Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ОТРАЖЕНИЕ ВОЛНЫ ОТ ГРАНИЦЫ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ ДУГ РАЗЛИЧНОЙ КРИВИЗНЫ

А. Ф. Филиппов

(Москва)

Рассматривается плоская задача об отражении акустической волны от криволинейной границы с переменной кривизной. Кривизна границы или ее производная некоторого порядка терпит разрыв в одной точке. В таком случае кроме отраженной волны возникает дифрагированная волна с круговым фронтом с центром в этой точке. Отыскивается первый член лучевого разложения этой волны и дается строгая оценка порядка отбрасываемых членов.

1. Пусть D — плоская область $y > g(x)$ с границей Γ ($y = g(x)$), где

$$g(x) = g_0(x) \quad (x \leqslant 0), \qquad g(x) = g_0(x) + \psi(x) \quad (x \geqslant 0) \tag{1.1}$$

Функции g_0 и ψ — аналитические, и вблизи значения $x = 0$ $\psi(x) = $

$$= ax^n / n! + O(x^{n+1}), \quad \psi'(x) = ax^{n-1} / (n-1)! + O(x^n), \quad n > 1 \tag{1.2}$$

Число n — целое. Таким образом, $g^{(n)}(x)$ при $x = 0$ имеет разрыв, равный a. В области D распространяется волна, для которой известен первый член лучевого разложения

$$u(t, x, y) = A(x, y) f_0(t - p(x, y)) + \ldots \tag{1.3}$$

Ищется решение задачи об отражении этой волны от границы Γ, т. е. функция U, удовлетворяющая в области D волновому уравнению $U_{tt} = U_{xx} + U_{yy}$, на Γ — одному из граничных условий

$$U = 0 \quad \text{или} \quad \partial U / \partial n = 0 \tag{1.4}$$

и совпадающая с падающей волной (1.3) там, куда еще не пришла отраженная волна (фронт отраженной волны отыскивается известными методами).

Искомое решение U можно представить в виде суммы $U = u + v + w$. Здесь u — падающая волна (1.3), v — волна, образующаяся при отражении волны u от границы Γ_0 ($y = g_0(x)$). Волну v можно найти обычным лучевым методом. Функция w — поправка, необходимая из-за того, что сумма $u + v$ удовлетворяет граничному условию на Γ_0, а не на Γ. Чтобы функция U удовлетворяла указанным выше требованиям, функция w должна удовлетворять волновому уравнению, одному из граничных условий на Γ

$$w = -q(t, x), \quad q = (u + v)|_\Gamma \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = -q(t, x), \quad q = \frac{\partial(u + v)}{\partial n}\bigg|_\Gamma$$

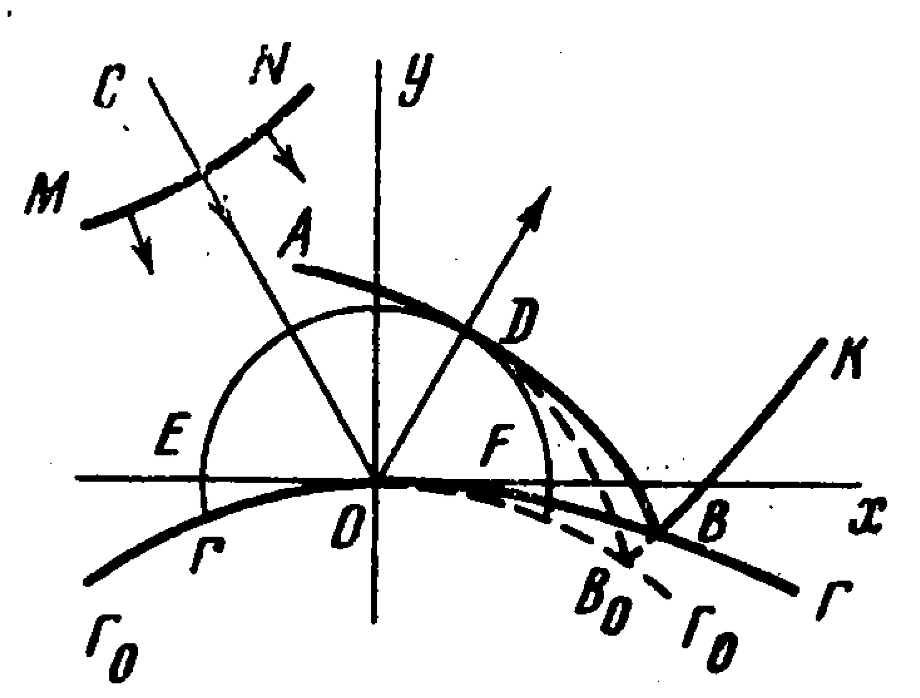
а также требованию $w = 0$ в той области, куда еще не пришли волны, отраженные от Γ и Γ_0. Так как при $x \leqslant 0$ граница Γ совпадает с Γ_0, то $q(t, x) = 0$ при $x \leqslant 0$.

