

## О ПОСТРОЕНИИ КОНТУРА СВЕРХЗВУКОВОГО СОПЛА С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ УСЛОВИЙ ПОЛЕТА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

А. Н. Крайко, А. А. Осипов

(Москва)

Ниже рассмотрена задача построения жесткого (нерегулируемого) контура сверхзвуковой части сопла, являющегося оптимальным в смысле решения некоторой траекторной задачи с учетом изменения условий полета и режима работы двигателя. Летательный аппарат при этом считается материальной точкой переменной массы, а его сопротивление в каждый момент предполагается равным соответствующей стационарной величине. Такой же подход применяется при рассмотрении течения в сопле. Это означает, что давление и прочие параметры в каждый момент определяются уравнениями стационарного (в системе координат, связанной с соплом) течения при условиях, существующих на входе в сопло в тот же момент.

Наряду с общими результатами подробно изучены два случая, когда решение задачи с использованием полученных условий оптимальности оказывается сравнительно простым. Первый случай реализуется, если распределение чисел Маха на входе в сопло не меняется во время полета. Установлено, что здесь оптимальный контур принадлежит семейству контуров, соответствующих решению вариационной задачи с фиксированными условиями. Второй случай реализуется, если поток на входе в сопло во время всего полета сохраняется равномерным и сверхзвуковым, а сопло является плоским и «коротким». Здесь образующая оптимального сопла прямолинейна.

Задача профилирования сверхзвуковой части плоского или осесимметричного сопла, реализующего максимум тяги при фиксированном потоке на входе и заданных внешних условиях, в настоящее время получила достаточно полное решение [1-4]. Данная ниже постановка задачи связана с тем, что во многих приложениях, однако изменения условий полета и параметров на входе в рассматриваемую часть сопла весьма значительны, причем течение на входе может меняться как в результате изменения условий полета, так и вследствие регулирования режима работы двигателя. Отметим, кстати, что оптимальное управление режимом представляет самостоятельную задачу, которой посвящена обширная литература (см., например, [5-7]).

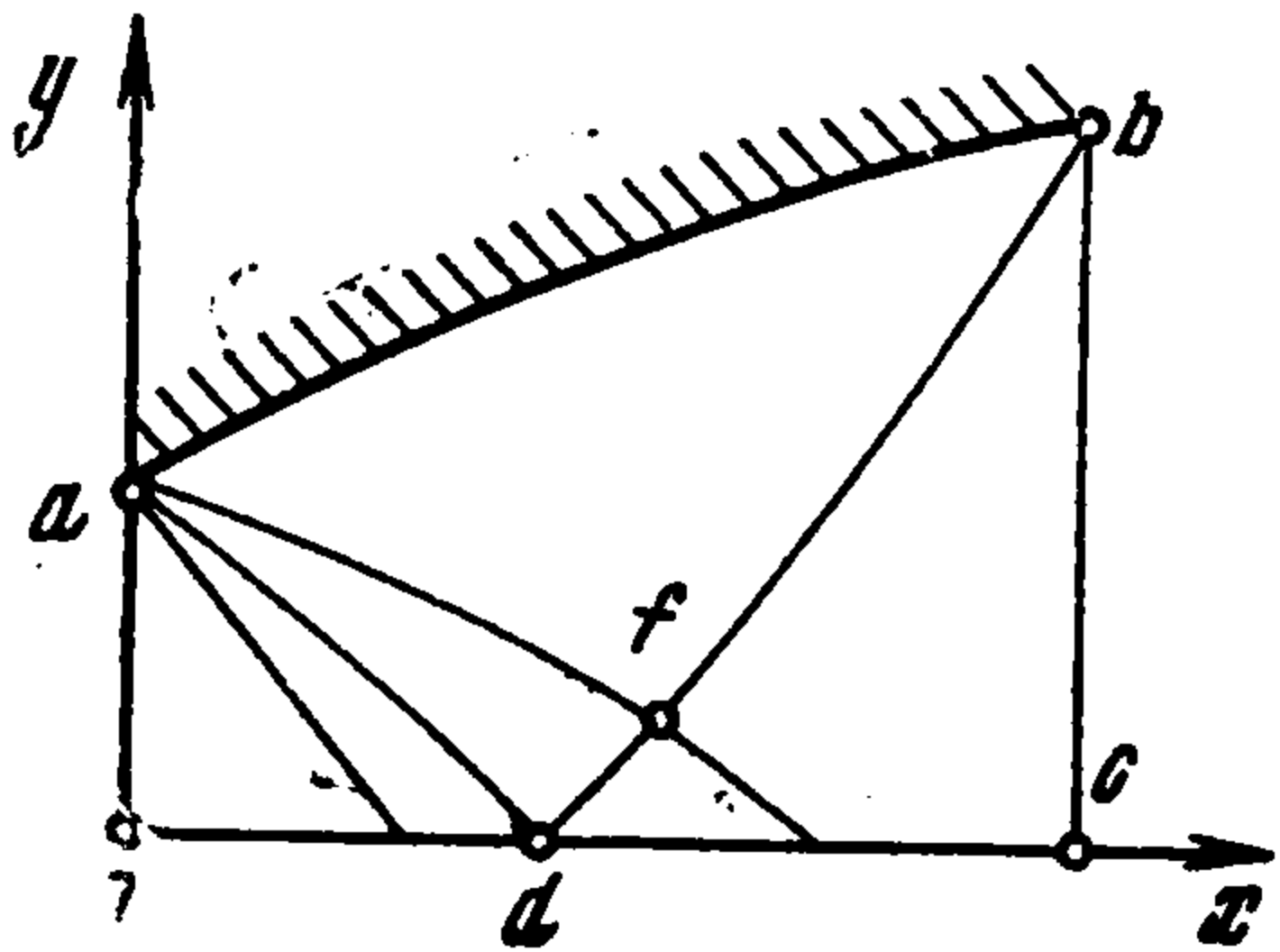
1. Рассмотрим плоское движение летательного аппарата, который будем считать материальной точкой, в атмосфере при наличии постоянного поля тяготения. Ограничимся случаем, когда направления вектора скорости аппарата  $V$  и тяги двигателя  $\chi$  совпадают. Пусть  $t$  — время,  $m$  — масса аппарата,  $h$  и  $l$  — вертикальная и горизонтальная координаты,  $\theta$  — угол наклона траектории к горизонту,  $G$  — массовый расход топлива в единицу времени,  $V = |V|$ ,  $\chi = |\chi|$ , а  $F_\tau$  и  $F_n$  — проекции вектора внешних сил на направление траектории и нормаль к ней. Тогда движение аппарата описывается уравнениями

