ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ГИБКОЙ НИТИ СО СВОБОДНЫМ КОНЦОМ

М. А. Зак

(Ленинград)

Рассматривается нерастяжимая гибкая нить, имеющая в невозмущенном состоянии малую кривизну и малое кручение формы. Исследуется вопрос о единственности и устойчивости решения задачи о малых возмущениях для случая, когда один конец нити свободен. Частный случай такой задачи был исследован в работе [1].

Будем исходить из векторного уравнения динамики нити

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\right) + \mathbf{F}, \quad \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\right| = 1 \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точек нити, T — натяжение, $\mathbf{F}$ — внешние силы, s — дуговая координата, t — время.

Для малых возмущений Δr и ΔT из (1) следует

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(T_0 \frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\Delta T \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial s}\right), \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial s}\frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial s} = 0 \tag{2}$$

Здесь $T_0(s)$, $\mathbf{r}_0(s)$ — невозмущенные значения T и $\mathbf{r}$. Разложим возмущение $\Delta \mathbf{r}$ по натуральным осям $\boldsymbol{\tau}_0$, $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{b}_0$, соответствующим форме нити в невозмущенном состоянии

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta r_1 \boldsymbol{\tau}_0 + \Delta r_2 \mathbf{n}_0 + \Delta r_3 \mathbf{b}_0$$

Положим вначале, что форма нити в невозмущенном состоянии близка к плоской, т. е. величины $\partial \mathbf{b}_0 / \partial s$, $\partial^2 \mathbf{b}_0 / \partial s^2$, $\partial^2 \boldsymbol{\tau}_0 / \partial s^2$, $\partial \mathbf{n}_0 / \partial s$ имеют тот же порядок малости, что и возмущения $\Delta \mathbf{r}$, ΔT. Тогда, умножая (2) скалярно на $\mathbf{b}_0$, получим

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{r}_3}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(T_0 \frac{\partial \Delta \mathbf{r}_3}{\partial s}\right) \tag{3}$$

Таким образом, бинормальные малые возмущения могут изучаться независимо от остальных.

Если форма нити в начальном состоянии имеет еще и малую кривизну, т. е. величины $\partial \boldsymbol{\tau}_0 / \partial s$, имеют тот же порядок малости, что и возмущения $\Delta \mathbf{r}$, ΔT, то, умножая (2) скалярно на $\mathbf{n}_0$ и $\boldsymbol{\tau}_0$ получим

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta r_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(T_0 \frac{\partial \Delta r_2}{\partial s}\right), \qquad \rho \frac{\partial^2 \Delta r_1}{\partial t^2} = \frac{\partial \Delta T}{\partial s} \tag{4}$$

Следовательно, в последнем случае все компоненты малых возмущений могут изучаться независимо один от другого.

Рассмотрим вначале уравнение (3), полагая, что $\rho(s)$ и $T_0(s)$ — известные функции, характеризующие невозмущенное состояние нити. Если нить закреплена в двух точках ($s = 0$, $s = l$), или движение ее в этих точках задано кинематически, то существует единственное решение, удовлетворяющее начальным и граничным условиям [2]

$$\Delta r_3(s, 0) = \varphi(s), \qquad [\partial \Delta r_3 / \partial t]_{t=0} = \psi(s) \tag{5}$$

$$\Delta r_3(0, t) = \mu_1(t), \qquad \Delta r_3(l, t) = \mu_2(t)$$

Пусть в точке $s = l$ нить имеет свободный конец

$$T_0 /_{s=l} = 0 \tag{6}$$

Тогда второе граничное условие в (5) отпадает. Покажем, что и в этом случае единственность решения обеспечивается, правда, при некоторых ограничениях.

Следуя [2], допустим, что существует два решения рассматриваемой задачи: $\Delta r_3'(s, t)$ и $\Delta r_3''(s, t)$ и рассмотрим разность

$$v(s, t) = \Delta r_3'(s, t) - \Delta r_3''(s, t)$$

Функция $v(s, t)$ удовлетворяет однородному уравнению с однородными дополнительными условиями

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(T_0 \frac{\partial v}{\partial s}\right), \quad v(s, 0) = 0, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]_{t=0} = 0, \quad v(0, t) = 0$$

Рассмотрим энергию

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{T_0\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right\} ds$$

Очевидно, что

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l \left(T_0 \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) ds$$

При этом

$$\int_0^l T_0 \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} ds = \left(T_0 \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\left(T_0 \frac{\partial v}{\partial s}\right) ds$$

Подстановка обращается в нуль в силу граничного условия $v(0, t) = 0$ и условия (6). Следовательно

