Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ОБ ОДНОМ ОСОБОМ СЛУЧАЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧЕ О СИНХРОНИЗАЦИИ

М. В. Улицкая

(Ленинград)

Рассматриваются синхронные движения объектов с одной степенью свободы, взаимодействующих посредством слабых связей. Исходная система уравнений с малым параметром аналогична системе, изучавшейся в § 3 работы [1]. Однако в рассматриваемой работе предполагается, что уравнения для определения порождающих фаз и синхронной частоты, составленные «по членам» первого порядка, удовлетворяются тождественно. Это приводит к особому случаю метода малого параметра, когда необходимо рассматривать старшие приближения. Определяются синхронные режимы в системе объектов. Получены необходимые и достаточные условия их устойчивости. Сделаны замечания о технических предположениях к рассмотрению подобных систем.

В частном случае системы, консервативной в первом приближении, условия существования и устойчивости переходят в условия, полученные в [1].

§ 1. Основная система. Определение синхронных решений. Рассматривается задача о взаимодействии существенно нелинейных объектов под действием слабых связей при отсутствии внешнего воздействия, описываемая следующей системой с многомерной быстро вращающейся фазой:

$$\varphi_k^{\cdot} = \omega_k + \mu X_k^{(1)}(\varphi_k, \ \omega_k) + \mu^2 X_k^{(2)}(\varphi_1,\ldots, \varphi_n, \ \omega_1,\ldots,\omega_n, \mathbf{v}) + \\ + \mu^3 X_k^{(3)}(\varphi_1,\ldots, \varphi_n, \omega_1,\ldots \omega_n, \mathbf{v}) + \mu^4\ldots$$

$$\omega_k^{\cdot} = \mu Y_k^{(1)}(\varphi_k, \omega_k) + \mu^2 Y_k^{(2)}(\varphi_1, \ldots \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n, \mathbf{v}) + \\ + \mu^3 Y_k^{(3)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n, \mathbf{v}) + \mu^4 \ldots \qquad (k=1, 2,\ldots, n) \qquad (1.1)$$

$$\mathbf{v}^{\cdot} = A\mathbf{v} + \mathbf{F}_1(\varphi_1,\ldots, \varphi_n, \omega_1\ldots, \omega_n) + \mu\, \mathbf{F}_2(\varphi_1,\ldots, \varphi_n, \omega_1,\ldots, \omega_n, \mathbf{v}) + \mu^2\ldots$$

Здесь φ_k, ω_k $(k = 1, 2,\ldots, n)$ — фаза и частота k-го изолированного объекта, $\mathbf{v}$-N — мерный вектор координат несущей системы, A — матрица с постоянными компонентами. Все функции в (1.1) предполагаются 2π-периодическими по $\varphi_1,\ldots, \varphi_n$, $\mu > 0$ — малый параметр. Точка означает дифференцирование по времени.

Система (1.1) получается из уравнений задачи о синхронизации почти консервативных объектов с одной степенью свободы [1] после введения в уравнения движения объектов некоторых членов, зависящих только от парциальных координат и импульсов и пропорциональных корню квадратному из малого параметра. Введенные дополнительные члены принимаются такими, что среднее за период значение одного из них, найденное для порождающего приближения, равно нулю. Физические предпосылки рассмотрения подобной системы таковы.

Допустим, что синхронизируются объекты типа механического вибратора. При этом необходимо, чтобы неравномерность вращения вала асинхронного мотора была достаточно мала.

Этому требованию отвечает предположение о малости всех членов в уравнениях движения, которые описывают моменты на валу вибратора. Этим моментам можно приписывать равный порядок малости. Если оказывается, что среднее за период значение одного из моментов, найденное по порождающему приближению, равно нулю, то для того чтобы получить систему, допускающую синхронные решения, нужно приписать нулевому в среднем моменту некоторый порядок малости μ, а всем остальным моментам — более высокий порядок. В частности, такие предположения следует принять в задаче о синхронизации возбудителей колебаний Беренса. На основании обобщения случаев такого рода и приходим к уравнениям (1.1).

