Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

О ПРИМЕНЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ АНАЛОГИИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ОКОЛО ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ

М. Н. Коган, В. В. Михайлов

(Москва)

Указан класс нестационарных течений, для которого возможно прямое применение нестационарной аналогии при расчете гиперзвукового обтекания затупленного тела вдалеке от затупления.

Показано, что в общем случае применение нестационарной аналогии без введения энтропийных поправок в поле течения требует некоторой специальной деформации формы ударной волны при переходе от нестационарного течения к стационарному.

Для расчета гиперзвуковых течений около тонких затупленных тел часто используются известные решения уравнений нестационарного движения газа и установленная в работах [1-3] аналогия между стационарными и нестационарными течениями. Чаще всего для этой цели применяются решения для сильного взрыва [4] и решения для поршня, движущегося по степенному закону [5]. Однако при таком способе построения решения энтропия на поверхности тела, соответствующего поверхности поршня, оказывается равной бесконечности, и вблизи этой поверхности решение теряет физический смысл.

Указанный недостаток теории исправляется в работах [6-10]. В них рассматривается обратная задача, т. е. ищется стационарное течение, соответствующее скачку уплотнения, полученному при помощи нестационарной аналогии (пересчетом $x = u_\infty t$) из исходного нестационарного решения. В этих работах предложены методы введения так называемых энтропийных поправок к форме тела и параметрам потока, получаемым непосредственным применением нестационарной аналогии. В работе [9], в частности, показано, что в случае сильного взрыва такие поправки сводятся лишь к изменению формы тела, за поверхность которого следует принять линию тока, соответствующую траектории той частицы нестационарного течения, которая имеет энтропию, равную энтропии за прямым скачком уплотнения. Ниже будет указан полный класс течений, обладающий указанным свойством. Другие течения при указанной постановке обратной задачи требуют введения поправок как в форму тела, так и в поле течения, что значительно усложняет исследование [10]. Имея конечной целью построение некоторого класса стационарных течений около затупленных тел, в этой работе предлагается другой способ построения, позволяющий избежать упомянутых трудностей. Основная идея предлагаемого метода заключается в том, что поправки вводятся не в поле течения, а в форму головного скачка уплотнения, получаемую при помощи нестационарной аналогии. Форма этого скачка выбирается из условия полного совпадения полей стационарного и нестационарного решений, а форма тела соответствует траектории частицы нестационарного течения с энтропией, равной энтропии за прямым скачком уплотнения. При таком построении не возникает необходимости вводить какие-либо поправки ни в форму тела, ни в поле течения.

Естественно, что все сказанное относится к областям течения, в которых применима теория плоских сечений.

Рассмотрим возможность применения нестационарной аналогии для построения стационарных гиперзвуковых течений совершенного газа около плоских или осесимметричных затупленных тел. Найдем условия, при которых параметры известного нестационарного решения, пересчитанные по нестационарной аналогии, совпадают с параметрами некоторого стационарного течения в рамках к теории плоских сечений.

Пусть известному нестационарному и искомому стационарному соответствуют ударные волны $r = R_* (x)$ и $r = R (x)$, записанные в декартовой или цилиндрической системах координат (фиг. 1). Введем обозначения: p — давление, ρ — плотность, u_∞ — скорость невозмущенного потока, t — время, $\varkappa$ — показатель адиабаты. При помощи замены $t = x / u_\infty$ переведем нестационарное решение в плоскость rx. Предположим, что давление газа в невозмущенном потоке пренебрежимо мало. Тогда значения некоторой энтропийной функции, пропорциональной $\rho^\varkappa / p$, за стационарным (S) и нестационарным (S_*) скачками уплотнения могут быть записаны в виде

$$S = \frac{C}{u_\infty^2}(1 + X'^2), \qquad S_* = \frac{C}{u_\infty^2} X_*'^2, \qquad X' = \left(\frac{dR}{dx}\right)^{-1} \tag{1}$$

Здесь C — постоянная, зависящая от показателя адиабаты. Максимальное значение энтропии в стационарном течении достигается за прямым скачком уплотнения, т. е. при $S = S_1 = Cu_\infty^{-2}$.

Пусть в исходном течении $S_* = S_1$ при $X_*' = 1$ и $R_* = r_1$, $x = x_1$. Предположим также, что в этом течении при $x > x_1$ значение $X_*' > 1$ (или $R_*' < 1$), так как область исходного течения, соответствующая линиям тока, прошедшим через часть ударной волны с наклонами $R_*' > 1$ не может быть использована для построения стационарного течения. При этом, естественно, что значения $R_*' > 1$ могут достигаться за скачком уплотнения при $x < x_1$, поскольку эта часть нестационарного решения в дальнейшем не будет использоваться при построении.

