Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ОБ ОДНОМ ВИДЕ УСТАНОВИВШИХСЯ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Я. И. Секерж-Зенькович

(Москва)

Рассматривается задача об установившихся капиллярно-гравитационных волнах конечной амплитуды, вызванных давлением, периодически распределенным по поверхности потока бесконечной глубины. Дается строгое решение этой задачи, задавая давление на поверхности некоторым бесконечным тригонометрическим рядом. Исследуется и особый случай, когда длина волны заданного давления совпадает с длиной установившейся свободной линейной волны, отвечающей взятой скорости потока и постоянному давлению вдоль поверхности. Рассмотренные здесь волны перестают существовать при тождественном обращении в нуль периодической части распределенного по поверхности давления и течение переходит в равномерный поток. Такие волны названы вынужденными [1]. Аналогичная задача для гравитационных волн была рассмотрена автором ранее [2]. Аналогичные, но свободные капиллярно-гравитационные волны были также исследованы автором ранее [3,4], методом Леви-Чивита, сводящим задачу к нелинейному дифференциальному уравнению.

Здесь задача сведена к решению некоторого нелинейного интегрального уравнения. Дается его исследование и построение его решения в любом приближении. До конца рассчитаны первые три приближения. Дано приближенное уравнение профиля волны.

1. Постановка задачи и вывод основного интегрального уравнения. Рассмотрим плоскопараллельное установившееся движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости, ограниченной только сверху свободной поверхностью, на которой давление $p_0 = p_0' + p_0(x)$; здесь $p_0' = \mathrm{const}$, а $p_0(x)$ — заданная периодическая функция от горизонтальной координаты x. Предположим, что поток движется слева направо с постоянной скоростью c на бесконечной глубине. Так как на поверхности давление является периодической функцией x, то поверхность принимает форму неподвижной периодической волны в координатах, связанных с прогрессивной волной, имеющей скорость — c. Здесь показывается, что вынужденные волны существуют при любых конечных значениях скорости c.

Пусть искомая волна и давление $p_0(x)$ обладают одинаковой симметрией относительно вертикали гребня. Совместим ось y с осью симметрии и направим ее вертикально вверх. За начало координат O примем точку пересечения оси y со свободной поверхностью, а ось x направим вправо.

Плоскость течения xy примем за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$. Введем обычные обозначения: φ — потенциал скоростей, ψ — функция тока, $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал скоростей, U, V — — проекции вектора скорости $\mathfrak{q}$ на оси координат.

Тогда имеем

$$dw/dz = -U + iV, \qquad U = -\partial\varphi / \partial x, \qquad V = -\partial\varphi/\partial y$$

Для вывода из граничного условия основного уравнения задачи сначала отобразим конформно область, занятую одной волной и представляющую собой вертикальную бесконечную полуполосу, ограниченную сверху волнообразной кривой, на полуполосу $0 \leqslant \varphi \leqslant c\lambda$, $0 \leqslant \psi \leqslant \infty$ в плоскости w, а затем эту полуполосу на внутренность единичного круга с центром в начале координат плоскости $u = u_1 + iu_2$. При этом предполагается, что длина волны λ совпадает с периодом функции $p_0(x)$.

Как известно, последнее отображение дается формулой

$$w = \frac{\lambda c}{2\pi i} \ln u \tag{1.1}$$

При этом профиль волны перейдет в окружность единичного круга с разрезом вдоль радиуса $\arg u = 0$.

Отображение круга $|u| \leqslant 1$ на область одной волны плоскости z определяется из соотношения

$$\frac{dz}{du} = -\frac{\lambda}{2\pi i} \frac{f(u)}{u}, \qquad f(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k u^k \tag{1.2}$$

Коэффициенты a_k вещественны, так как волна симметрична относительно оси y и $a_0 = 1$, ибо скорость потока в бесконечности направлена по оси x и равна c.

Как обычно, вводя функцию [1]

$$\omega(u) = \Phi + i\tau = -i \ln f(u) \tag{1.3}$$

из (1.2) и (1.3) находим, при $u = e^{i\theta}$ (θ — угол радиуса вектора с осью u_1), дифференциальное соотношение; отделяя в нем действительные и мнимые части и интегрируя, получаем параметрическое уравнение профиля волны

$$x = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\theta e^{-\tau(\eta)} \cos\Phi(\eta)\, d\eta, \qquad y = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\theta e^{-\tau(\eta)} \sin\Phi(\eta)\, d\eta \tag{1.4}$$