Как известно, решение волнового уравнения с граничным условием $\partial w / \partial n = -q(t, x)$ выражается при помощи функции Грина G

$$w(T, X, Y) = \iint G(T - t, X, Y; x, y)\, q(t, x)\, dt ds \qquad (1.5)$$

Интеграл берется по той части границы Г, где $Gq \neq 0$, а ds — дифференциал длины дуги Г.

Функция Грина G представляется в виде суммы функции Грина G_0 области с границей Γ_0 и поправки $G_1 = G - G_0$. Функция $G_0(t_1, X, Y; x, y)$, рассматриваемая как функция от t_1, x, y, есть сумма круговой волны G_2 от точечного источника в точке (X, Y) и волны G_3, образующейся при отражении волны G_2 от границы Γ_0. Волна G_2 известна, лучевое разложение волны G_3 отыскивается известным методом, а поправка G_1, как показано в пп. 7 и 8, не влияет на первый член лучевого разложения искомой волны w.



2. Рассмотрим задачу с граничным условием $\partial U / \partial n = 0$ и найдем значение $\partial(u + v) / \partial n$ на Г (фигура). Пусть ось x касается границы в точке O, фронт MN падающей волны (1.3) достигает точки O в момент $t = 0$, а луч CO образует угол β с осью x, $0 < \beta < \pi$. Направление выпуклости границы на каждом из участков $x > 0$ и $x < 0$ может быть любым, взаимное расположение кривых Г и Γ_0 при $x > 0$ — тоже. При $t > 0$ BK — фронт падающей волны, ADB — фронт волны, отраженной от границы Г, ADB_0 — положение фронта отраженной волны в случае, когда границей служит кривая Γ_0, EDF — круговой фронт дифрагированной волны w_0 (существование такой волны отмечалось в [1] стр. 23—24).

Пусть в лучевом разложении падающей волны (1.3)

$$f_0(\tau) = 0 \quad (\tau \leqslant 0) \qquad f_0(\tau) = \tau^m / \Gamma(m + 1) \quad (\tau > 0) \qquad (2.1)$$

где $m \geqslant 1$, Г — гамма-функция, $\tau = t - p(x, y)$.

Волна, отраженная от Γ_0, имеет лучевое разложение

$$v = B(x, y) f_0(\tau_0) + \ldots, \qquad \tau_0 = t - p_0(x, y) \qquad (2.2)$$

Пусть n и n_0 — направления нормалей к Г и Γ_0, ∇p и ∇p_0 — градиенты функций p и p_0, как известно, направленные вдоль лучей. При этом n, n_0, ∇p_0 образуют острые углы с осью y, а ∇p — тупой.

Тогда $\partial\tau / \partial n = -\partial p / \partial n = -\cos(\nabla p, n)$, аналогичное справедливо для $\partial\tau / \partial n_0$. В точке $x = y = 0$

$$p = p_0 = 0, \quad \partial p / \partial y = \cos(\nabla p, y) = -\sin\beta, \quad \partial p_0 / \partial y = \sin\beta$$

Поэтому в ее окрестности на кривых Г, Γ_0 и между ними

$$\partial p / \partial y = -\sin\beta + O(x), \qquad \partial p_0 / \partial y = \sin\beta + O(x) \qquad (2.3)$$

Из (1.3) и (2.2) следует, что на Г

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -A\gamma f_0'(\tau) + \left(P + \frac{\partial Q}{\partial n}\right) f_0(\tau), \quad \gamma = \cos(\nabla p, n) \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = -B\gamma_0 f_0'(\tau_0) + \left(R + \frac{\partial S}{\partial n}\right) f_0(\tau_0), \quad \gamma_0 = \cos(\nabla p_0, n)$$

Здесь P, Q, R, S — функции от t, x, y с ограниченными производными. На Γ_0 производные $\partial u / \partial n_0$ и $\partial v / \partial n_0$ выражаются аналогично. Так как v — волна, отраженная от Γ_0, то на Γ_0

$$\partial (u + v) / \partial n_0 = 0, \ \tau_0 = \tau, \ \gamma_0 = -\gamma, \ B = A \tag{2.5}$$