Определим функцию тока ψ таким образом, чтобы на ударной волне $\psi = R^\nu$ для плоского и осесимметричного случаев ($\nu = 1{,}2$ соответственно). Построим ударную волну стационарного течения из условия

$$S(\psi) = S_*(\psi + \psi_1) \qquad (\psi_1 = r_1^\nu) \tag{2}$$

Отсюда согласно (1)

$$X'^2(r) + 1 = X_*'^2 [(r^\nu + r_1^\nu)^{1/\nu}] \tag{3}$$

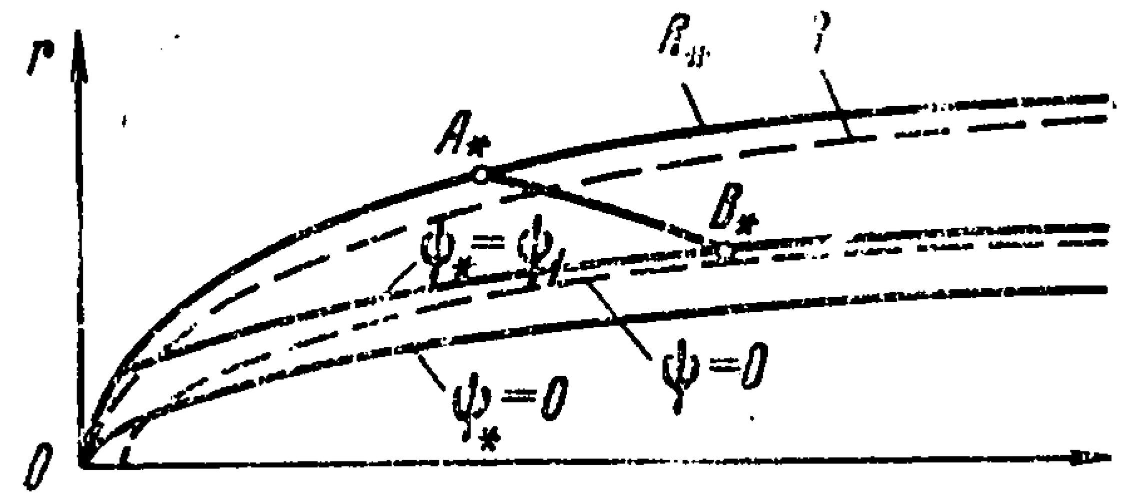
Таким образом, ударная волна, удовлетворяющая условию (2), находится в квадратурах

$$X(r) = \int_0^r \sqrt{X_*'^2[(r^\nu + r_1{}^\nu)^{1/\nu}] - 1}\, dr \tag{4}$$

Обозначим через τ местный угол наклона ударной волны к оси x. Будем рассматривать лишь такие нестационарные течения, для которых R_*' убывает при $x \to \infty$ таким образом, что

$$R(x) = R_*(x)\,(1 + O(\tau^2)), \quad \text{или}$$

$$X(r) = X_*(r)\,(1 + O(\tau^2)) \tag{5}$$



Фиг. 1

Используя (4), легко показать, что этому условию удовлетворяют по крайней мере степенные скачки $R_* = x^n$ при $2 / (2 + \nu) < n < 1$.

Согласно теории плоских сечений, ясно, что при достаточно больших x т. е. в области малых τ, поле нестационарного решения при $\psi > \psi_1$ описывает некоторое стационарное течение. (Подставляя нестационарное решение в уравнения стационарного течения, можно показать, что последние удовлетворяются с точностью $\tau^{2(\varkappa-1)/\varkappa}$). Покажем, что это стационарное течение может быть сопряжено с невозмущенным потоком при помощи скачка (4).

Действительно, в некоторой области вниз по течению, ограниченной какой-либо характеристикой второго семейства A_*B_* и линией тока ψ_1 (фиг. 1), решение полностью определяется формой волны $R_*(x)$ и распределением энтропии и полной энтальпии вдоль A_*B_*. Согласно условию выбора стационарного скачка (2) и оценке (5) при $x \to \infty$, указанные граничные условия одинаковы в исходном и искомом решениях с погрешностью теории плоских сечений.

Таким образом, показано, что перенесенное в плоскость стационарного решения простой заменой $t = x / u_\infty$ нестационарное решение определенного выше класса описывает с точноотью аналогии при $x \to \infty$ и $\psi \geqslant \psi_1$ стационарное течение около затупленного тела. Форма тела при этом соответствует траектории частицы с энтропией, равной энтропии за прямым скачком уплотнения, а форма ударной волны (при $0 \leqslant x < \infty$) дается соотношением (4).