$$\begin{aligned} K_1 \equiv m' + G &= 0, & K_2 \equiv V' - (\chi - F_\tau) / m &= 0 \\ K_3 \equiv h' - V \sin \theta &= 0, & K_4 \equiv \theta' + F_n / mV &= 0 \\ K_5 \equiv l' - V \cos \theta &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где точкой обозначены производные по  $t$ .

Все параметры в (1.1) будем считать безразмерными. Если  $h_*^\circ$ ,  $V_*^\circ$  и  $m_*^\circ$  — характерные величины с размерностями длины, скорости и массы, тогда при обезразмеривании  $h$  и  $l$  отнесены к  $h_*^\circ$ , скорость — к  $V_*^\circ$ , время — к  $h_*^\circ / V_*^\circ$ , силы — к  $m_*^\circ V_*^\circ{}^2 / h_*^\circ$  и расход топлива — к  $m_*^\circ V_*^\circ / h_*^\circ$ . Для плоского летательного аппарата здесь и далее все величины считаются отнесенными к единице его ширины.

Рассмотрим далее течение в плоском ( $\nu = 0$ ) или осесимметричном ( $\nu = 1$ ) сопле (фиг. 1), ось или плоскость симметрии которого в каждый момент



Фиг. 1

предполагается касающейся траектории летательного аппарата. Пусть  $xy$  — прямоугольная система координат, связанная с соплом. Поток на входе в исследуемую часть сопла ( $x = 0$ ) в каждый момент будем считать равномерным и сверхзвуковым (или звуковым), а газ — невязким и нетеплопроводным. Ограничимся случаем, когда в части области влияния контура  $ab$ , ограниченной справа характеристикой первого семейства  $fb$  отсутствуют ударные волны. Тогда течение в области  $D = D(t)$ , ограниченной отрезками  $oa$  и  $od$  осей  $y$  и  $x$ , характеристикой  $db$  и контуром  $ab$ , в каждый момент времени описывается уравнениями

$$L_1 \equiv u_y - v_x = 0, \quad L_2 \equiv \rho u_x + \rho v_y + u\rho_x + v\rho_y + \nu\rho\nu y^{-1} = 0 \quad (1.2)$$

где  $\rho$  — плотность,  $u$  и  $v$  — проекции вектора скорости на оси  $x$  и  $y$ , индексы  $x$  и  $y$  означают соответствующие частные производные. При написании (1.2) не учитывались, кроме того, силы инерции, вызванные ускорением аппарата.

Все величины в (1.2), а также давление газа  $p$  — безразмерные. Независимые переменные отнесены к  $ya^\circ$  — размерной ординате точки  $a$ , скорости — к  $w_0^\circ$ , плотности — к  $\rho_0^\circ$  и давление к  $\rho_0 w_0^\circ{}^2$ , где  $w_0^\circ$  и  $\rho_0^\circ$  — размерные значения скорости и плотности на входе в рассматриваемую часть сопла, т. е. при  $x = 0$  в данный момент. В соответствии с этим и со сделанными предположениями при  $x = 0$  в течении всего времени работы двигателя имеем:  $v \equiv 0$ ,  $u \equiv \rho \equiv 1$ , а число Маха  $M \geq 1$ .