Оценим, как меняются значения этих функций при переходе от точки на Γ_0 к точке на Γ с той же абсциссой. (Функции, входящие в лучевое разложение, аналитически продолжимы на некоторую окрестность кривой Γ_0). Расстояние между этими точками равно $\psi(x)$, а угол между нормалями в этих точках равен $\psi'(x) + O(x\psi')$. Поэтому при указанном переходе величины $A, B, P, Q, R, S, \tau, \tau_0$ меняются на $O(\psi)$, производные по нормали — на $O(\psi')$, члены с f_0 в (2.4) — на $O(\psi'\tau^m)$, а величины γ и γ_0 — на $\psi'(x)\cdot\cos\beta + O(x^n)$. Из этих оценок, и из (1.2) и (2.5) следует, что на Γ

$$\gamma + \gamma_0 = 2\psi'(x)\cos\beta + O(x^n)$$

$$\frac{\partial (u+v)}{\partial n} = -A\gamma f_0'(\tau) - B\gamma_0 f_0'(\tau_0) + O(d^{n+m-1}) \qquad (d = |t| + |x|)$$

Сумма членов с A и B преобразуется так

$$B\gamma_0 [f_0'(\tau) - f_0'(\tau_0)] - [A(\gamma + \gamma_0) + \gamma_0 (B - A)] f_0'(\tau)$$

Пользуясь предыдущими оценками, получим на Γ при $x \geqslant 0$

$$\frac{\partial (u+v)}{\partial n} = (A_0 \sin\beta + a_0)(f_0'(\tau) - f_0'(\tau_0)) - 2A_0 f_0'(\tau)\psi'\cos\beta + R_0 \tag{2.6}$$

$$A_0 = A(0, 0), \ a_0 = B\gamma_0 - A_0\sin\beta = O(x), \ R_0 = O(d^{n+m-1})$$

Заметим, что на Γ, т. е. при $y = g(x)$, имеем

$$\tau = t - p_1(x), \tau_0 = t - p_2(x), \qquad p_1(x) = p(x, g(x))$$
$$p_2(x) = p_0(x, g(x)) \tag{2.7}$$

и аналогично (2.3)

$$p_i'(x) = -\cos\beta + O(x), \ p_i(x) = -x\cos\beta + O(x^2), \ i = 1, 2 \tag{2.8}$$

Так как на Γ_0, согласно (2.5), $\tau_0 = \tau$, то $p_0 = p$ при $y = g_0(x)$. Теперь из (2.3) следует, что при $y = g_0(x) + \psi(x)$, т. е. на Γ

$$p_0 - p = p_2(x) - p_1(x) = 2\psi(x)\sin\beta + O(x\psi) \tag{2.9}$$

3. Найдем главную часть функции Грина в (1.5). Согласно п. 1

$$G = G_0 + G_1, \ G_0 = G_2 + G_3 \tag{3.1}$$
$$G_2(t_1, X, Y; x, y) = (2\pi)^{-1}(t_1^2 - \rho^2)^{-1/2}$$
$$\rho = [(x - X)^2 + (y - Y)^2]^{1/2}$$

Волна G_2, рассматриваемая как функция от t_1, x, y, имеет лучевое разложение

$$G_2 = A^*(t_1 - \rho)^{-1/2} + O((t_1 - \rho)^{1/2}), \qquad A^* = (2\pi\sqrt{2\rho})^{-1} \tag{3.2}$$

Здесь и далее подразумевается, что выражения вида $a^{-1/2}$, $a^{1/2}$ и т.п. в случае $a \leqslant 0$ заменяются нулем.

Так как G_3 — волна, образующаяся при отражении волны (3.2) от границы Γ_0, то, как в п. 2, получим, что на Γ

$$G_3 = B^* (t_1 - \rho_0)^{-1/2} + O((t_1 - \rho_0)^{1/2}), \quad B^* = A^* + O(\psi)$$
$$\rho_0 = \rho + O(\psi) \tag{3.3}$$

В точке $(0, 0)$

$$A^* = B^* = A_0^*, \ A_0^* = (2\pi \sqrt{2r})^{-1}, \ r^2 = X^2 + Y^2$$

В любой точке на Γ (при малых x)

$$A^* = A_0^* + O(x), \ B^* = A_0^* + O(x)$$

Полагая

$$t_1 = T - t, \quad T = r + h, \quad X = r\cos\varphi, \quad Y = r\sin\varphi \tag{3.4}$$

получим

$$\rho = r - x\cos\varphi - y\sin\varphi + O(x^2 + y^2)$$

На Γ, т. е. при $y = g(x) = O(x^2)$

$$t_1 - \rho = p_3(x) + h - t, \qquad t_1 - \rho_0 = p_4(x) + h - t$$
$$p_j(x) = x\cos\varphi + O(x^2), \quad p_j'(x) = \cos\varphi + O(x) \quad (j = 3,4) \tag{3.5}$$

Здесь производные оцениваются аналогично (2.3).

Выясним форму области интегрирования в (1.5). Согласно п. 1, $q = 0$ при $x \leqslant 0$. Далее $G = 0$ на Γ при $t > h + \max(p_3, p_4)$, а волны u и v вступают в точку $(x, g(x))$ на Γ в моменты $p_1(x)$, $p_2(x)$ (см. (2.7)). Поэтому интегрирование в (1.5) производится по области

$$x > 0, \qquad \min(p_1, p_2) < t < h + \max(p_3, p_4) \tag{3.6}$$

В силу (2.8) и (3.5) границы этой области при $x > 0$ лишь на $O(x^2)$ отличаются от прямых $t = -x\cos\beta$, $t = h + x\cos\varphi$.