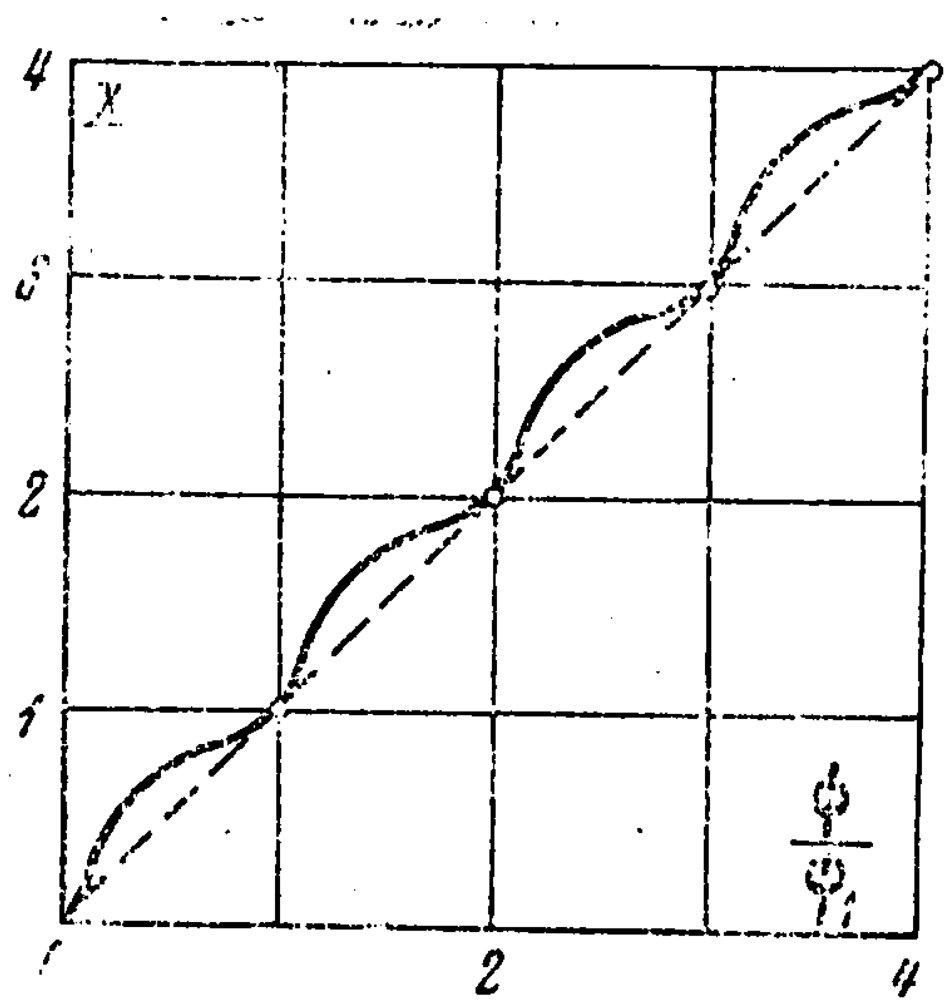
Подчеркнем еще раз, что часть исходного решения при $0 \leqslant \psi < \psi_1$, в которой энтропия может оказаться большей, чем энтропия в прямом скачке уплотнения, не имеет физического смысла и не используется при переходе к стационарному течению.

Интересно отметить, что для случая сильного взрыва $(n = 2 / (2 + \nu))$ из соотношения (4) следует, что $R(x) \equiv R_*(x)$ при любом x, что поясняет результат, полученный в работе [9] путем построения стационарного течения, соответствующего волне $R_* \sim x^{2/(2+\nu)}$.

Покажем, что этот случай не единственный и что имеется целый класс ударных волн, удовлетворяющих «условию сохранения» $X_*(r) = X(r)$. Действительно, согласно (3), этот класс скачков уплотнения должен удовлетворять уравнению

$$X'^2(\psi + \psi_1) = X'^2(\psi) + 1 \tag{6}$$

Так как $X'(0) = 0$, то значения X' в точках $x = m\psi_1 = mr_1^\nu$ однозначно определены соотношением (6) и равны m (фиг. 2). Форма же скачка уплотнения между этими «реперными точками» зависит от достаточно произвольного выбора формы скачка уплотнения на одном из участков $(m-1)\psi_1 < \psi < m\psi_1$. Случаю сильного взрыва $(n = 2/(2+\nu))$ соответствует прямая, проходящая через реперные точки (пунктир, фиг. 2). При $\psi \to \infty$ все ударные волны, обладающие «свойством сохраняемости», приближаются к ударной волне, соответствующей сильному взрыву. Однако во всем поле течения решения при $x \to \infty$ могут заметно различаться, так как распределение энтропии при малых значениях ψ существенным образом определяется выбором формы скачка между реперными точками.



