_1} + \frac{(v_{12} - v_2)^2}{2T_2} \right) \end{aligned} \quad (9.6)$$

Величину ds/dt можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d^{(e)}s}{dt} + \frac{d^{(i)}s}{dt} \quad (9.7)$$

первое из которых определяет приращение энтропии смеси за счет притока энтропии извне из-за энергообмена с внешней средой, а второе (всегда неотрицательное) — за счет внутренних необратимых процессов внутри фазы или между фазами

$$\rho \frac{d^{(e)}s}{dt} = \frac{\rho_1 Q_1}{T_1} + \frac{\rho_2 Q_2}{T_2} - \nabla \left(\frac{q_1}{T_1} \right) \quad (9.8)$$

$$\rho \frac{d^{(i)}s}{dt} = \sigma = J_T X_T + J_\tau^{kl} X_\tau^{kl} + J_f X_f + J_q X_q + J_{21} X_{21} + J_{12} X_{12}$$

Производство энтропии σ представляет, как обычно, сумму произведений термодинамических сил X

$$\begin{aligned} X_T &= \nabla \left(\frac{1}{T_1} \right), \quad X_\tau^{kl} = \frac{e_1^{kl}}{T_1}, \quad X_f = (v_1 - v_2) \left(\frac{v_1}{T_1} + \frac{v_2}{T_2} \right), \quad X_q = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \\ X_{21} &= s_1 - s_2 + \frac{i_{1s} - i_1}{T_1} - \frac{i_{1s} - i_2}{T_2} + \frac{(v_{21} - v_1)^2}{2T_1} - \frac{(v_{21} - v_2)^2}{2T_2} \\ X_{12} &= s_2 - s_1 - \frac{i_{2s} - i_1}{T_1} + \frac{i_{2s} - i_2}{T_2} - \frac{(v_{12} - v_1)^2}{2T_1} + \frac{(v_{12} - v_2)^2}{2T_2} \end{aligned} \quad (9.9)$$

на термодинамические потоки

$$J_T = q_1, \quad J_\tau^{kl} = \tau_1^{kl}, \quad J_f = f_{12}, \quad J_q = q_{12}, \quad J_{21}, \quad J_{12} \quad (9.10)$$

При наличии конечных связей между термодинамическими силами X и термодинамическими потоками J величину σ можно рассматривать как диссипативную функцию X или J . На основе (9.8) — (9.10) можно предлагать, например, линейные соотношения между ними, частным случаем которых и является (5.2), (5.3), (6.9) и в некоторых случаях первая формула (5.9).

Введем обозначения

$$\theta_1 = (T_1 - T_s) / T_s, \quad \theta_2 = (T_2 - T_s) / T_s \quad (9.11)$$

В случае малых отклонений температур фаз T_1 и T_2 от температуры насыщения $T_s(p)$, т. е. при $|\theta_1| \ll 1$, $|\theta_2| \ll 1$ выражения для термодинамических сил X_{12} и X_{21} , связанных с фазовыми превращениями, упрощаются. В этом случае

$$\begin{aligned} i_1 &= i_{2s} + l + c_{p1} T_s \theta_1, & i_2 &= i_{2s} + c_{p2} T_s \theta_2 \\ s_1 &= s_2 + l / T_s + c_{p1} \theta_1, & s_2 &= s_{2s} + c_{p2} \theta_2 \end{aligned} \quad (9.12)$$

где $l(p)$ — теплота перехода $2 \rightarrow 1$, c_{p1} и c_{p2} — теплоемкости при постоянном давлении первой и второй фаз. Учитывая (9.12), из (9.9) следует

$$X_{21} = \frac{l\theta_2}{T_s} + \frac{(v_{21} - v_1)^2}{2T_s} - \frac{(v_{21} - v_2)^2}{2T_s}, \quad X_{12} = -\frac{l\theta_1}{T_s} + \frac{(v_{12} - v_1)^2}{2T_s} + \frac{(v_{12} - v_2)^2}{2T_s} \quad (9.13)$$

Для скоростей фазовых переходов можно предложить следующие линейные уравнения кинетики

$$\begin{aligned} J_{21} &= L_{21} X_{21} \quad (X_{21} > 0), & J_{21} &= 0 \quad (X_{21} \leq 0) \\ J_{12} &= L_{12} X_{12} \quad (X_{12} > 0), & J_{12} &= 0 \quad (X_{12} \leq 0) \\ & & (L_{21} \geq 0, \quad L_{12} \geq 0) \end{aligned} \quad (9.14)$$

Всегда справедливы следующие неравенства:

$$J_{21} \geq 0, \quad J_{12} \geq 0, \quad J_{21} X_{21} \geq 0, \quad J_{12} X_{12} \geq 0 \quad (9.15)$$

Отметим, что используемые кинетические уравнения обычно имеют вид [15, 22]

$$J_{ij} = J_{ij} (l\theta_i / T_s) \quad (9.16)$$

т. е. не учитывают диссипативные эффекты из-за несовпадения скоростей фаз, которые,

как это следует из (9.13) в случае (7.3), при прочих равных условиях ускоряют переход в высокотемпературную и замедляют переход в низкотемпературную фазу.