Предположим, что $\varphi > \pi - \beta$, а h достаточно мало. Тогда при $h \leqslant 0$ в (1.5) имеем $Gq = 0$ всюду, значит, $w = 0$ при $T \leqslant r$.

При $h > 0$ кривые $t = p_i(x)$ и $t = h + p_j(x)$ пересекаются в точке с абсциссой x_{ij}, т. е.

$$p_i(x_{ij}) = h + p_j(x_{ij}) \qquad (i = 1, 2; \ j = 3, 4) \tag{3.7}$$

Из формул (2.8), (3.5) и неравенства $\varphi > \pi - \beta$ следует

$$x_{ij} = hb^{-1} + O(h^2), \qquad b = -\cos\beta - \cos\varphi > 0 \tag{3.8}$$

Значит, в области (3.6) величина t, x, y, d равны $O(h)$.

4. Найдем главную часть дифрагированной волны, заменяя в (1.5) G на G_0, т. е. пренебрегая слагаемым G_1. Далее можно отбросить R_0 и a_0 в (2.6), остаточные члены в (3.2), (3.3) и заменить ds на dx, A^*, B^* на A_0^*, совершая ошибку порядка $O(h^{n+m+1/2})$. Остается вычислить интегралы (для $j = 3, 4$)

$$L_{j,m} = \iint \frac{f_0'(\tau)\,\psi'(x)}{(p_j + h - t)^{1/2}}\,dt\,dx, \qquad M_{j,m} = \iint \frac{f_0'(\tau) - f_0'(\tau_0)}{(p_j + h - t)^{1/2}}\,dt\,dx$$

Здесь τ, τ_0 и f_0 те же, что в (2.7) и (2.1). Вычислим эти интегралы сначала при $m = {}^1/_2$, а затем при любом $m > {}^1/_2$. Интегрируя сначала по t в пределах от $p_1(x)$ до $h + p_j(x)$, получим

$$\pi^{-1/2} L_{j,\,1/2} = \int_0^{x_{1j}} \psi'(x)\,dx = \psi(x_{1j}) = \psi(h/b) + O(h^2\psi') \tag{4.1}$$

Здесь x_{ij} те же, что в (3.7) и (3.8). Аналогично получим

$$\pi^{-1/2} M_{j,1/2} = x_{1j} - x_{2j}$$

Оценим эту разность. Из (3.7) следует

$$p_j(x_{2j}) - p_j(x_{1j}) + p_2(x_{1j}) - p_2(x_{2j}) = p_2(x_{1j}) - p_1(x_{1j})$$

Применяя к левой части формулу конечных приращений и пользуясь оценками производных (2.8), (3.5), а к правой части — формулы (2.9), (3.8), получим

$$(x_{2j} - x_{1j})(\cos\varphi + \cos\beta + O(x_{1j} + x_{2j})) = 2\psi(x_{1j})\sin\beta +$$
$$+ O(x_{1j}\psi(x_{1j})), \quad x_{1j} - x_{2j} = 2b^{-1}\psi(hb^{-1})\sin\beta + O(h\psi) \tag{4.2}$$

Перейдем от случая $m = {}^1/_2$ к любому $m > {}^1/_2$. Оператор

$$I_k f(h) = \int_{-\infty}^{h} \frac{(h-s)^{k-1}}{\Gamma(k)} f(s)\,ds \qquad (k > 0) \tag{4.3}$$

преобразует функцию вида (2.1) в аналогичную функцию, но с $m + k$ вместо m. В частности, при целом k применить оператор I_k к какой-нибудь функции — все равно, что k раз проинтегрировать ее.

Применяя оператор I_k при $k = m - {}^1/_2$ к функции $L_{j,\,1/2}(h)$ и учитывая (1.2), получаем функцию

$$L_{j,m}(h) = \sqrt{\pi}\, a b^{-n} h^{n+m-1/2} / \Gamma(n + m + {}^1/_2) + O(h^{n+m+1/2})$$

Формула для $M_{j,m}$ отличается лишь множителем $2b^{-1}\sin\beta$.