Из формул (1.3), (1.2) и (1.1) следует, что всюду в потоке функция Φ равна углу вектора скорости $\mathbf{q}$ с осью x и что

$$q = |\mathbf{q}| = c \exp(\tau) \tag{1.5}$$

Переходя к граничному условию на поверхности, берем для нее интеграл Бернулли

$$p/\rho = C - gy - {}^1/_2\, q^2 \qquad (1.6$$

где C — константа, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность. На свободной поверхности разность давлений уравновешивается нормальной составляющей сил поверхностного натяжения. Для этих сил по закону

Лапласа имеем

$$p - p_0 = \pm \mu / R, \quad p_0 = p_0' + p_0(x) \tag{1.7}$$

Здесь p — давление со стороны жидкости, p_0 — давление со стороны свободной поверхности, μ — капиллярная постоянная, R — радиус кривизны в точках поверхности. Отсюда, выражая кривизну через $d\Phi \,/\, d\theta$, получим

$$p - p_0 = \frac{2\pi\mu}{\lambda c} q \frac{d\Phi}{d\theta} \tag{1.8}$$

Подставив p из (1.8) в (1.6), находим

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \nu \left[\delta e^{-\tau} - e^{\tau} - \frac{2\pi}{\lambda} \varkappa y e^{-\tau} - p_0^*(x) e^{-\tau} \right] \tag{1.9}$$

где

$$\nu = \frac{\lambda c^2 \rho}{4\pi\mu}, \quad \delta = \frac{2(C\rho - p_0')}{\rho c^2}, \quad \varkappa = \frac{g\lambda}{\pi c^2}, \quad p_0^*(x) = \frac{2p_0(x)}{\rho c^2} \tag{1.10}$$

В (1.9) y определяется второй формулой (1.4). Выделив в правой части (1.9) слагаемые линейные относительно Φ и τ, получаем

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \nu \left\{ \delta - 1 + (\delta + 1)\tau + \varkappa \int_0^{\theta} \Phi(\eta)\, d\eta - S(\theta)\,(1 - \tau) + F[\tau, \Phi, S, \delta] \right\} \tag{1.11}$$

где

$$F[\tau, \Phi, S, \delta] = \delta(e^{-\tau} - 1 + \tau) - (e^{\tau} - 1 - \tau) +$$
$$+ \varkappa e^{-\tau} \int_0^{\theta} [e^{-\tau(\eta)} \sin\Phi - \Phi(\eta)]\, d\eta - \varkappa \int_0^{\theta} \Phi(\eta)\, d\eta + \varkappa e^{-\tau} \int_0^{\theta} \Phi(\eta)\, d\eta -$$
$$- S(\theta)(e^{-\tau} - 1 + \tau)$$

Здесь предполагается, что с точностью до константы, включенной в p_0'

$$p_0^*(x) = S(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n d_n \cos n\theta \tag{1.12}$$

где ε — малый положительный безразмерный параметр, d_n — заданные действительные числа, причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n d_n$ сходится в круге $\varepsilon_0 > 0$. Заметим, что в исходной задаче $p_0^*(x)$ — заданная периодическая функция от x. Можно, однако, показать, что решение изучаемой задачи при условии (1.12) соответствует заданию ряда

$$p_0^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n c_n' \cos \frac{2\pi n}{\lambda} x, \qquad c_n' = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m c_{mn}'$$

При этом либо коэффициенты c_{0n}' можно считать заданными и по ним определить d_n, либо наоборот; коэффициенты c_{mn}' $(m = 1, 2, \ldots)$ определяются через d_n (см. (4.3) п.4). Если же полагать $d_n = d_{0n} + d_{1n}\varepsilon + d_{2n}\varepsilon^2 + \ldots$ (здесь этого не делаем), то и c_{mn}' $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ можно считать заданным и по ним определить d_{in} $(i = 1, 2, \ldots)$, либо наоборот.

Равенство (1.11) дает связь между функциями $\tau(\theta)$ и $\Phi(\theta)$ на окружности $|u| = 1$. Для них справедливы известные соотношения Дини

$$\Phi(\theta) = \int_0^{2\pi} K_0(\eta, \theta) \frac{d\tau}{d\eta} d\eta, \quad K_0(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\eta \sin n\theta}{n} \tag{1.13}$$

$$\tau(\theta) = -\int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) \frac{d\Phi}{d\eta} d\eta, \quad K(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\eta \cos n\theta}{n}$$

Линейные слагаемые в (1.11) преобразуем, применяя формулы (1.13) и интегрирование по частям. Затем объединяем слагаемые с одинаковой подынтегральной функцией $d\Phi/d\eta$ и с разными ядрами

$$K(\eta, \theta) \text{ и } K_2(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\eta \cos n\theta}{n^2}$$

где $K_2(\eta, \theta)$ — первая итерация ядра $K(\eta, \theta)$.