Ограничимся далее случаем, когда уравнение состояния и выражение для удельной энтальпии вместе с условиями изоэнтропичности и изоэнергетичности, которые в данных условиях выполняются для каждого стационарного течения в  $D$ , приводят, как и для совершенного газа, к равенствам

$$\rho = \rho(w, p_0), \quad p = p(w, p_0) \quad (1.3)$$

где  $w$  — модуль скорости,  $p_0$  — безразмерное давление при  $x = 0$ ; функции, стоящие справа, известны, причем, если  $a$  — скорость звука, то  $(\partial p / \partial w)_{p_0} = -\rho w$  и  $(\partial \rho / \partial w)_{p_0} = -\rho w a^{-2}$ .

Вдоль стенки сопла, уравнение которой  $x = x(y)$ , выполняется условие непротекания

$$L \equiv x' - u/v = 0$$

Здесь и далее штрихом обозначается полная производная по  $y$  вдоль соответствующего направления.

В соответствии с обезразмериванием в (1.1) и (1.2) имеем

$$\chi = \left( 1 + p_0 + \int_a^b p y^\nu dy \right) k \quad \left( k = \frac{2\pi^\nu (y_a^\circ)^{1+\nu} h_*^\circ \rho_0^\circ w_0^{\circ 2}}{m_*^\circ V_*^{\circ 2}} \right) \quad (1.4)$$

Зависимости  $p_0$  и  $k$  от  $V$ ,  $h$  и  $G$  определяются типом двигателя и рабочим процессом в нем и считаются известными. При написании (1.4) предполагается, что импульс на входе в воздухозаборник (в случае воздушно-реактивного двигателя) включается в сопротивление аппарата, т. е. в  $F_\tau$ . В проекцию  $F_\tau$  включается также сила донного давления, действующего на торец  $x \equiv x_b$ , который может появиться при задании максимально допустимой длины сопла  $X$ . Силы  $F_\tau$  и  $F_n$  примем в виде

$$F_\tau = F^1(V, h, x_b, y_b) + mg \sin \theta, \quad F_n = F^2(V, h) + mg \cos \theta$$

где  $F^1$  и  $F^2$  — известные функции, а индекс  $b$ , как и ранее, приписан параметрам в соответствующей точке. Данная запись предполагает, что внешние обводы аппарата берутся из некоторого двухпараметрического семейства, зависящего от  $x_b$  и  $y_b$ .

2. Сформулируем вариационную задачу. Пусть в начальный момент  $t = t_1$  известны координаты, скорость и масса летательного аппарата, т. е.  $l_1, h_1, V_1, \theta_1$  и  $m_1$ , если нижний индекс  $i$  приписывать параметрам аппарата при  $t = t_i$ . Требуется построить жесткий контур сопла:  $x = x(y) \leq X$ , проходящий через заданную точку  $a$  и обеспечивающий при фиксированных параметрах аппарата при  $t = t_1$  максимум некоторой функции  $\Phi$  от параметров в конечной точке  $t = t_2$  рассматриваемого участка траектории, т. е. от  $t_2, l_2, h_2, V_2, \theta_2$  и  $m_2$ . Если  $\Phi = -t_2$ , то имеем задачу на быстрое действие, если  $\Phi = -m_2$  — на минимальный расход топлива, если  $\Phi = V_2$  — на достижение максимальной скорости и т. п., причем остальные параметры при  $t = t_2$  или их часть в указанных задачах могут быть заданы.

Движение аппарата и распределение давления по стенке сопла, а следовательно, и  $X$  определяются в соответствии с уравнениями и условиями предыдущего пункта. Наконец,  $G = G(t)$  или считается известной функцией, или может также рассматриваться как управление и определяться одновременно с контуром сопла из условия оптимальности функционала  $\Phi$ . В последнем случае будем считать, что  $G_{\min} \leq G(t) \leq G_{\max}$ , где  $G_{\min}$  и  $G_{\max}$  — заданные константы. Кроме того, возможен полет с выключенным двигателем, когда  $G \equiv 0$ , а  $\chi = k p^+ y_b^{1+\nu} / (1 + \nu)$ , где  $p^+$  — так называемое донное давление (безразмерное). Выбор  $\rho_0^\circ w_0^{\circ 2}$  при этом будем производить так, что  $p^+ \equiv \text{const}$ .

3. Необходимые условия экстремума, определяющие оптимальный контур  $ab$ , а в случае необходимости и управление  $G(t)$ , находятся из рассмотрения первой вариации функционала

$$I = \Phi + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^5 \lambda_i K_i + \int_a^b \beta L dy + \iint_D (\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2) dx dy \right\} dt \quad (3.1)$$

где  $\lambda_i(t)$ ,  $\beta(y, t)$  и  $\mu_i(x, y, t)$  — множители Лагранжа. При допустимом варьировании вариации функционалов  $I$  и  $\Phi$  совпадают.