Пользуясь найденными выражениями для интегралов и учитывая, что возможность отбросить G_1 будет обоснована в п. 7, получаем выражение для дифрагированной волны при $T > r$ в случае граничного условия $\partial U / \partial n = 0$

$$w_0(T, X, Y) = \frac{\sqrt{2}\, a A_0 h^{n+m-1/2}(1 + \cos\beta\cos\varphi)}{\sqrt{\pi r}\,\Gamma(n + m + {}^1/_2)(-\cos\beta - \cos\varphi)^{n+1}} + O(h^{n+m+1/2}) \tag{4.4}$$

Здесь $h = T - r$; r, φ — полярные координаты точки наблюдения (X, Y); a и n зависят от формы границы (см. (1.2)); $A_0 = A(0, 0)$ и m зависят от падающей волны (см. (1.3) и (2.1)); β — полярный угол направления, откуда пришел луч падающей волны, попавший в точку (0, 0). При $T \leqslant r$ имеем $w_0 = 0$.

Формула справедлива в прифронтовой зоне дифрагированной волны вне окрестностей отраженного луча $\varphi = \pi - \beta$ и границы Γ. Если же граница

Γ при $x \leqslant 0$ совпадает с прямой линией $\varphi = \pi$, то формула (4.4) справедлива вплоть до этой части границы. Если при этом $\beta = \pi$, т. е. данная волна вида (1.3) скользит вдоль границы, то $v \equiv u$, т.е. отраженная волна совпадает с падающей, а вся скользящая вдоль границы волна является их суммой. Тогда в (4.4) $A_0 = {}^1/_2\, A\,(0,\,0)$, где A — первый коэффициент лучевого разложения (1.3) этой скользящей волны.

При выводе формулы (4.4) предполагалось, что $\varphi > \pi - \beta$. Только при таких φ волна w_0 совпадает с поправкой w (см. п. 1). Однако формула (4.4) справедлива и при $\varphi < \pi - \beta$. Чтобы ее доказать для этого случая, надо принять за аналитическую границу Γ_0 линию $y = g_0(x) + \psi(x)$ и заменить x на $-x$. Тогда a, β, φ заменятся на $(-1)^{n+1} a$, $\pi - \beta$, $\pi - \varphi$, и задача сведется к случаю $\varphi > \pi - \beta$, для которого формула (4.4) уже доказана. А от указанной замены эта формула не меняется. Значит, она справедлива и при $\varphi < \pi - \beta$.

5. Рассмотрим теперь задачу, поставленную в п. 1, с граничным условием $U = 0$ на Γ. В этом случае функция w, удовлетворяющая условию $w = -q(t, x)$ на Γ, выражается формулой

$$w(T, X, Y) = -\iint \frac{\partial}{\partial t} q(t,\, x) \frac{\partial}{\partial n}\, G^*(T - t,\, X,\, Y;\; x,\, y)\, dt\, ds \qquad (5.1)$$

Область интегрирования определяется как в (1.5), а G^* — проинтегрированная один раз по T функция Грина для волнового уравнения с граничным условием $U = 0$. Формула (5.1) получается из формулы (66) § 502 [2], если в последней вместо v взять функцию $2\pi G^*$, и доказывается аналогично, так как эти функции имеют одну и ту же особенность на оси характеристического конуса.

Интеграл (5.1) вычисляется тем же методом, что (1.5). Вместо (4.4) получается

$$w_0 = -\frac{\sqrt{2}\, a A_0 h^{n+m-1/2} \sin\beta \sin\varphi}{\sqrt{\pi r}\,\Gamma(n + m + 1/2)\,(-\cos\beta - \cos\varphi)^{n+1}} + O\left(h^{n+m+1/2}\right) \qquad (5.2)$$

6. Рассмотрим некоторые видоизменения той же задачи, для определенности, с граничным условием $\partial U / \partial n = 0$. Пусть в (1.2) число $n > 1$ — любое, не целое, а $n!$ заменяется на $\Gamma(n + 1)$, так что функция $\psi(x)$ аналитическая только при $x > 0$.

Тогда в области $\varphi > \pi - \beta$ формула (4.4) остается справедливой, лишь при $1 < n < 2$ ухудшается оценка остаточного члена. В области $\varphi < \pi - \beta$ интеграл (1.5) дает сумму отраженной и дифрагированной волн. При $h \to 0$ область интегрирования не становится бесконечно малой, и для отыскания особенности на фронте дифрагированной волны надо применить метод выделения неаналитической части интеграла. Оказывается, что, вообще говоря, особенность в области $\varphi < \pi - \beta$ будет по обе стороны фронта $T = r$, т. е. и при $r \to T - 0$ и при $r \to T + 0$.

Пусть теперь $\psi(x)$ при $x \to 0$ убывает быстрее любой степени x^n, и ψ'' монотонна при малых x. Тогда вместо (4.4) для $\varphi > \pi - \beta$ получается

$$w_0 = \frac{\sqrt{2}\, a A_0}{\sqrt{\pi r}}\,(1 + \cos\beta\cos\varphi)\, b^{m-3/2}\Psi(h/b) + O\left(h^2\Psi'(h/b)\right) \qquad (6.1)$$

Здесь $\Psi(x) = I_{m-1/2}\psi(x)$, оператор I_k см. в (4.3), $\psi(x) = 0$ при $x \leqslant 0$; $h = T - r$, $b = -\cos\beta - \cos\varphi > 0$.