В уравнении (1.11) константы ν и $\varkappa$ считаются заданными, а δ определяется из условия периодичности:

$$\Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta)$$

Так как $S(\theta)$ задается формулой (1.12), то решение уравнения (1.11), и, следовательно, δ будут зависеть от ε. Положим в (1.11)

$$\delta = \delta_0 + \delta'(\varepsilon) \tag{1.14}$$

Тогда найдем, что $\delta_0 = 1$ из условия периодичности при $\varepsilon \to 0$ и так как при этом величина $\delta'(\varepsilon)$, а также решение стремятся к нулю.

После всех преобразований, и учтя (1.14), уравнение (1.11) примет окончательный вид

$$\zeta(\theta) = \nu \Big\{ \int_0^{2\pi} K^*(\eta, \theta) \zeta(\eta) d\eta + \delta'(\varepsilon) + \delta'(\varepsilon) \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) \zeta(\eta) d\eta +$$
$$+ \varkappa \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0) \zeta(\eta) d\eta - S(\theta) \Big[1 + \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) \zeta(\eta) d\eta\Big] +$$
$$+ F[\tau, \Phi, S, 1 + \delta'(\varepsilon)]\Big\} \tag{1.15}$$

$$\zeta(\theta) = \frac{d\Phi}{d\theta}, \quad K^*(\eta, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\eta) \varphi_n(\theta)}{\nu_n}, \quad \nu_n = \frac{n^2}{2n - \varkappa}, \quad \varphi_n(\theta) = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}} \tag{1.16}$$

Здесь ν_n — собственные значения, $\varphi_n(\theta)$ — собственные функции ядра $K^*(\eta, \theta)$.

Если считать, что в выражении F функция $\tau(\theta)$ взята из (1.13) и

$$\Phi(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{d\Phi}{d\eta} d\eta$$

то (1.15) будет нелинейным интегральным уравнением для $\zeta(\theta) = d\Phi/d\theta$.

Условие периодичности функции $\Phi(\theta)$ дает соотношение

$$\delta'(\varepsilon) = -\varkappa\int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0)\,\zeta(\eta)\,d\eta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\{S(\theta)\Big[1+\int_0^{2\pi} K(\eta,\theta)\,\zeta(\eta)\,d\eta\Big] -$$

$$- F\left[\tau, \Phi, S, 1+\delta'(\varepsilon)\right]\Big\}\,d\theta \qquad (1.17)$$

Таким образом, задача свелась к определению функции $\zeta(\theta, \varepsilon)$ и константы $\delta'(\varepsilon)$ из уравнений (1.15) и (1.17). При этом $\tau(\theta, \varepsilon)$ найдется из (1.13), а

$$\Phi(\theta, \varepsilon) = \int_0^{\theta}\zeta(\eta, \varepsilon)\,d\eta \qquad (1.18)$$

При решении приходится рассматривать два случая: в первом случае $\nu \neq \nu_n$, во втором $\nu = \nu_n$.

В первом случае решение $\zeta(\theta, \varepsilon)$ и $\delta'(\varepsilon)$ строится в виде рядов по целым степеням параметра ε.

Во втором случае решение получается в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$.

В обоих случаях для коэффициентов разложения $\zeta(\theta, \varepsilon)$ получаются линейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода с ядром $K^*(\eta, \theta)$ и параметром ν. Для каждого коэффициента разложения $\delta'(\varepsilon)$ получается одно линейное уравнение. В п. 2 проводится исследование при $\nu = \nu_n$ уравнений для первых коэффициентов этих разложений.

2. Решение линейной задачи при $\nu = \nu_n$ и исследование ядра интегрального уравнения (1.15). Строя решение (1.15) и (1.17) в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$, приходим для первых коэффициентов этих разложений к системе

$$\zeta_1(\theta) = \nu\left[\int_0^{2\pi} K^*(\eta, \theta)\,\zeta_1(\eta)\,d\eta + \delta_1 + \varkappa\int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0)\,\zeta_1(\eta)\,d\eta\right] \qquad (2.1)$$

$$\delta_1 = -\varkappa\int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0)\,\zeta_1(\eta)\,d\eta \qquad (2.2)$$

К такой же системе придем, если считать $S(\theta) \equiv 0$, в (1.15) и (1.17), как для свободной волны, и ограничиться линейными слагаемыми.