При некоторых условиях, которые определяются далее, система (1.1) в некотором интервале $0 < \mu < \mu_0$ допускает аналитическое по параметру μ синхронное решение вида

$$\varphi_k = \varphi_{k0} + \mu\varphi_{k1} + \mu^2\varphi_{k2} + \mu^3\ldots$$

$$\omega_k = \omega_{k0} + \mu\omega_{k1} + \mu^2\omega_{k2} + \mu^3\ldots, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mu\mathbf{v}_1 + \ldots \tag{1.2}$$

Перейдем к безразмерному времени $\tau = \nu t$, где неизвестная частота синхронного режима ν ищется в виде ряда $\nu = \nu_0 + \mu\nu_1 + \mu^2\ldots$ Уравнения (1.1) при этом принимают вид

$$\begin{gathered}\varphi_k' = \beta\omega_k + \mu\,[\beta X_k^{(1)} - \nu_1\beta^2\omega_k] + \mu^2\,[\beta X_k^{(2)} - \\ - \nu_1\beta^2 X_k^{(1)} - (\nu_2\beta^2 - \nu_1^2\beta^3)\,\omega_k] + \mu^3\,[\beta X_k^{(3)} - \\ - \nu_1\beta^2 X_k^{(2)} - (\nu_2\beta^2 - \nu_1^2\beta^3)\,X_k^{(1)} - (\nu_1^3\beta^4 - 2\nu_1\nu_2\beta^3 + \nu_3\beta^2)\,\omega_k] + \ldots \\ \omega_k' = \mu\beta\,Y_k^{(1)} + \mu^2\,[\beta Y_k^{(2)} - \nu_1\beta^2 Y_k^{(1)}] + \\ + \mu^3\,[\beta Y_k^{(3)} - \nu_1\beta^2\,Y_k^{(2)} - (\nu_2\beta^2 - \nu_1^2\beta^3)\,Y_k^{(1)}] + \ldots \\ \mathbf{v}' = \beta\,(A\mathbf{v} + \mathbf{F}_1) + \mu\,[\beta\,\mathbf{F}_2 - \nu_1\beta^2\,(A\,\mathbf{v} + \mathbf{F}_1)] + \ldots\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь

$$\beta = 1/\nu_0$$

Определим синхронное решение системы (1.3) вида (1.2). Порождающая система допускает n-параметрическое семейство решений вида

$$\varphi_{k0} = \tau + \alpha_k, \quad \omega_{k0} = \nu_{0k}, \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0\,(\tau, \alpha_1,\ldots, \alpha_n, \nu_0, \nu_{01},\ldots, \nu_{0n})$$

где $\mathbf{v}_0$ есть 2π-периодическое по τ решение последнего уравнения (1.3) при $\mu = 0$ и $\nu_{01} = \nu_{02} = \ldots = \nu_{0n} = \nu_0$; $\alpha_1,\ldots, \alpha_n$ — порождающие фазовые сдвиги. При этом предполагается, что собственные числа $\varkappa$ системы

$$\varkappa\mathbf{w} = \beta A\,\mathbf{w} \tag{1.4}$$

лежат вне кругов с центрами в точках in (n — целое) и с радиусом, величина которого порядка μ. Это предположение эквивалентно предположению об отсутствии резонанса по координатам $\mathbf{v}$.

Система первого приближения имеет вид

$$\begin{gathered}\varphi_{k1}' = \beta\omega_{k1} + \beta\,(X_k^{(1)})_0 - \beta\nu_1 \\ \omega_{k1}' = \beta\,(Y_k^{(1)})_0 \\ \mathbf{v}_1' = \beta A\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{F}_1 + \beta\,(\mathbf{F}_2)_0 - \beta^2\nu_1 A\mathbf{v}_0 - \beta^2\,\nu_1(\mathbf{F}_1)_0\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь и далее круглые скобки с индексом нуль означают, что данная величина вычислена для порождающего решения.