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l \frac{\partial v}{\partial t}\left[\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s}\left(T_0 \frac{\partial v}{\partial s}\right)\right] ds = 0, \qquad E(t) = \text{const}$$

Учитывая начальные условия, получаем

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{T_0\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right\}_{t=0} ds = 0 \tag{7}$$

В отличие от [2] из (7) здесь еще не следует, что

$$v\ (s,\ t) = 0 \tag{8}$$

так как имеют место более слабые неравенства, чем в [2], а именно:

$$\rho\ (s) > 0 \quad (0 \leqslant s \leqslant l), \quad T_0\ (s) > 0 \ \ (0 \leqslant s < l), \quad T_0\ |_{s=l} = 0$$

И только, если искать решение в классе функций, в котором производная $\partial v\ /\ \partial s$ непрерывна в замкнутом промежутке $0 \leqslant s \leqslant l$, из (7) вытекает (8), а следовательно, и единственность решения.

Такое своеобразие поставленной задачи связано с тем, что исходное уравнение является гиперболическим в открытом промежутке $0 \leqslant s < l$, но вырождается в параболическое в закрытом промежутке $0 \leqslant s \leqslant l$.

Исследуем устойчивость решения в смысле корректности в постановке задачи с начальными условиями. Пусть

$$\varphi(s) \begin{cases} > 0 & \text{при} \quad 0 < s_2{}^\circ < s < s_1{}^\circ < l \\ = 0 & \text{при} \quad s_1{}^\circ \leqslant s \leqslant l \end{cases}$$

$$\psi(s)\,|_{0 \leqslant s \leqslant l} = 0, \qquad \mu_1(t) = 0, \qquad t \geqslant 0 \tag{9}$$

Тогда

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial \Delta r_3}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial \Delta r_3}{\partial s}\right)^2\right] ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2} \left[\rho\left(\frac{\partial \Delta r_3}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial \Delta r_3}{\partial s}\right)^2\right] ds = E_0 = \text{const} > 0 \tag{10}$$

так как

$$\frac{dE(t)}{dt} = T_0\frac{\partial \Delta r_3}{\partial s}\frac{\partial \Delta r_3}{\partial t}\Bigg|_0^l - \int_0^l \frac{\partial \Delta r_3}{\partial t}\left[\rho\frac{\partial^2 \Delta r_3}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s}\left(T_0\frac{\partial \Delta r_3}{\partial s}\right)\right] ds = 0$$

Здесь s_1 и s_2 — дуговые координаты переднего и заднего фронтов волны разрыва производных $\partial^2 \Delta r_3\ /\ \partial t^2$ и $\partial^2 \Delta r_3\ /\ \partial s^2$, причем $s_1 = s_1{}^\circ$, $s_2 = s_2{}^\circ$ при $t = 0$.

Очевидно, что

$$\Delta r_3 \equiv 0 \qquad (s < s_1,\ s > s_2)$$

Из дифференциальных уравнений характеристик

$$ds_1\ /\ dt = \pm\ (T_0\ /\ \rho)^{1/2}, \quad ds_2\ /\ dt = \pm\ (T_0\ /\ \rho)^{1/2}$$

находим уравнения характеристик, проходящих через $s_1{}^\circ$ и $s_2{}^\circ$

$$t = \int_{s_1{}^\circ}^{s_1} \frac{d\zeta}{\sqrt{T_0(\zeta)\,/\,\rho(\zeta)}}\,, \quad t = \int_{s_2{}^\circ}^{s_2} \frac{d\zeta}{\sqrt{T_0(\zeta)\,/\,\rho(\zeta)}} \quad (0 < s_1, s_2 < l)$$

При $s_{1,2} = l$ в силу (6) имеет место особое решение, совпадающее для обеих характеристик. Могут представиться два случая.

1°. Несобственный интеграл

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{T_0(\zeta)\,/\,\rho(\zeta)}} \tag{11}$$

сходится при $\zeta \to l$, т. е. совпадение характеристик происходит при конечном $t = t^*$. Тогда

$$s_2 - s_1 \to 0 \quad \text{при } t \to t^*$$

Но в этом случае, как следует из (10)

$$\rho\left(\frac{\partial \Delta r_3}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial \Delta r_3}{\partial s}\right)^2 \to \infty \quad \text{при } s \to l$$

и ввиду ограниченности ρ и T_0 с учетом (6) приходим к оценке

$$\partial \Delta r_3 / \partial t \to \infty \quad \text{при} \quad s \to l \tag{12}$$

которая имеет место при сколь угодно малых начальных условиях $\varphi(s)$.