Применяя к (3.1) обычную процедуру варьирования и выбора множителей Лагранжа, найдем, что оптимальный контур определяется условиями

$$\int_{t_1}^{t_3} y^\nu \rho v \left( Wu - \frac{y_2}{y^\nu} \right)' dt = 0 \quad \text{на } ab$$

$$\int_{t_1}^{t_3} \frac{\lambda_2}{m} (F_{x_b}^1 + ky^\nu \rho v^2 \operatorname{tg} \alpha)_b dt \geq 0 \quad (3.2)$$

$$\int_{t_1}^{t_3} \frac{\lambda_2}{m} \{ F_{y_b}^1 + ky^\nu (\rho uv \operatorname{tg} \alpha - p) \}_b dt = 0$$

где второе и третье условия определяют соответственно  $x_b$  и  $y_b$ , причем, если  $x_b < X$ , то в условии для  $x_b$  остается только равенство. При  $t > t_3$ , где  $t_3$  определено ниже, в подынтегральных выражениях  $u = v = 0$ , а  $p = p^+$ .

В (3.2) и далее нижние индексы  $x_b$ ,  $y_b$ ,  $V$ ,  $h$  и т. п. приписаны соответствующим частным производным;  $\alpha = \arcsin (a/w)$  — угол Маха, а  $W = \lambda_2 k / m$ .

Множитель  $\lambda_2$  определяется вместе с прочими множителями  $\lambda_i$  из системы

$$m^2 V \lambda_1 \cdot - \lambda_2 V (\chi - F_\tau) - \lambda_2 V mg \sin \theta + \lambda_4 F^2 = 0$$

$$m V^2 \lambda_2 \cdot + \lambda_2 V^2 \{ \chi (\ln k)_V + k (p_0)_V - F_V^1 \} + \varepsilon m V^2 (p_0)_V +$$

$$+ \lambda_3 m V^2 \sin \theta + \lambda_4 (F_n - V F_V^2) + \lambda_5 m V^2 \cos \theta = 0 \quad (3.3)$$

$$m V \lambda_3 \cdot + \lambda_2 V \{ \chi (\ln k)_h + k (p_0)_h - F_h^1 \} + \varepsilon m V (p_0)_h - \lambda_4 F_h^2 = 0$$

$$V \lambda_4 \cdot - \lambda_2 V g \cos \theta + \lambda_3 V^2 \cos \theta + \lambda_4 g \sin \theta - \lambda_5 V^2 \sin \theta = 0$$

$$\lambda_5 \cdot = 0 \left( \varepsilon = k \frac{\lambda_2}{m} \int_a^b \left( \frac{\partial p}{\partial p_0} \right)_w y^\nu dy + \iint_D \rho \mu_2 (u R_x + v R_y) dx dy \right)$$

где  $R \equiv (\partial \ln \rho / \partial p_0)_w$  и  $(\partial p / \partial p_0)_w$  вычисляются в соответствии с (1.3).

В случае, когда параметр  $m_2$ ,  $V_2$ , ... свободен или оптимизируется, граничное условие для множителя  $\lambda_i$ , вводящего соответствующее уравнение из (1.1), имеет вид

$$\lambda_1 = -\Phi_{m_2}, \quad \lambda_2 = -\Phi_{V_2}, \quad \lambda_3 = -\Phi_{h_2}, \quad \lambda_4 = -\Phi_{\theta_2} \quad (3.4)$$

$$\lambda_5 = -\Phi_{l_2} \quad (\text{при } t = t_2)$$

а само значение  $t_2$  или задано или определяется условием

$$\{ m V \Phi_{t_2} + \lambda_1 m V G - \lambda_2 V (\chi - F_\tau) - \lambda_3 m V^2 \sin \theta + \lambda_4 F_n - \lambda_5 m V^2 \cos \theta \}_2 = 0 \quad (3.5)$$

Если какой-либо параметр в конечной точке траектории задан, то значение соответствующего множителя  $\lambda_i$  при  $t = t_2$  находится не из (3.4), а подбирается так, чтобы оптимальный контур обеспечил удовлетворение указанного условия.

Может случиться, что заданное значение  $m = m_2$  достигается при  $t_3 < t_2$ . Тогда при  $t_3 < t < t_2$  реализуется полет с выключенным двигателем. Здесь первое уравнение системы (3.3) интегрируется лишь для  $t \leq t_3$ , а в (1.1) и (3.3) при  $t > t_3$  и в (3.5) опускаются  $G$  и  $\lambda_1$ . Граничное условие для  $\lambda_1$  при этом имеет вид

$$\lambda_1 m G - \lambda_2 [\chi] = 0 \quad \text{при } t \rightarrow t_3$$

где  $[\chi]$  — скачок  $\chi$  в момент выключения двигателя. Наконец, если в некоторый момент

$t = t_j$  функция  $G(t)$  терпит разрыв, то множители  $\lambda_i$  в точке разрыва сохраняют непрерывность. Исключение представляет рассмотренный выше случай  $t_j = t_3$ , когда  $\lambda_1$  определено лишь при  $t \leq t_3$ .