Аналогично можно обобщить многие полученные уравнения на случай смеси более чем двух составляющих ($m > 2$) (частный случай такого обобщения имеется в [23]), а также учесть возможную многопараметричность фаз (химические реакции внутри фазы, электромагнитные эффекты и т. д.).

В заключение отметим только что вышедшую монографию [24], в которой даны подробный обзор литературы и вывод основных уравнений механики смесей упругой и жидкой фаз без фазовых переходов.

Поступила 2 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Р а х м а т у л и н Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
2. T r u e s d e l l C. Sulle basi della termomechanica. Rend. Acad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis., mat. e natur., Ser. 8, 1957, vol. 22, pp. 33—38, 158—166.
3. Т е л е т о в С. Г. Вопросы гидродинамики двухфазных смесей. I. Уравнения гидродинамики и энергии. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астрон., физ. хим., 1958, № 2.
4. С л е з к и н Н. А. Дифференциальные уравнения движения пульпы. Докл. АН СССР, 1952, т. 86, № 2.
5. Б а р е н б л а т т Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. ПММ, 1953, т. 17, вып. 3.
6. С е д о в Л. И. Проблемы науки. М., «Знание», 1966.
7. G r e e n A. E., N a g h d i P. M. A theory of mixtures. Arch. Rat. Mech. and Anal., 1967, vol. 24, No. 4, pp. 243—263. (Рус. перев.: Теория смесей. Механика, 1968, № 4).
8. M u l l e r I. A thermodynamic theory of mixtures of fluids. Arch. Rat. Mech. and Anal., 1967, vol. 28, No. 1.
9. D u n w o o d y N. T., M u l l e r I. A thermodynamic theory of two chemically reacting ideal gases with different temperatures. Arch. Rat. Mech. and Anal., 1968, vol. 29, No. 5.
10. Н и г м а т у л и н Р. И. К теории смесей Грина и Нахди. ПМТФ, 1970, № 3.
11. К р а й к о А. Н., С т е р н и н Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
12. Н и г м а т у л и н Р. И. Уравнения гидромеханики и волны уплотнения в двухскоростной и двухтемпературной сплошной среде при наличии фазовых превращений. Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 5.
13. З о л о т а р е в П. П., Н и к о л а е в с к и й В. Н. Термодинамический анализ нестационарных процессов в насыщенных жидкостью и газом деформируемых пористых средах. Сб. «Теория и практика добычи нефти» (Ежегодник, 1966), М., «Недра», 1966.
14. Н и г м а т у л и н Р. И. Модель движения и ударные волны в двухфазных твердых телах с фазовыми переходами. ПМТФ, 1970, № 1.
15. С е д о в Л. И. Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1970.
16. С а ф р а й В. М. О применении ячеечной модели к расчету вязкости дисперсных систем. ПМТФ, 1970, № 1.
17. М я с н и к о в В. П. О динамических уравнениях движения двухкомпонентных систем. ПМТФ, 1967, № 2.
18. Б у е в и ч Ю. А. К статической механике частиц, взвешенных в потоке газа. ПММ, 1968, т. 32 вып. 1.
19. М а р о н В. И., М е д в е д е в В. А. К выводу уравнений энергии взаимопроникающих движений газовых сред. Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. и механ., 1963, № 1.
20. Н и к о л а е в с к и й В. Н. Гидродинамический анализ ударных адиабат гетерогенных смесей веществ. ПМТФ, 1969, № 3.
21. Н и г м а т у л и н Р. И. Некоторые соотношения неравновесной термодинамики для двухтемпературного и двухскоростного газа с фазовыми переходами. Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 5.
22. Д е й ч М. Е., Ф и л и п п о в Г. А. Газодинамика двухфазных сред. М., «Энергия», 1968.
23. Н и г м а т у л и н Р. И. Некоторые вопросы гидромеханики двухфазных полидисперсных сред. Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 3.
24. Н и к о л а е в с к и й В. Н., Б а с н и е в К. С., Г о р б у н о в А. Т., З о т о в Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М., «Недра», 1970.