Рассмотрим теперь стационарную задачу с граничным условием $\partial U / \partial n = 0$. Пусть лучевое разложение падающей волны имеет вид $u = A(x, y)\, e^{-i\omega(t-p(x,y))} + \ldots$, т. е. получается из (1.3) заменой $f_0(\tau)$ на $e^{-i\omega\tau}$. Производя формально соответствующую замену в (4.4), получим

$$w_0(T, X, Y) = e^{-i\omega T} \frac{\sqrt{2}\, a A_0 e^{i(\omega r + n\pi/2 - \pi/4)} (1 + \cos\beta\cos\varphi)}{\sqrt{\pi r}\, \omega^{n-1/2} (-\cos\beta - \cos\varphi)^{n+1}} + O(\omega^{-n-1/2}) \tag{6.2}$$

В случае, когда при $x < 0$ граница — прямая линия, а при $x \geqslant 0$ — кривая, и при этом $\beta = \pi$, такая задача решалась приближенными методами [3,4].

Заметим также, что известный метод Кирхгофа дает для волны w_0 выражение, совпадающее с (6.2) с точностью до $O(\omega^{-n-1/2})$.

7. Проведем строгую оценку влияния отброшенного члена G_1 на величину интеграла (1.5) в случае, когда $m \geqslant 6$ в (2.1). При помощи четырехкратного интегрирования по частям из (1.5) получим

$$w(T, X, Y) = \iint \frac{\partial^4 q(t,x)}{\partial t^4} H(T - t, X, Y; x, y)\, dt\, ds \tag{7.1}$$

В силу (3.1) $H = H_0 + H_1$; функции H и H_i получаются из G и G_i четырехкратным интегрированием по T. Так как функция Грина G удовлетворяет граничному условию $\partial G / \partial n = 0$, то H тоже. Следовательно, на Γ

$$\partial H_1 / \partial n = -q^*(t, x) \qquad (q^* \equiv \partial H_0 / \partial n |_\Gamma) \tag{7.2}$$

Заменим $T - t$ на t и рассмотрим $H_1(t, X, Y; x, y)$ как функцию от t, x, y. Тогда, как в п. 3, $H_0 = H_2 + H_3$, где

$$H_2 = (2\pi\rho)^{-1/2} (t - \rho)^{m_1} / \Gamma(m_1 + 1) + O((t - \rho)^{m_1+1}), \qquad m_1 = 7/2 \tag{7.3}$$

а H_3 — волна, образующаяся при отражении волны H_2 от границы Γ_0. Поэтому для оценки функции q^* можно использовать формулу (2.6) при

$$m = 7/2, \qquad A_0 = (2\pi r)^{-1/2}, \qquad \beta = \varphi, \qquad r = (X^2 + Y^2)^{1/2}$$

Оценим функцию q^* и ее первые производные в области $|t - r| + |x| < Ch$ при малых h. Так как в этой области $\psi' = O(h^{n-1})$, $\tau = O(h)$, $\tau - \tau_0 = O(h^n)$ в силу (2.9), то из (2.6) имеем $q^* = O(h^{n+1/2})$. Аналогично оцениваются производные

$$q_t^* = O(h^{n+1/2}), \qquad q_x^* = O(h^{n+1/2}) \tag{7.4}$$

Перейдем к оценке функции H_1. Она удовлетворяет волновому уравнению, граничному условию (7.2) и равна нулю там, где $H = H_0$, т. е. там, куда еще не пришли волны, образующиеся при отражении волны (7.3) от участков $x > 0$ границ Γ и Γ_0. Представим H_1 в виде $H_1 = V + W$, где V — построенная ниже функция, удовлетворяющая граничному условию (7.2), а W удовлетворяет однородному граничному условию и неоднородному уравнению

$$W_{tt} - \Delta W = f \quad (f \equiv \Delta V - V_{tt}), \qquad \partial W / \partial n = 0 \quad \text{на } \Gamma \tag{7.5}$$

Пусть $\omega(\tau, \xi)$ — какая-нибудь функция класса C^2, положительная в области Q $(1 < \tau < 2,\ 0 < \xi < 1)$, равная нулю вне Q и такая, что интеграл от нее по области Q равен единице. Пусть n — нормаль к Γ,

$$\eta = y - g(x), \qquad q^\circ(t, x) = q^*(t, x)\cos(n, y)$$

$$V(t, x, y) = -\eta \iint q^\circ(t - \eta\tau, x - \eta\xi)\, \omega(\tau, \xi)\, d\tau\, d\xi$$