Множители  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в подобластях их непрерывности в  $D$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} a^2 \mu_{1y} + \rho (a^2 - u^2) \mu_{2x} - \rho uv \mu_{2y} + \nu \rho uv y^{-1} \mu_2 &= 0 \\ a^2 \mu_{1x} + \rho uv \mu_{2x} + \rho (v^2 - a^2) \mu_{2y} + \nu \rho (a^2 - v^2) y^{-1} \mu_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

которые имеют те же характеристики, что и уравнения течения. Вдоль характеристик выполняются соотношения

$$[\mu_1' \operatorname{tg} \alpha \mp \mu_2' \rho \pm \nu \rho y^{-1} \mu_2 = 0 \quad (3.7)$$

Здесь и ниже верхний знак соответствует характеристикам первого семейства, а нижний — второго.

В общем случае области непрерывности  $\mu_i$  разделяются линиями разрыва, которыми могут быть характеристики первого и второго семейства [4,8,9]. Если  $[\mu_i]$  — разность  $\mu_i$  до и после разрыва (в направлении течения газа), то на разрывах выполняется соотношение

$$[\mu_1] \pm [\mu_2] \rho \operatorname{ctg} \alpha = 0 \quad (3.8)$$

Граничные условия, которые наряду с (3.8) требуются для интегрирования (3.6), ставятся на оси сопла, на контуре  $ab$  и на характеристике  $db$  и имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_1 = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad \mu_1 = y^\nu \rho v W \quad \text{на } ab \\ \mu_1 + \mu_2 \rho \operatorname{ctg} \alpha = 0 \quad \text{на } db \end{aligned} \quad (3.9)$$

Условия (3.9) вместе с соответствующим уравнением из (3.7) позволяют определить  $\mu_i$  на  $db$ . В итоге получим, что на  $db$

$$\begin{aligned} \mu_1 = \sqrt{C y^\nu \rho \operatorname{ctg} \alpha}, \quad \mu_2 = -\sqrt{C y^\nu \operatorname{tg} \alpha / \rho} \\ C = (y^\nu \rho v^2 \operatorname{tg} \alpha)_b W^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь  $W$  то же, что в (3.2), а знаки корней берутся в соответствии с условиями (3.9).

В рассматриваемом случае разрыв  $\mu_i$  имеет место на характеристике  $ad$ , где

$$[\mu_1] = -\sqrt{C y^\nu \rho \operatorname{ctg} \alpha}, \quad [\mu_2] = \sqrt{C y^\nu \operatorname{tg} \alpha / \rho} \quad (3.11)$$

причем константа  $C$  и знаки квадратных корней здесь те же, что и в (3.10)

В плоском случае, т. е. при  $\nu = 0$ , необходимость разрыва на  $ad$  и равенства (3.11) вытекают из сопоставления условия на оси из (3.9) с первой формулой (3.10) и последующего применения (3.8). В осесимметричном случае ( $\nu = 1$ ) при приближении к оси на  $db$  в соответствии с (3.10) множитель  $\mu_1$  стремится к нулю. Здесь разрыв  $\mu_i$  на  $ad$  появляется из-за разрыва  $\mu_{1x}$  в точке  $d$ . При этом формулы (3.11) можно получить или, как в [9], или предельным переходом из рассмотрения сопла с цилиндрическим центральным телом радиуса  $r$ . Для такого сопла (3.9) и (3.10) по-прежнему выполняются, если  $y = 0$  заменить на  $y = r$ , а  $db$  на  $d'b$ , где  $d'$  — точка пересечения характеристики первого семейства  $d'b$  с центральным телом. Вследствие этого оказываются справедливыми и равенства (3.11) на  $ad'$ , которые выполняются здесь при любых  $r > 0$ .

При достаточно малых  $r$  характеристики  $ad'$  и  $ad$  практически совпадают, а интенсивность разрыва  $\mu_i$  на них при любом фиксированном  $y$ , определяемая формулами (3.11), перестает зависеть от  $r$ , что и служит обоснованием справедливости предельного перехода при  $r \rightarrow 0$ .