Исключив δ_1 из (2.2) и (2.1) и отбросив индекс, получим

$$\zeta(\theta) = \nu\int_0^{2\pi} K^*(\eta, \theta)\,\zeta(\eta)\,d\eta \qquad (2.3)$$

Так как это уравнение есть линейное однородное уравнение Фредгольма второго рода, то по второй теореме Фредгольма оно имеет отличное от нуля решение только при $\nu = \nu_n$, где ν_n — собственное значение ядра $K^*(\eta, \theta)$. С другой стороны, в силу (1.10) параметр $\nu > 0$, а ν_n, согласно (1.16), зависит от n и $\varkappa$. При решении задачи параметр $\varkappa$ считается фиксированным. Поэтому надо исследовать зависимость ν_n от n при фиксированном $\varkappa = \varkappa_0$.

Определяем экстремальное значение ν_n. Дифференцируя по n, имеем

$$\frac{d\nu_n}{dn} = \frac{2n(n-\varkappa_0)}{(2n-\varkappa_0)^2}$$

Отсюда следует, что ν_n достигает минимального значения при

$$n = \varkappa_0 \tag{2.4}$$

При $2n = \varkappa_0$ кривая $\nu_n(n, \varkappa_0)$ имеет вертикальную асимптоту. Функция $\nu_n < 0$ при $0 < n < {}^1/_2\,\varkappa_0$ и $\nu_n > 0$ при $n > {}^1/_2\,\varkappa_0$.

Установим еще следующее свойство ν_n: задавая два любых целых положительных числа m и l, можно выбрать $\varkappa_0$ так, чтобы

$$\nu_m = \nu_l \tag{2.5}$$

Действительно, подставив в (2.5) значения ν_m и ν_l, имеем соотношение, разрешив которое относительно $\varkappa_0$, получаем

$$\varkappa_0 = \frac{2ml}{m+l} \tag{2.6}$$

Этому особому значению $\varkappa_0$ будет отвечать собственное значение $\nu_m = \nu_l$, имеющее две линейно независимые собственные функции $\varphi_m(\theta)$ и $\varphi_l(\theta)$, т. е. это собственное значение будет двукратным.

Таким образом, исследование $\nu_n = \nu_n(n, \varkappa_0)$ показывает, что при фиксированном $\varkappa_0$ следует брать номер собственного значения $n > {}^1/_2\,\varkappa_0$. При таком $\nu = \nu_n$ будет одно или два линейно независимых решения уравнения (2.3). При этом кратных собственных значений будет лишь конечное число. В этом легко можно было бы убедиться, построив график ν_n как функции n при фиксированном $\varkappa = \varkappa_0$.

Будем теперь считать n фиксированным и исследуем связь между ν и $\varkappa$, при которой имеется отличное от нуля решение уравнения (2.3). Положив $\nu = \nu_n$, имеем

$$\nu = \frac{n^2}{2n-\varkappa} \tag{2.7}$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{n^2}(2n-\varkappa) \tag{2.8}$$

Подставив сюда значения ν и $\varkappa$ из (1.10), получим известную гиперболическую зависимость между c^2 и λ

$$c^2 = \frac{2\pi\mu}{\lambda\rho}n + \frac{g\lambda}{2\pi n}$$

Эта гипербола имеет вертикальную асимптоту $\lambda = 0$ и наклонную $c^2 = g\lambda\,/\,2\pi n$. В первом квадранте находим $c^2_{\min}$, отвечающее $\lambda = \lambda_*$. Имеем

$$\lambda_* = 2\pi n\sqrt{\mu\,/\,\rho g}, \quad c^2_{\min} = 2\sqrt{\mu g\,/\,\rho}$$

Назвав соответствующее значение $\varkappa$ критическим и обозначив его через $\varkappa_*$, из (1.10) находим

$$\varkappa_* = n \tag{2.9}$$

Ветвь гиперболы, отвечающая значениям $0 < \lambda < \lambda_*$, подобна ветви гиперболы $\lambda c^2 = 2\pi\mu n / \rho$, соответствующей чисто капиллярным волнам. При $\lambda > \lambda_*$ значения c^2 возрастают вместе с λ и приближаются к асимптотическим $c^2 = g\lambda / 2\pi n$, отвечающим чисто гравитационным волнам.

Поэтому рассматриваемые волны естественно разбиваются на два типа.

Волны первого типа, отвечающие $0 < \lambda < \lambda_*$ или $0 < \varkappa < \varkappa_* = n$, назовем капиллярно-гравитационными. Волны второго типа, отвечающие $\lambda > \lambda_*$ или $\varkappa_* < \varkappa < 2n$, назовем гравитационно-капиллярными.

Соотношение (2.8) позволяет рассмотреть и особый случай, когда $2n - \varkappa = 0$. Действительно, из него, учтя (1.10), имеем

$$\frac{2n-\varkappa}{n^2} = \frac{1}{\nu} = \frac{4\pi\mu}{\lambda c^2 \rho}$$

Отсюда, если $2n - \varkappa = 0$, то $1 / \nu = 0$ и надо считать $\mu = 0$. Следовательно, вместо уравнения (2.3) должно получиться уравнение для гравитационных волн без учета сил поверхностного натяжения.