Как указывалось выше, рассматривается случай, когда

$$P_k^{(1)}(\nu_{0k}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Y_k^{(1)})_0\,d\tau = \langle (Y_k^{(1)})_0\rangle = 0 \tag{1.6}$$

Поэтому первое приближение к искомому синхронному решению оказывается периодическим при любых значениях порождающих фаз, и условия существования синхронных режимов нельзя получить рассмотрением системы первого приближения. Это означает, что здесь имеет место особый случай метода малого параметра и в отличие от [1] нужно рассматривать последующие приближения.

Интегрируем систему (1.5)

$$\omega_{k1} = \beta U_k + \nu_1 - R_k^{(1)}, \qquad \varphi_{k1} = \beta^2\Gamma_k + \beta V_k + \alpha_{k1} \tag{1.7}$$

$$\nu_1 = \nu_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\nu_0,\nu_{01},\ldots,\nu_{0n})$$

$$\nu_{01} = \ldots = \nu_{0n} = \nu_0, \qquad \alpha_{k1} = \text{const}$$

$$\Gamma_k = \int U_k\,d\tau, \qquad V_k = \int [(X_k^{(1)})_0 - R_k^{(1)}]\,d\tau$$

$$U_k = \int (Y_k^{(1)})_0\,d\tau, \qquad \langle\Gamma_k\rangle = \langle V_k\rangle = \langle U_k\rangle = 0 \tag{1.8}$$

Здесь ν_1 — 2π-периодическое по τ решение последнего уравнения из (1.5).

Условия существования периодических функций ω_{k2} имеют вид

$$\left\langle\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial\varphi_k}\right)_0(\beta^2\Gamma_k + \beta V_k + \alpha_{k1})\right\rangle + \left\langle\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial\omega_k}\right)_0(\beta U_k + \nu_1 - R_k^{(1)})\right\rangle + P_k^{(2)} = 0 \tag{1.9}$$

Здесь

$$P_k^{(2)} = \langle (Y_k^{(2)})_0\rangle \tag{1.10}$$

Используя условие (1.6), получаем

$$\beta^2\left\langle\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial\varphi_k}\right)_0\Gamma_k\right\rangle + \beta\left\langle\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial\varphi_k}\right)_0 V_k\right\rangle + \beta\left\langle\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial\omega_k}\right)_0 U_k\right\rangle + P_k^{(2)} = 0 \tag{1.11}$$

Рассмотрим подробнее условия (1.11). На основании (1.8), а также того, что функции $(Y_k^{(1)})_0$, Γ_k имеют период 2π по $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$, т. е. по τ, и не имеют постоянных составляющих, после интегрирования по частям получаем (1.11) в виде

$$P_k = -\beta\langle (Y_k^{(1)})_0(X_k^{(1)})_0\rangle + \beta\left\langle\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial\omega_k}\right)_0 U_k\right\rangle + P_k^{(2)} = 0 \tag{1.12}$$

где следует положить $\nu_{01} = \nu_{02} = \ldots = \nu_{0n} = \nu_0$.

Таким образом, получены условия существования синхронного режима во взаимосвязанной системе объектов. Из автономности исходных уравнений следует, что из (1.12) могут быть найдены лишь ν_0 и $(n-1)$ разностей порождающих фаз, например, таких $\alpha_1 - \alpha_n,\ldots,\ \alpha_{n-1} - \alpha_n$, а одна из величин α_k может быть выбрана произвольно. Найдем еще вторые приближения к φ_k, ω_k.