Пусть из каких-то соображений выбран контур  $ab$ . Тогда совместное решение уравнений (1.1) и (1.2) при соответствующих начальных и граничных условиях позволяет найти изменение по  $t$  параметров летательного аппарата и для каждого момента времени — распределение параметров течения в сопле. Это в свою очередь позволяет с использованием уравнений и условий (3.3)—(3.11) определить  $\lambda_i(t)$  и  $\mu_i(x, y, t)$ , в том числе  $\lambda_2$  и  $\mu_2$ , которые входят в условия оптимальности (3.2). Проверка указанных условий может быть положена в основу процедуры построения оптимального сопла.

Вместо области  $D$  в (3.1) можно взять любую область, включающую  $D$  как подобласть. В частности, роль такой области может играть область  $D'$ , ограниченная контуром  $abcso$ , который не зависит от  $t$ . При этом условия на  $db$  заменяются равенствами:  $\mu_1 \equiv \mu_2 \equiv 0$  на  $cb$ , из которых в силу (3.6) и (3.9) следует, что  $\mu_i \equiv 0$  в треугольнике  $dbc$ , а  $db$  есть линия разрыва  $\mu_i$ . В итоге для определения  $\mu_i$  в  $D$  получаются прежние граничные условия (3.10) на  $db$ . Правда, возможны ситуации, когда при выполнении условия безвихренности в  $D$ , что само по себе весьма сильно ограничивает область применимости данного исследования, в треугольнике  $dbc$  образуются ударные волны. Однако и здесь строгое рассмотрение с привлечением в  $dbc$  вместо (1.2) уравнений вихревого течения и соотношений на ударных волнах приводит для  $\mu_i$  в области  $D$  и на ее границах к прежним результатам.

Заканчивая рассмотрение необходимых условий максимума  $\Phi$ , отметим, что, если наряду с формой сопла оптимизируется управление расходом, т. е.  $G(t)$ , то последнее должно выбираться из условия неположительности первой вариации

$$\delta\Phi = \int_{t_1}^{t_3} Q \delta G dt + \sum_j S_j \Delta t_j$$

Здесь  $t = t_j$  — моменты переключения  $G(t)$ , а  $Q$  и  $S$  определяются формулами

$$Q = \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{m} \{ \chi (\ln k)_G + k (p_0)_G \} - \varepsilon (p_0)_G, \quad S = \lambda_1 [G] - \frac{\lambda_2}{m} [\chi]$$

где  $[G]$  и  $[\chi]$  — скачки  $G$  и  $\chi$  при переключении.

При использовании данного подхода следует помнить, что течение в сопле в соответствии с (1.2) рассматривается в квазистационарном приближении. Поэтому, если  $G(t)$  — заданное или полученное в результате оптимизации — имеет точки разрыва, то контур, построенный в соответствии с условиями (3.2), будет близок к оптимальному (при действительном нестационарном течении) лишь в случае малости суммарного относительного времени быстротекающих переходных процессов в сопле<sup>1</sup>. По той же причине следует при данном подходе исключить из рассмотрения так называемые скользящие оптимальные режимы [10].

4. Пусть при возможных изменениях размерных параметров на входе в сопло безразмерное давление  $p_0$  или число Маха (что для рассматриваемого газа эквивалентно) постоянны. Это имеет место, например, если начальное сечение совпадает с горлом сопла. Заметим, кстати, что в этом случае, если при  $x = 0$  распределения безразмерных скоростей  $u$  и  $v$  также не меняются, то предположение о равномерности потока в сечении входа необязательно.

В рассматриваемой ситуации поля безразмерных параметров потока в сопле, характеристическая сетка и, в частности, замыкающая характеристика  $db$  будут одинаковы для всех точек траектории. Множители  $\mu_i$  при этом тем не менее зависят от  $t$  через функцию  $W(t)$  в условии на контуре из (3.9).

<sup>1</sup> Строго говоря, условие применимости квазистационарного приближения следует формулировать в виде ограничения на  $|G'|$ .

Обозначим верхним индексом градус (не путать с размерными параметрами) средние по  $t$  за время работы двигателя, т. е. за отрезок  $t_3 - t_1$ . Проинтегрируем затем по  $t$  уравнения и граничные условия для  $\mu_i$ , учитывая, что параметры потока, входящие в эти уравнения и условия, от  $t$  не зависят. В итоге получим, что  $\mu_i^\circ$  удовлетворяют тем же уравнениям и условиям, что и  $\mu_i$ , если в (3.9) и (3.10) функцию  $W(t)$  заменить на константу

$$W^\circ = \frac{1}{t_3 - t_1} \int_{t_1}^{t_3} W(t) dt$$

При этом первое условие оптимальности из (3.2) запишется в виде уравнения

$$(W^\circ u - y^{-\nu} \mu_2^\circ)' = 0 \quad \text{на } ab$$

которое после интегрирования дает

$$\mu_2^\circ = y^\nu (u + C_1) W^\circ \quad \text{на } ab \quad (4.1)$$

где  $C_1$  — константа интегрирования.