Чтобы в этом убедиться, вернемся к исходному уравнению (1.11). Полагаем в нем $S(\theta) \equiv 0$ и сохраняем только линейные слагаемые; обе части полученного соотношения делим на ν и, положив затем $1 / \nu = 0$, имеем

$$\delta - 1 - (\delta + 1)\tau + \varkappa \int_0^\theta \Phi(\eta)\, d\eta = 0 \tag{2.10}$$

Применяя первую из формул (1.13) и интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^\theta \Phi(\eta)\, d\eta = -\int_0^{2\pi} K(\eta, 0)\, \tau(\eta)\, d\eta + \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\, \tau(\eta)\, d\eta \tag{2.11}$$

В силу (2.11) уравнение (2.10) примет вид

$$\delta - 1 - (\delta + 1)\tau + \varkappa \left[\int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\, \tau(\eta)\, d\eta - \int_0^{2\pi} K(\eta, 0)\, \tau(\eta)\, d\eta \right] = 0$$

Отсюда, положив

$$\delta = 1 + \varkappa \int_0^{2\pi} K(\eta, 0)\, \tau(\eta)\, d\eta$$

и ограничиваясь линейными членами, получаем

$$-2\tau(\theta) + \varkappa \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\, \tau(\eta)\, d\eta = 0 \tag{2.12}$$

Собственные значения ядра $K(\eta, \theta)$ равны $\mu_n = n$. Так как по условию $\varkappa = 2n$, то $\varkappa = 2\mu_n$ и уравнение (2.12) переходит в следующее линейное однородное интегральное уравнение:

$$\tau(\theta) = \mu_n \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\, \tau(\eta)\, d\eta \tag{2.13}$$

Так как μ_n есть собственные значения ядра $K(\eta, \theta)$, то это уравнение для свободных гравитационных волн разрешимо при любом целом положительном n.

Можно поступить еще следующим образом. Дифференцируя (2.10), по θ, имеем

$$(\delta + 1)\frac{d\tau}{d\theta} = \varkappa\Phi(\theta), \quad \text{или} \quad \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{\varkappa}{\delta+1}\Phi(\theta)$$

Подставив это значение в первую формулу (1.13), находим

$$\Phi(\theta) = \frac{\varkappa}{\delta+1}\int_0^{2\pi} K_0(\eta, \theta)\, \Phi(\eta)\, d\eta \tag{2.14}$$

Собственные значения ядра $K_0(\eta, \theta)$ равны $\mu_n = n$. Так как здесь $\varkappa = 2n$, то $\varkappa = 2\mu_n$. Положив в (2.12) $\delta = 1$ и $\varkappa = 2\mu_n$, приходим к следующему хорошо известному интегральному уравнению для свободных гравитационных волн:

$$\Phi(\theta) = \mu_n \int_0^{2\pi} K_0(\eta, \theta)\, \Phi(\eta)\, d\eta \tag{2.15}$$

Рассмотрим, наконец, случай $\varkappa = 0$. При $\varkappa = 0$ из (2.7) имеем $2\nu = n$. Но $2\nu = \nu_n = n$ являются собственными значениями ядра $K(\eta, \theta)$. С другой стороны, уравнение (2.3) при $\varkappa = 0$ примет вид

$$\zeta(\theta) = 2\nu \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\, \zeta(\eta)\, d\eta \tag{2.16}$$

Это уравнение является интегральным уравнением для свободных капиллярных волн. Так как $2\nu = \nu_n = n$, то оно разрешимо при любом целом положительном n.

Результаты проведенного исследования линейной задачи формулируем в виде следующих теорем.

Теорема 2.1. Пусть

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{n^2}(2n - \varkappa)$$

где n — фиксированное целое положительное число. Тогда при всех значениях $\varkappa$ в интервале $0 < \varkappa < 2n$ уравнение (2.3) имеет единственное нетривиальное решение

$$\zeta(\theta) = C_1\varphi_n(\theta) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}}\cos n\theta$$

Если $\varkappa = \varkappa^{(m)} = 2mn \,/\, (m + n)$ (m — целое положительное число), то частным нетривиальным и линейно независимым от $\varphi_n(\theta)$ решением будет также

$$\zeta(\theta) = C_2\varphi_m(\theta) = \frac{C_2}{\sqrt{\pi}}\cos m\theta$$

и общим решением будет

$$\zeta(\theta) = C_1\varphi_n(\theta) + C_2\varphi_m(\theta) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}}\cos n\theta + \frac{C_2}{\sqrt{\pi}}\cos m\,\theta$$

Значения $\varkappa = \varkappa^{(m)}$ названы бифуркационными. Волны, отвечающие значениям $\varkappa = \varkappa^{(m)}$ и определяемые решением $\zeta(\theta)$ в виде суммы из двух гармоник, назовем двойными. Значение $\varkappa = \varkappa_* = n$ названо критическим. На параметрической плоскости ($y = 1 \,/\, \nu$; $x = \varkappa$) оно разбивает прямую (2.8) на две части. Точкам первой части отвечают капиллярно-гравитационные волны; точкам второй — волны гравитационно-капиллярные. На первой части имеется конечное число точек бифуркации при $m < n$; на второй — их будет счетное множество для $n < m < +\infty$.