Используя соотношения вида

$$\left\langle \left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 V_k \right\rangle = R_k^{(1)^2} - \langle (X_k^{(1)})_0^2 \rangle \tag{1.13}$$

получим

$$\begin{aligned}\varphi_{k2} = {} & \beta^4 \int [L_k + \nu_0 M_k - \langle (L_k + \nu_0 M_k) \rangle] \, d\tau + \\ & + \alpha_{k1}\beta^2 U_k + \beta^2 (\nu_1 - R_k^{(1)}) \frac{\partial \Gamma_k}{\partial \nu_k} + \beta^2 \Gamma_k^{(2)} - \beta^3 \nu_1 \Gamma_k + \\ & + \beta^3 E_k + \beta F_k + \beta \alpha_{k1} [(X_k^{(1)})_0 - R_k^{(1)}] + \beta V_k^{(2)} + \\ & + \beta (\nu_1 - R_k^{(1)}) \frac{\partial V_k}{\partial \nu_k} - \nu_1 \beta^2 \Gamma_k - \beta^2 \nu_1 V_k^{(1)} + \alpha_{k2}\end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}\omega_{k2} = {} & \beta^3 L_k + \beta^2 M_k + \beta \alpha_{k1} (Y_k^{(1)})_0 + \beta (\nu_1 - R_k^{(1)}) \frac{\partial U_k}{\partial \nu_k} + \beta U_k^{(2)} - \beta^2 \nu_1 U_k - \\ & - \beta^3 \langle L_k \rangle - \beta^2 \langle M_k \rangle - (\nu_1 - R_k^{(1)}) \frac{\partial R_k^{(1)}}{\partial \nu_k} - \beta \left\langle \left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial \omega_k}\right)_0 U_k \right\rangle - \\ & - \beta^2 \left\langle \left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 (\Gamma_k + \nu_0 V_k) \right\rangle - R_k^{(2)} + \nu_2 \nu_0\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_k &= \int d\tau \left[\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 (\Gamma_k + \nu_0 V_k) - \left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 (\Gamma_k + \nu_0 V_k) \right\rangle \right] \\ M_k &= \int d\tau \left[\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k}\right)_0 U_k - \left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k}\right)_0 U_k \right\rangle \right] \\ U_k^{(2)} &= \int (Y_k^{(2)})_0 \, d\tau, \qquad \langle U_k^{(2)} \rangle = 0, \qquad \Gamma_k^{(2)} = \int U_k^{(2)} d\tau \\ & \qquad \langle \Gamma_k^{(2)} \rangle = 0 \\ E_k &= \int d\tau \left[\left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 (\Gamma_k + \nu_0 V_k) - \left\langle \left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 (\Gamma_k + \nu_0 V_k) \right\rangle \right] \\ F_k &= \int d\tau \left[\left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial \omega_k}\right)_0 U_k - \left\langle \left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial \omega_k}\right)_0 U_k \right\rangle \right] \end{aligned} \tag{1.15}$$

§ 2. Устойчивость синхронных решений. Обратимся к анализу устойчивости полученных синхронных режимов. Характеристическое уравнение системы в вариациях уравнений (1.1) для порождающего решения имеет $2n$-кратный единичный корень, т. е. $2n$ характеристических показателей уравнений в вариациях являются критическими [2]. Устойчивость синхронных решений (1.2) в конечном счете определяется знаками вещественных частей критических характеристических показателей, поэтому в дальнейшем ограничимся определением лишь последних.

Следуя [1], исключим из системы в вариациях вариации координат несущей системы. Для этого ищем их в виде

$$\delta\nu = \sum_{k=1}^{n} [\xi_k(\tau, \mu)\, \delta\varphi_k + \eta_k(\tau, \mu)\, \delta\omega_k] \tag{2.1}$$

где ξ_k, η_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — 2π-периодические вектор-функции τ. Разыскивая ξ_k и η_k в виде рядов по степеням μ

$$\xi_k = \xi_k^{(0)} + \mu\xi_k^{(1)} + \mu^2\ldots, \qquad \eta_k = \eta_k^{(0)} + \mu\eta_k^{(1)} + \mu^2\ldots \tag{2.2}$$

получим [1]

$$\xi_k^{(0)} = \frac{\partial v_0}{\partial \alpha_k}, \qquad \eta_k^{(0)} = \frac{\partial v_0}{\partial v_k} + \zeta_k, \qquad \zeta_k' = \frac{\partial^2 v_0}{\partial v_0 \partial \alpha_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.3}$$

После исключения вариаций δv в соответствии с (2.1) придем к системе $2n$ уравнений относительно $\delta\varphi_k$ и $\delta\omega_k$ (эта система здесь не выписывается), характеристические показатели которой (их всего $2n$) равны критическим характеристическим показателям исходных уравнений в вариациях. Единичному корню характеристического уравнения этой системы кратности $2n$ для порождающего решения отвечают непростые элементарные делители, все показатели которых равны двум. Поэтому [3] критические показатели будут разлагаться либо по целым степеням $\mu^{1/2}$, либо по целым степеням μ.