Оценим производные функции V

$$V_y = V_\eta = -\iint (q^\circ - \eta\tau q_t^\circ - \eta\xi q_x^\circ)\, \omega\, d\tau\, d\xi$$

Так как на Г, т. е. при $\eta = 0$, имеем $V = 0$, $V_y = -q^\circ$, то $\partial V / \partial n = -q^*$ на Г. Далее, $q_\tau{}^\circ = -\eta q_t{}^\circ$, $q_\xi{}^\circ = -\eta q_x{}^\circ$, поэтому после интегрирования по частям получится

$$V_y = \iint q^\circ \quad (\omega + \tau\omega_\tau + \xi\omega_\xi)\, d\tau d\xi$$

Аналогично V_t и V_x выразятся через q°, а вторые производные от V — через первые производные от q°. Поэтому из (7.4), и (7.5) следует $f = O\,(h^{n+1/2})$.

Оценим энергию волны W. Пусть K — та часть конуса K_0 $(-C_2h < t - r < C_1h - \sqrt{x^2 + y^2})$, в которой $y > g\,(x)$; пусть $K\,(t)$ — ее сечение плоскостью $t = \text{const}$, а r и φ те же, что в (3.4). Пусть число C_2 выбрано так, что $H_1 = V = 0$ на основании конуса, т. е. на $K\,(t_0)$ при $t_0 = r - C_2h$.

Такой выбор возможен при $0 < h < h_0$, так как $H_1 = H - H_0 = 0$ вне области влияния участков $x > 0$ границ Г и Γ_0, а на этих участках $H = H_0 = 0$ там, куда еще не дошла волна (7.3), т. е. при $t - r < -x \cos\varphi + O\,(x^2)$. Для любого фиксированного $\delta > 0$ при $\delta \leqslant \varphi \leqslant \pi$ число C_2 можно взять не зависящим от φ и h.

Пусть $E\,(t)$ — энергия волны W в области $K\,(t)$, т. е.

$$E\,(t) = \frac{1}{2} \iint\limits_{K\,(t)} (W_t{}^2 + W_x{}^2 + W_y{}^2)\, dx\, dy \tag{7.6}$$

Так как $W = W_t = 0$ в $K\,(t_0)$, то аналогично [5], стр. 312

$$E\,(t) \leqslant \left[\int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{2} \iint\limits_{K\,(t_1)} f^2 dx\, dy\right)^{1/2} dt_1\right]^2 \leqslant \frac{t - t_0}{2} \iiint\limits_{K} f^2\, dx\, dy\, dt.$$

Так как $t - t_0 < C_1h + C_2h$, $f = O\,(h^{n+1/2})$, то $E\,(t) = O\,(h^{2n+5})$.

Оценим функцию W на Γ_h — части Г, заключенной внутри призмы $|\,t - r\,| + |\,x\,| < C_0h$. Если отношение $C_1 : C_0$ достаточно велико, то $W = 0$ на части S_h боковой поверхности конуса K_0, лежащей внутри призмы. Поэтому на Γ_h

$$H_1{}^2 = W^2 = (\textstyle\int W_y dy)^2 \leqslant (C_1 + C_2)\, h \int W_y{}^2 dy$$

Интеграл взят по отрезку, соединяющему Γ_h и S_h. Интегрируя обе части неравенства по t, x в области Γ_h и замечая, что тройной интеграл от $W_y{}^2$ не превосходит в силу (7.6) интеграла от $2E\,(t)$, имеем

$$\iint\limits_{\Gamma_h} H_1{}^2\, dt\, dx = O\ (h^{2n+7}) \tag{7.7}$$

Оценим теперь ту часть J_1 интеграла (7.1), которая получается при замене H на H_1 и которая была отброшена при выводе формулы (4.4). Так как $q = \partial(u + v) / \partial n|_\Gamma$, то из (2.1) и (2.6) следует, что $\partial^4 q / \partial t^4 = O\,(h^{n+m-6})$. Согласно (3.6) — (3.8), при $\varphi > \pi - \beta + \delta$ в (7.1) интегрирование производится по области, лежащей в окрестности начала координат радиуса $O\,(h)$. Пользуясь неравенством Буняковского и полученными оценками, имеем $J_1 = O\,(h^{2n+m-3/2})$. Так как $n \geqslant 2$, то J_1 можно включить в остаточный член формулы (4.4).

Из полученной оценки следует также, что в случае $n > 2$ можно найти еще $n - 2$ члена лучевого разложения волны (4.4), заменив в (1.5) G на известную функцию G_0.