Далее, как и в [11], можно показать, что (4.1) и второе равенство из (3.9), записанное для  $\mu_1^\circ$ , есть интегралы уравнений для  $\mu_i^\circ$  и, как следствие этого, что оптимальный контур  $ab$  принадлежит известному семейству оптимальных контуров, которые обеспечивают максимум тяги при заданных условиях на входе в сверхзвуковую часть сопла, противодавлении и максимально допустимой длине [1-4]. Параметры на отрезке  $fb$  характеристики  $db$  сопел этого семейства в согласии с условием из (3.9) на  $db$  и полученными выше интегралами для  $\mu_i^\circ$ , которые дают решение задачи для осредненных по  $t$  множителей Лагранжа в треугольнике  $abf$ , удовлетворяют равенству

$$y^\nu \rho v^2 \operatorname{tg} \alpha = \text{const} \quad \text{на } fb \quad (4.2)$$

Кроме того, можно показать, что

$$u + v \operatorname{tg} \alpha + C_1 = 0 \quad \text{на } fb \quad (4.3)$$

где  $C_1$  — та же константа, что в (4.1).

В классе контуров, среди которых в силу сказанного выше следует в данном случае выбирать оптимальный контур и для которых имеют место равенства (4.2) и (4.3), интеграл в выражении (1.4) для  $\chi$  есть функция только  $x_b$  и  $y_b$ . При этом можно показать, что

$$\chi_{x_b} = k(y^\nu \rho v^2 \operatorname{tg} \alpha)_b, \quad \chi_{y_b} = k y_b^\nu (p - \rho u v \operatorname{tg} \alpha)_b$$

и поэтому второе и третье условия в (3.2), определяющие  $x_b$  и  $y_b$ , перепишутся в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\lambda_2}{m} (F_{x_b}^1 - \chi_{x_b}) dt \geq 0, \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{\lambda_2}{m} (F_{y_b}^1 - \chi_{y_b}) dt = 0 \quad (4.4)$$

При этом остается в силе все сказанное ранее относительно формул (3.2), в частности об участке полета с выключенным двигателем ( $t > t_3$ ).

Если рассматривается горизонтальный полет с постоянной скоростью, когда тяга равна сопротивлению, подъемная сила уравновешивается силой тяжести, а  $G(t) \equiv \text{const}$ , то выражения в скобках в (4.4) не зависят от  $t$  и могут быть вынесены из-под знака интеграла. На таком режиме  $\delta V$  также не зависит от  $t$  и в силу этого  $\lambda_2$  должно определяться не из (3.3) и (3.4), а из условия

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\lambda_2}{m} (\chi_V - F_V^1) + \lambda_5 \right\} dt - \Phi_V = 0 \quad (4.5)$$

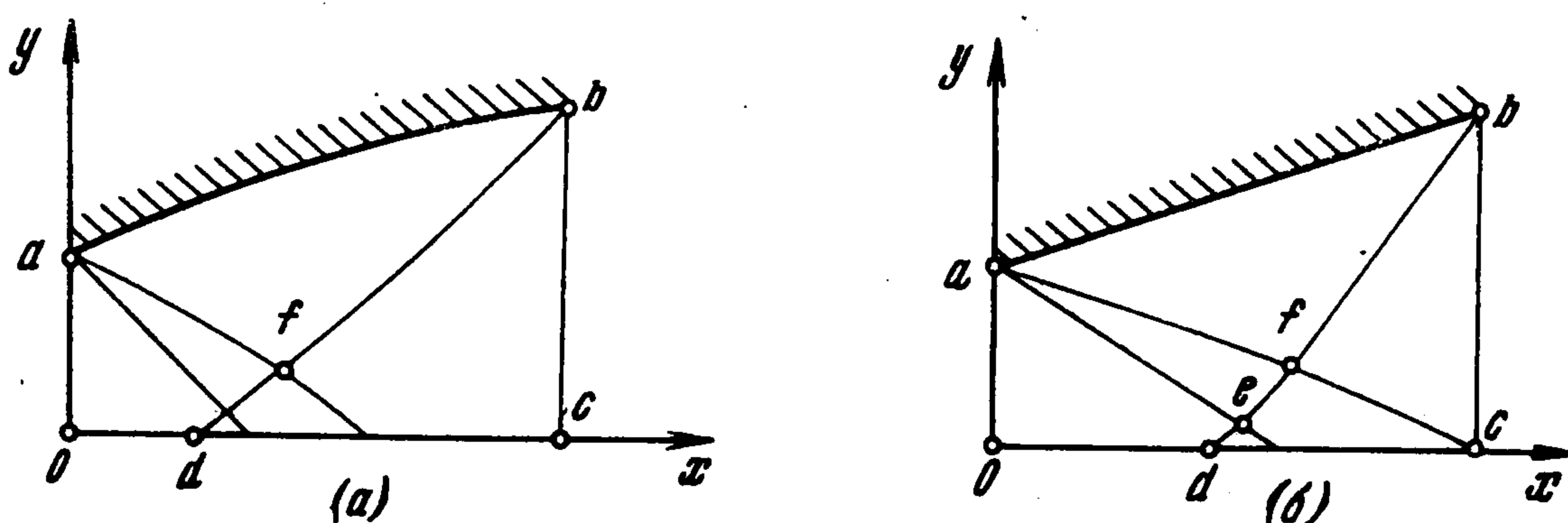
Ограничимся далее задачей о максимальной дальности ( $\Phi = l_2$ ). В этом случае, используя (3.3), (3.4) и (4.5), можно показать, что