Непосредственное вычисление коэффициентов при степенях $\mu^{1/2}$, $\mu^{3/2}$, $\mu^{5/2}$ дает их значения, равные нулю. Можно показать, что исчезают и остальные члены с дробными степенями. Это особенно просто показать в случае, когда исходная система с точностью до членов порядка μ^2 консервативна.

При этом она простой заменой переменной приводится к системе, типа рассмотренной в [1]

$$\begin{aligned}
\varphi_i^{*\cdot} &= \omega_i^* + \mu^2 [X_{i1}^* (\varphi_i^*, \ldots, \varphi_n^*, \omega_1^*, \ldots, \omega_n^*, v) + \\
&+ \mu X_{i2}^* (\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*, \omega_1^*, \ldots, \omega_n^*, v)] + \mu^4\ldots \\
\omega_i^{*\cdot} &= \mu^2 [Y_{i1}^* (\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*, \omega_1^*, \ldots, \omega_n^*, v) + \\
&+ \mu Y_{i2}^* (\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*, \omega_1^*, \ldots, \omega_n^*, v)] + \mu^4\ldots \\
v^\cdot &= Av + \mathbf{F}^* (\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*, \omega_1^*, \ldots, \omega_n^*) + \mu\ldots
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Отсюда сразу следует, что в этом случае показатели разлагаются по степеням μ.

Введем подстановку

$$\delta\varphi_k = e^{\lambda\tau}\vartheta_k, \qquad \delta\omega_k = e^{\lambda\tau}\psi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.5}$$

где λ — искомый критический характеристический показатель. Ищем его в виде

$$\lambda = \lambda_1\mu + \lambda_2\mu^2 + \lambda_3\mu^3 + \ldots \tag{2.6}$$

Величины $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ определятся из условия существования 2π-периодического решения у системы, получаемой из уравнений в вариациях подстановкой (2.5). Эти решения ищем в виде рядов

$$\begin{aligned}
\vartheta_k &= \vartheta_k^{(0)} + \mu\vartheta_k^{(1)} + \mu^2\vartheta_k^{(2)} + \mu^3\ldots \\
\psi_k &= \psi_k^{(0)} + \mu\psi_k^{(1)} + \mu^2\psi_k^{(2)} + \mu^3\ldots
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь $\vartheta_k^{(i)}$, $\psi_k^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — 2π-периодические функции τ.

В нулевом приближении имеем

$$\psi_k^{(0)} = 0, \qquad \vartheta_k^{(0)} = a_k \qquad (a_k = \mathrm{const}) \tag{2.8}$$

Рассматривая члены порядка μ, получим далее следующую систему уравнений для определения $\vartheta_k^{(1)}$, $\psi_k^{(1)}$:

$$\vartheta_k^{(1)\prime} = \beta\psi_k^{(1)} + \beta\left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial\varphi_k}\right)_0 a_k - \lambda_1 a_k, \qquad \psi_k^{(1)\prime} = \beta\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial\varphi_k}\right)_0 a_k \tag{2.9}$$

Согласно условию (1.6), функции $\psi_k^{(1)}$ ($k = 1, 2,\ldots, n$), определяемые из вторых n уравнений (2.9), будут периодическими. Интегрируя вторые n уравнений системы (2.9), получим

$$\psi_k^{(1)} = \beta a_k (Y_k^{(1)})_0 + b_{*k} \qquad (b_{*k} = \mathrm{const}) \tag{2.10}$$