Фиг. 2

Рассмотрим несколько подробнее форму тел, которые получаются после применения указанного выше рецепта построения к хорошо изученным нестационарным течениям за скачками уплотнения, расширяющимися по степенному закону $R_* \sim x^n$. При $\to \infty$ $(2/(2+\nu) \leqslant n < 1)$ траектории частиц указанных течений и, следовательно, искомая форма тела удовлетворяют соотношению

$$r_w^\nu = C_1 x^{\nu n} + C_2 x^{2(1-n)/\varkappa} \tag{7}$$

При $n = 2/(2+\nu)$ постоянная $C_1 = 0$ (случай сильного взрыва [8]). Отсюда относительная величина поправки к форме тела (соответствующего траектории частицы с $S_* = 0$) равна

$$\frac{\Delta r_w}{R} = O\left(\tau^{-2/\varkappa + \nu n/(1-n)}\right) \left(n \neq \frac{1}{2}\right), \qquad \frac{\Delta r_w}{R} = O\left(\tau^{-1/\varkappa + 1}\right) \qquad \left(\nu = 2,\ n = \frac{1}{2}\right)$$

Относительное смещение линий тока за счет погрешности теории плоских сечений равно

$$\frac{\Delta r}{R} = O\left(\tau^2 + \tau^{2(\varkappa-1)/\varkappa} \frac{\Delta r_w}{R}\right)$$

Следовательно, поправка Δr_w превышает ошибку теории (Δr) при

$$\frac{1}{n} > 1 + \frac{\nu\varkappa}{2(\varkappa+1)} \tag{8}$$

Вне записанного диапазона n изменением формы тела можно пренебречь, однако поле течения вблизи тела $(\psi_* = \psi_1)$ при этом существенно отличается от поля течения вблизи $\psi_* = 0$, так как из течения исключена область с энтропией, большей энтропии за прямым скачком уплотнения. Следует отметить, что форма тела при исследовании стационарных ударных волн вида $R \sim x^n$ имеет при $x \to \infty$ вид, совпадающий с видом уравнения (7) согласно работам [7,8]. Но при исследовании указанных течений коэффициент C_2 в (9) стремится к бесконечности, если $1/n \to 1 + \nu\varkappa/(2\varkappa + 2)$, согласно [10]. Иначе говоря, при невыполнении неравенства (8) форма тела для стационарного течения за скачком $R \sim x^n$ не совпадает с траекторией частицы соответствующей нестационарной задачи.

В отличие от этого в предложенном выше методе построения решения форма тела при $1 > n \geqslant 2 / (2 + \nu)$ всегда определяется траекторией частицы исходной нестационарной задачи. Энтропия этой частицы равна энтропии за прямым скачком уплотнения и, следовательно, коэффициент C_2 всегда конечен.

Отметим, в заключение, что, как и в соответствующих цитированных выше работах, остается открытым вопрос о существовании тел, определяемых во всем диапазоне значений x ударными волнами, выбранными при решении задачи.

Авторы благодарят О. С. Рыжова и В. В. Сычева за обсуждение работы.

Поступила 1 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. T s i e n H. S. Similarity laws of hypersonic flows. J. Math. and Phys., 1946, vol. 25, No 3.
2. H a y e s W. D. On hypersonic similitude. Quart. Appl. Math., 1947, vol. 5, No. 1.
3. И л ь ю ш и н А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6.
4. С е д о в Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1964, т. 52, № 1.
5. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
6. С ы ч е в В. В. К теории гиперзвуковых течений газа со скачками уплотнения степенной формы. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
7. С ы ч е в В. В. О методе малых возмущений в задачах обтекания тонких затупленных тел гиперзвуковым потоком газа. ПМТФ, 1962, № 6.
8. Я к у р а Дж. Теория энтропийных слоев и затупление носка в гиперзвуковом течении. Сб. «Исследование гиперзвуковых течений М., «Мир», 1964.
9. Р ы ж о в О. С., Т е р е н т ь е в Е. Д. О применении взрывной аналогии к расчету гиперзвуковых течений. ПММ. 1969, т. 33, вып. 4.
10. Р ы ж о в О. С., Т е р е н т ь е в Е. Д. Об энтропийном слое в гиперзвуковых течениях со скачками уплотнения, форма которых задается степенной функцией. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.