$$(\chi_V - F_V^{-1}) \int_{t_1}^{t_2} \frac{\lambda_2}{m} dt = t_2 - t_1 > 0$$

Если рассматриваемый режим устойчив, то скобка перед интегралом отрицательна и поэтому условия (4.4) станут

$$k(y' \rho v^2 \operatorname{tg} \alpha)_b - F_{x_b}^{-1} \geq 0, \quad k y_b' (\rho v \operatorname{tg} \alpha - p)_b - F_{y_b}^{-1} = 0$$

5. Другой случай, когда построение контура оптимального сопла существенно упрощается, имеет место, если при  $t_1 < t < t_3$  поток на входе в сопло сверхзвуковой и равномерный, сопло плоское ( $v = 0$ ), а его максимально допустимая длина  $X$  такова, что в каждый момент времени реализуется ситуация, изображенная на фиг. 2, а. Суще-



Фиг. 2

ственной особенностью данной ситуации является то, что характеристика  $db$ , изменяясь с течением времени, всегда пересекает весь пучок волн разрежения, который образуется при обтекании излома в точке  $a$  и также деформируется с изменением числа Маха при  $x = 0$ . При этом характеристики второго семейства в указанном пучке слева от  $db$  прямолинейны, а параметры на каждой такой характеристике (в частности, на  $af$ ) постоянны.

Нетрудно видеть, что при  $v = 0$  функции  $u$ ,  $v$ ,  $\rho$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , зависящие только от  $t$ , но не зависящие от  $x$  и  $y$ , удовлетворяют как уравнениям течения (1.2), так и уравнениям (3.6) для  $\mu_i$ . Однородное по  $x$  и  $y$  течение в треугольнике  $abf$  удовлетворяет и реализующемуся в данном случае условию постоянства параметров потока на  $af$ . Множители  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в  $abf$  можно выразить через газодинамические величины при помощи условий на  $ab$  и  $fb$  из (3.9), при этом, так как  $u$  и  $\mu_2$  не зависят от  $x$  и  $y$ , то нетрудно видеть, что

$$(Wu - \mu_2)' = 0 \quad \text{на } ab$$

Поэтому первое условие оптимальности из (3.2) выполняется не только интегрально по  $t$ , но и в каждый момент времени. Таким образом, в данном случае оптимальный контур следует выбирать из класса контуров с прямолинейной образующей (фиг. 2, б). Координаты концевой точки  $b$  контура  $ab$  выбираются при этом в соответствии со вторым и третьим условиями из (3.2), которые и здесь можно переписать в форме (4.4). В силу постоянства параметров течения в треугольнике  $abf$  и левее первой характеристики пучка область  $D$  в выражении для  $\varepsilon$  в (3.3) сокращается до треугольника  $afe$ . Множители  $\mu_i$  в пучке слева от  $ef$  постоянны на каждой характеристике второго семейства и определяются значениями на  $ef$ , которые находятся по формулам (3.10) с  $v = 0$ . Отметим, кстати, что в данном случае

$$\varepsilon = (y_b - y_a) (dp_b / dp_0)$$

где  $(dp_b / dp_0)$  определяется в соответствии с формулами обтекания тупого угла.

Поступила 20 V 1970

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. ВЦ АН СССР, 1963.
2. Крайко А. Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. Тр. ВЦ АН СССР, 1963.
3. Крайко А. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. К построению тел оптимальной формы в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
4. Гонор А. Л., Крайко А. Н. Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверхзвуковых скоростях. В кн.: Теория оптимальных аэродинамических форм, М., «Мир», 1969, стр. 455—492.
5. Хоцимский Д. Е. К теории движения ракет. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.
6. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета, под ред. Дж. Лейтмана. М., «Наука», 1965.
7. Исследования по динамике полета. М., «Машиностроение», 1969.
8. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
9. Крайко А. Н., Осипов А. А. К решению вариационных задач сверхзвуковых течений газа с инородными частицами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
10. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Об оптимальных скользящих режимах в вариационных задачах динамики полета. Сб. «Исследования по динамике полета», М., «Машиностроение», 1965, стр. 217—236.
11. Борисов В. М., Шипилин А. В. О соплах максимальной тяги с произвольными изопериметрическими условиями. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.