Теорема 2.2. При $\varkappa = 0$ уравнение (2.3) переходит в уравнение (2.16) для чисто капиллярных волн, которое имеет при фиксированном $2\nu = \nu_n = n$ единственное нетривиальное решение $\zeta(\theta) = C_1/\sqrt{\pi}\cos n\theta$; n — целое положительное число.

Теорема 2.3. При $\varkappa = 2n$ надо положить $1 \,/\, \nu = 0$ (следовательно, $\mu = 0$). Тогда вместо уравнения (2.3) приходим к уравнению (2.13) или (2.15), для чисто гравитационных волн, которые имеют соответственно единственные нетривиальные решения вида

$$\tau(\theta) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}}\cos n\theta, \quad \Phi(\theta) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}}\sin n\theta$$

при фиксированном целом положительном n.

Теорема 2.4. Капиллярно-гравитационные волны могут быть двойными. Но двойных как чисто гравитационных, так и чисто капиллярных волн не существует.

Эта теорема непосредственно вытекает из теорем 2.1 — 2.3. Она выражает свойство, существенно отличающее установившиеся капиллярно-гравитационные волны от установившихся волн гравитационных и капиллярных.

Линейная задача об установившихся свободных капиллярно-гравитационных волнах, сведя ее к решению дифференциального уравнения в комплексной области, исследована автором в работах [3, 4].

3. Решение основных уравнений задачи. Как уже отмечено в конце п. 1, при определении $\zeta(\theta, \varepsilon)$ и $\delta'(\varepsilon)$ из основных уравнений (1.15) и (1.17) приходится рассматривать два случая: в первом случае $\nu \neq \nu_n$, во втором $\nu = \nu_n$. В обоих случаях укажем метод построения решения и приведем результат определения первых трех приближений. Во втором случае в качестве примера рассмотрено значение $\nu = \nu_1$. При этом параметр $\varkappa$ выбран так, чтобы собственное значение ν_1 было простым и положительным.

1°. Случай $\nu \neq \nu_n$. Как уже было отмечено, в этом случае, решение строится в виде рядов по целым степеням параметра ε. Для каждого коэффициента разложения функции $\zeta(\theta, \varepsilon)$ получается линейное неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с параметром ν. Все эти уравнения последовательно решаются по первой теореме Фредгольма. Для каждого коэффициента разложения $\delta'(\varepsilon)$ получается одно линейное уравнение, дающее явное выражение для коэффициента данного приближения через величины, найденные в предшествующих приближениях.

Приводим выражения для $\zeta(\theta, \varepsilon)$ и $\delta'(\varepsilon)$, определенные по первым трем приближениям

$$\zeta(\theta, \varepsilon) = \varepsilon C_{11} \cos\theta + \varepsilon^2 C_{22} \cos 2\theta + \varepsilon^3 (C_{13} \cos\theta + C_{33} \cos 3\theta) \tag{3.1}$$

$$\delta'(\varepsilon) = -\varepsilon\varkappa C_{11} + \varepsilon^2 [{}^1\!/_4 \varkappa (C_{11}{}^2 - C_{22}) + {}^1\!/_2 d_1 C_{11}] - \\ - \varepsilon^3 \varkappa (C_{13} + {}^1\!/_9 C_{33} + {}^1\!/_{18} C_{11}{}^3 + {}^1\!/_6 C_{11} C_{22}) \tag{3.2}$$

$$C_{11} = \frac{\nu\nu_1 d_1}{\nu - \nu_1}, \qquad C_{22} = -\frac{\nu\nu_2}{\nu_2 - \nu} (d_2 + {}^1\!/_2 C_{11} d_1 + {}^3\!/_4 \varkappa C_{11}{}^2) \tag{3.3}$$

$$C_{13} = \frac{\nu\nu_1}{\nu - \nu_1} C_{13}{}^*, \qquad C_{33} = \frac{\nu\nu_3}{\nu_3 - \nu} C_{33}{}^*$$

Здесь $C_{13}{}^*$ — линейная функция от $C_{11}{}^3$, $C_{11}C_{22}$, $C_{22}d_1$, $C_{11}d_2$, $C_{11}{}^2 d_1$; а $C_{33}{}^*$ — линейная функция от $C_{11}{}^3$, $C_{11}C_{22}$, $C_{11}{}^2 d_1$, $C_{22}d_1$, $C_{11}d_2$, d_3.