Оценка (12) свидетельствует о некорректности постановки задачи в замкнутом интервале $0 \leqslant s \leqslant l$, т. е. о неустойчивости решения вблизи свободного конца.

Сформулированный результат получен при частных начальных условиях (9). Однако, пользуясь принципом суперпозиции для исходного линейного уравнения и добавляя к произвольным начальным условиям условия (9), которые могут сколь угодно мало отличаться от нулевых, придем к той же оценке (12).

Рассмотренная задача получилась в результате линеаризации исходной физической задачи, поэтому математическую формулировку неустойчивости следует ослабить по сравнению с оценкой (12) и записывать в виде

$$\partial \Delta r_3 / \partial t \geqslant \delta > 0 \quad \text{при } \varphi(s) \to 0$$

Физическим проявлением отмеченной выше неустойчивости будет резкое повышение скоростей точек нити вблизи свободного конца (щелчок кнута). Сходимость интеграла (11) имеет место в большинстве практически важных случаев, и в частности в случае, когда однородная весомая нить имеет прямолинейную невозмущенную форму.

2°. Пусть несобственный интеграл (11) расходится при $\eta \to l$, т. е. совпадение характеристик происходит при $t^* \to \infty$. Тогда оценка (12) не имеет места, причем любое возмущение, возникшее в промежутке $0 \leqslant s < l$, в конечном интервале времени, не достигает свободного конца, и любое возмущение, возникшее на свободном конце, не распространится на остальные точки нити. Другими словами, свободный конец становится изолированной точкой, значение функции в которой никак не связано со значениями функции в остальных точках.

Это обстоятельство и является иллюстрацией той неединственности решения, которая отмечалась при исследовании выражения (7). Действительно, единственность здесь имеет место в открытом промежутке $\leqslant s < l$, но нарушается в замкнутом промежутке $0 \leqslant s \leqslant l$.

Приведенные результаты относятся к малым бинормальным возмущениям, описываемым уравнением (3). Если в невозмущенном состоянии нить имеет малую кривизну, то малые нормальные возмущения описываются уравнением (4), которое полностью совпадает с уравнением (3). Следовательно, в этом случае все результаты, полученные относительно малых би нормальных возмущений, полностью переносятся на малые нормальные возмущения.

Полученные результаты можно обобщить на случай, когда нить движения в сопротивляющейся среде, т. е. когда внешняя нагрузка **F** является следящей. Положим в (1)

$$\mathbf{F} = F_1\tau_0 + F_2\mathbf{n}_0 + F_3\mathbf{b}_0$$

и пусть

$$F_i = \Phi_i\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right), \qquad \Delta F_i = -\mu_i\frac{\partial \Delta r_i}{\partial t}, \qquad \mu_i = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial(\partial r_i/\partial t)}$$

Здесь μ_i — коэффициент сопротивления среды. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$\rho\frac{\partial^2 \Delta r_3}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(T_0\frac{\partial \Delta r_3}{\partial s}\right) - \mu_3\frac{\partial \Delta r_3}{\partial t}$$

причем

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\int_{s_1}^{s_2}\mu_3\left(\frac{\partial \Delta r_3}{\partial t}\right)^2 ds, \quad E = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\left[\rho\left(\frac{\partial \Delta r_3}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial \Delta r_3}{\partial s}\right)^2\right]ds \tag{13}$$

Из (13) следует

$$E = E_0 - \int_{s_1}^{s_2}\int_0^t \mu_3\left(\frac{\partial \Delta r_3}{\partial t}\right)^2 dt ds$$

т. е.

$$\int_{s_1}^{s_2}\left[\rho\left(\frac{\partial \Delta r_3}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial \Delta r_3}{\partial s}\right)^2 + \mu_3\int_0^t\left(\frac{\partial \Delta r_3}{\partial t}\right)^2 dt\right]ds = E_0 = \mathrm{const} \tag{14}$$

Если несобственный интеграл в (11) сходится, то $t \to t^*$ при $s_1 - s_2 \to 0$, причем t^* — конечное число.

Поэтому из неограниченного возрастания подынтегрального выражения в (14) при $s \to l$ следует оценка (12). Следовательно, в сопротивляющейся среде эффект резкого возрастания скоростей у свободного конца нити имеет место при тех же условиях, что и в вакууме. Аналогичный результат, разумеется, может быть получен и для уравнения (4) при наличии сил сопротивления.

Поступила 20 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. З а к М. А. О некоторых динамических явлениях в гибкой нити. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
2. Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Уравнения математической физики. М., Гостехтеоретиздат, 1953.