8. В случае граничного условия $U = 0$ строгая оценка влияния отброшенных членов проводится в основном тем же способом. Пусть $m \geqslant 4$ в (2.1). Из (5.1) при помощи двукратного интегрирования по частям получается равенство

$$w\,(T,\ X,\ Y) = -\iint \frac{\partial^3 q\,(t,\ x)}{\partial t^3}\, \frac{\partial}{\partial n}\, H\,(T - t,\ X,\ Y;\ x,\ y)\, dt\, ds \tag{8.1}$$

Аналогично (3.1), $H = H_0 + H_1$; функции H и H_i получаются из G и G_i трехкратным интегрированием по T. Вместо (7.2) имеем на Г $H_1 = -q^*\,(t, x)$, $q^* = H_0$, а в (7.3) теперь $m_1 = {}^5/_2$. Оценки (7.4) сохраняются, но H_1 оценивается иначе.

Лемма. Пусть K — та часть конуса $t_0 \leqslant t \leqslant t_1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, где $y > g(x)$, причем $|g'(x)| \leqslant \text{const}$; B — часть поверхности $y = g(x)$, находящаяся внутри конуса. Пусть u — решение уравнения $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ в K, удовлетворяющее условиям $u = u_t = 0$ при $t = t_0$, и $u = \varphi$ на B. Тогда

$$\iint\limits_B \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 \alpha\, ds\, dt \leqslant 2 \iint\limits_B \frac{(1 + |\beta|)^2}{\alpha} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2\right] ds\, dt \tag{8.2}$$

$$\alpha = \cos(n, y) = (1 + g'^2)^{-1/2}, \quad \beta = \cos(n, x) = -\alpha g'$$

Здесь s — длина дуги кривой $y = g(x)$.

Лемма доказывается путем интегрирования по области K тождества $2(u_t + u_y)(u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}) \equiv 0$ и преобразования полученных объемных интегралов в поверхностные.

Замечание. При помощи неравенства (8.2) легко оценить также энергию $E(t)$ волны u на любом сечении $t = t_2$ области K

$$E(t_2) \equiv \frac{1}{2} \iint\limits_{K(t_2)} (u_t^2 + u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy = - \iint\limits_{B\,(t < t_2)} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dt\, ds \tag{8.3}$$

Правая часть оценивается при помощи (8.2) и неравенства Буняковского.

Применяя лемму в случае, когда $u = H_1$, $\varphi = q^*$, а область K — та же, что в п. 7, получим

$$\iint\limits_{\Gamma_h} \left(\frac{\partial H_1}{\partial n}\right)^2 ds\, dt \leqslant C \iint\limits_{\Gamma_h} \left[\left(\frac{\partial q^*}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial q^*}{\partial x}\right)^2\right] ds\, dt = O(h^{2n+3})$$

Учитывая, что в (2.1) $m \geqslant 4$, получим $\partial^3 q / \partial t^3 = O(h^{n+m-4})$ на Γ_h. Следовательно, интеграл от $\partial^3 q / \partial t^3 \partial H_1 / \partial n$ по Γ_h равен $O(h^{2n+m-3/2})$, и при $n \geqslant 2$ его можно включить в остаточный член формулы (5.2).

9. Изложенный выше метод применим и в том случае, когда граница Γ области состоит из двух гладких дуг, образующих угол в точке O, т. е. метод применим и к задаче дифракции волны в угловой области с кривыми сторонами. В качестве Γ_0 надо взять угол, образованный полупрямыми, касательными к данным дугам в точке O. Известно, что в в этой задаче первый член лучевого разложения дифрагированной волны такой же, как в задаче дифракции на Γ_0. Изложенный метод позволяет получить второй член и строго оценить остаток (на том участке фронта дифрагированной волны, где отсутствует отраженная волна).

Пусть для падающей волны (1.3) известны два члена лучевого разложения. Решение задачи о дифракции этой волны на Γ равно сумме известного (см. [5], п. 4), решения задачи о дифракции этой волны на Γ_0 и поправки w, определяемой по формуле (1.5) или (5.1). Как и выше, $G = G_0 + G_1$, где G_0 — известная [5] функция Грина для области с границей Γ_0, а G_1 — остаток. Как в пп. 4 и 5, $w = O(h^{n+m-1/2})$, а отбрасывание G_1 дает ошибку в величине w, равную $O(h^{2n+m-3/2})$ (что доказывается так же, как в пп. 7 и 8) и не влияет на второй член лучевого разложения дифрагированной волны, равный $O(h^{m+3/2})$.

Поступила 7 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л., Изд-во ЛГУ, 1961, Сб. 5.
2. Г у р с а Э. Курс математического анализа, т. 3, ч. 1, М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1933.
3. П о п о в А. В. Численное решение задачи о дифракции плоской волны на закругленном крае полубесконечной пластины. Акуст. журн., 1968, т. 14, вып. 4
4. W e s t o n V. H. Extension of Fock theory for currents in the penumbra region. Radio Sci. J. Res. NBS, 1965 69D, 9, pp. 1257—1270.
5. Ф и л и п п о в А. Ф. Дифракция произвольной акустической волны на клине. ПММ., 1964, т. 28, вып. 2.