2°. Случай $\nu = \nu_1$. В этом случае при построении решения в виде ряда по степеням $\varepsilon^{1/3}$ для первого коэффициента разложения $\zeta(\theta, \varepsilon)$ получается линейное однородное уравнение Фредгольма второго рода при значении параметра $\nu = \nu_1$. Оно решается по второй теореме Фредгольма. Уравнения для всех последующих коэффициентов будут такими же, но неоднородными и при том же значении параметра $\nu = \nu_1$. Эти уравнения решаются по третьей теореме Фредгольма. При этом из условия разрешимости уравнения для $n + 2$-го приближения определяется коэффициент у решения однородного уравнения n-го приближения.

Коэффициенты разложения $\delta'(\varepsilon)$ определяются аналогично случаю $\nu \neq \nu_n$.

Приводим выражения для $\zeta(\theta, \varepsilon)$ и $\delta'(\varepsilon)$, найденные по первым трем приближениям

$$\zeta(\theta, \varepsilon) = \varepsilon^{1/3} C_{11} \cos\theta + \varepsilon^{2/3} (C_{12} \cos\theta + C_{22} \cos 2\theta) + \\ + \varepsilon (C_{13} \cos\theta + C_{23} \cos 2\theta + C_{33} \cos 3\theta) \tag{3.4}$$

где

$$C_{11} = d_1{}^{1/3} \alpha^{1/3}, \qquad \alpha = \frac{32(\nu_2 - \nu_1)}{8(\nu_2 - \nu_1) + 9\varkappa^2 \nu_1 \nu_2} \tag{3.5}$$

$$C_{22} = \frac{3}{4} \varkappa C_{11}{}^2 \frac{\nu_1\nu_2}{\nu_1 - \nu_2}, \qquad C_{12} = -\frac{\varkappa ({}^1\!/_2 C_{11}{}^2 + 5C_{22})}{9[1 + \varkappa(1 + 7\nu_1\nu_2\varkappa / 8(\nu_1 - \nu_2))]}$$

$$C_{23} = \varkappa C_{11} C_{12} \frac{\nu_1\nu_2}{\nu_1 - \nu_2}, \qquad C_{33} = \frac{\nu_1\nu_3}{\nu_3 - \nu_1} C_{33}{}^*$$

Здесь $C_{33}{}^*$ — линейная функция от $C_{11}{}^3$, $C_{11}C_{22}$; C_{13} — аналогично C_{12}, но с другими коэффициентами.

Напомним, что в обоих случаях $\tau(\theta, \varepsilon)$ найдется из (1.13), а $\Phi(\theta, \varepsilon)$ — из (1.18).

4. Определение профиля волны. Профиль волны в параметрической форме $x(\theta, \varepsilon)$ и $y(\theta, \varepsilon)$ определяется из соотношений (1.4), куда следует подставить найденные $\Phi(\theta, \varepsilon)$ и $\tau(\theta, \varepsilon)$. Исключая из параметрического уравнения θ, получаем уравнение профиля в форме $y = y(x, \varepsilon)$.

Приводим приближенные с точностью до членов третьего порядка уравнения профиля волны в обоих случаях, положив $k = 2\pi / \lambda$.

В случае $\nu \neq \nu_n$

$$y(x, \varepsilon) = k^{-1}\{\varepsilon C_{11}(\cos kx - 1) + {}^1/_4\,\varepsilon^2 (C_{11}^2 - C_{22})(1 - \cos 2kx) + {}^1/_6\,\varepsilon^3 [(6C_{13} + {}^9/_4 C_{11}C_{22})(\cos kx - 1) + ({}^1/_3 C_{11}^3 - {}^5/_4 C_{11}C_{22} + {}^2/_3\, C_{33})(\cos 3kx - 1)]\} \qquad (4.1)$$

Здесь коэффициенты C_{ij} выражаются формулами (3.3).

В случае $\nu = \nu_1$

$$y(x, \varepsilon) = k^{-1}\{\varepsilon^{1/3} C_{11}(\cos kx - 1) + {}^1/_2\varepsilon^{2/3}[2C_{12}(\cos kx - 1) + {}^1/_2(C_{11}^2 - C_{22})(1 - \cos 2kx)] + {}^1/_6\,\varepsilon\,[(6\,C_{13} + {}^9/_4\, C_{11}C_{22}) \times (\cos kx - 1) + 3(C_{11}C_{12} - {}^1/_2 C_{23})(1 - \cos 2kx) + ({}^1/_6 C_{11}^3 - {}^5/_4 C_{11}C_{22} + {}^2/_3\, C_{33})(\cos 3kx - 1)]\} \qquad (4.2)$$

Здесь коэффициенты C_{ij} определяются формулами (3.5).

Замечание 4.1. По условию задачи начало координат помещено в гребне волны. Поэтому при значениях x, близких к нулю, y должно быть отрицательным. Из (4.1) и (4.2) следует, что это будет выполняться только при $C_{11} > 0$. Полагая $\nu_1 < \nu < \nu_2$ (в случае $\nu \neq \nu_n$), заключаем отсюда и в силу (3.3) и (3.5), что надо считать $d_1 > 0$.

Замечание 4.2. Приведем выражение заданного на поверхности давления в виде функции от абсцисс x. Оно получается, исключая θ из (1.12) и параметрического уравнения профиля, и для $\nu \neq \nu_n$ имеет вид

$$p_0^*(x) = \varepsilon d_1 \cos kx + \varepsilon^2 (d_2 - d_1 C_{11}) \cos 2kx + {}^1/_6\,\varepsilon^3 [(6d_2C_{11} + {}^3/_4 d_1 (2C_{11}^2 - C_{22})) \cos kx + (6d_3 - 6d_2C_{11} + {}^3/_4 d_1 (C_{22} - 2C_{11}^2)) \cos 3kx] \qquad (4.3)$$

В случае $\nu = \nu_1$, в том приближении, которое определили, получим аналогичную формулу только с одним первым членом. Формула (4.3) подтверждает сказанное в п. 1 относительно выражения (1.12).

Замечание 4.3. Отметим, что $\nu = \nu_n$ есть тот особый случай, который отмечен в начале статьи. Действительно, при $\nu = \nu_n$ из формулы (1.10) и (1.16) имеем выражение (см. формулу, вытекающую из (2.8)), связывающее в линейном приближении c и λ в указанном особом случае.

5. Существование и единственность решения задачи. Применяя методы Ляпунова — Шмидта и их развитие [5], можно установить следующие теоремы.

Теорема 5.1. Система уравнений (1.15) и (1.17) при $\nu \neq \nu_n$ имеет единственное малое относительно ε и непрерывное по θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ решение $\zeta(\theta, \varepsilon)$ и $\delta'(\varepsilon)$ $(\delta'(\varepsilon) = \delta(\varepsilon) - 1)$ и это решение будет аналитической функцией ε при малых $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

Теорема 5.2. Система уравнений (1.15) и (1.17) при $\nu = \nu_1$ имеет единственное малое относительно ε и непрерывное по θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ решение $\zeta(\theta, \varepsilon)$ и $\delta'(\varepsilon)$ и это решение представимо в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$, сходящихся абсолютно и равномерно при малых $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

Доказательств этих теорем здесь не приводим. Укажем только, что они проводятся аналогично тому, как это выполнено в работах [6,7].

Из этих теорем вытекает абсолютная и равномерная сходимость рядов для $\Phi(\theta, \varepsilon)$ и $\tau(\theta, \varepsilon)$. Сходимость рядов по степеням ε и $\varepsilon^{1/3}$ (при $\nu = \nu_1$) для подынтегральных функций в (1.4) вытекает из общих теорем анализа о подстановке ряда в ряд. На основании общих теорем анализа устанавливается и сходимость рядов (4.1), (4.2) и (4.3).

Поступила 3 VI 1970

Институт проблем механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Секерж-Зенькович Я. И. О составных установившихся гравитационных волнах конечной амплитуды. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
2. Секерж-Зенькович Я. И. К теории установившихся волн конечной амплитуды, вызванных давлением, периодически распределенным по поверхности потока тяжелой жидкости бесконечной глубины. Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 2.
3. Секерж-Зенькович Я. И. К теории установившихся капиллярно-гравитационных волн конечной амплитуды. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 5.
4. Секерж-Зенькович Я. И. Установившиеся капиллярно-гравитационные волны конечной амплитуды на поверхности жидкости бесконечной глубины. Тр. Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1963, т. 27, стр. 58—102.
5. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Усп. матем. н., 1962, т. 17, вып. 2 (104).
6. Секерж-Зенькович Я. И. Об одном виде установившихся волн конечной амплитуды. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
7. Секерж-Зенькович Я. И. Об одном виде установившихся волн. В кн.: М. М. Вайнберг и В. А. Треногин. Теория ветвления решений нелинейных уравнений, § 37, М., «Наука», 1969, стр. 509—517.