Постоянные b_{*k} определятся из условия периодичности функций $\vartheta_k^{(1)}$: $b_{*k} = \nu_0\lambda_1 a_k$. Функции $\vartheta_k^{(1)}$ определяем теперь из первых n уравнений (2.9)

$$\vartheta_k^{(1)} = \beta^2 a_k U_k + \beta (X_k^{(1)})_0 a_k + b_k \qquad (b_k = \mathrm{const}) \tag{2.11}$$

Система второго приближения запишется в виде

$$\begin{aligned}
\vartheta_k^{(2)\prime} = {} & \beta\psi_k^{(2)} - \lambda_1 [\beta^2 a_k U_k + \beta (X_k^{(1)})_0 a_k + b_k] + \\
& + \beta\left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial\varphi_k}\right)_0 [\beta^2 a_k U_k + \beta a_k (X_k^{(1)})_0 + b_k] + \beta\left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial\omega_k}\right)_0 \times \\
& \times [\beta a_k (Y_k^{(1)})_0 + \lambda_1 a_k \nu_0] - \nu_1\beta^2 [\beta a_k (Y_k^{(1)})_0 + \lambda_1 a_k \nu_0] - \\
& - \lambda_2 a_k + \beta \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial X_k^{(2)}}{\partial\varphi_j}\right)_0 a_j + \beta\left(\frac{\partial X_k^{(2)}}{\partial\nu}\right)_0 \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j - \\
& - \nu_1\beta^2 \left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial\varphi_k}\right)_0 a_k + \beta\left(\frac{\partial^2 X_k^{(1)}}{\partial\varphi_k^2}\right)_0 \varphi_{k1} a_k + \beta\left(\frac{\partial^2 X_k^{(1)}}{\partial\varphi_k\partial\omega_k}\right)_0 \omega_{k1} a_k
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
\psi_k^{(2)\prime} = {} & -\lambda_1\beta a_k (Y_k^{(1)})_0 - \lambda_1^2 a_k \nu_0 + \beta\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial\varphi_k}\right)_0 [b_k + \beta^2 a_k U_k + \beta (X_k^{(1)})_0 a_k] + \\
& + \beta\left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial\omega_k}\right)_0 [\beta a_k (Y_k^{(1)})_0 + \lambda_1 a_k \nu_0] + \\
& + \beta \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Y_k^{(2)}}{\partial\varphi_j}\right)_0 a_j + \beta\left(\frac{\partial Y_k^{(2)}}{\partial\nu}\right)_0 \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j - \\
& - \beta^2\nu_1 \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial\varphi_k}\right)_0 a_k + \beta\left(\frac{\partial^2 Y_k^{(1)}}{\partial\varphi_k^2}\right)_0 \varphi_{k1} a_k + \beta\omega_{k1} a_k \left(\frac{\partial^2 Y_k^{(1)}}{\partial\varphi_k\partial\omega_k}\right)_0
\end{aligned}$$

Используя соотношения

$$\begin{gathered}
\left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial\varphi_k}\right)_0 U_k \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial^2 Y_k^{(1)}}{\partial\varphi_k^2}\right)_0 \Gamma_k \right\rangle = 0 \\
\left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial\varphi_k}\right)_0 (X_k^{(1)})_0 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial^2 Y_k^{(1)}}{\partial\varphi_k^2}\right)_0 V_k \right\rangle = 0 \\
\left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial\omega_k}\right)_0 (Y_k^{(1)})_0 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial^2 Y_k^{(1)}}{\partial\varphi_k\partial\omega_k}\right)_0 U_k \right\rangle = 0
\end{gathered} \tag{2.13}$$

из условия периодичности второго приближения придем к следующей системе для определения величин a_i:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial P_k^{(2)}}{\partial \alpha_j} - \lambda_1^2\nu_0^2\delta_{kj}\right)a_j = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$P_k^{(2)} = P_k^{(2)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \nu_0, \nu_{01}, \ldots, \nu_{0n}) = \langle (Y_k^{(2)})_0 \rangle \tag{2.14}$$

$$\nu_{01} = \nu_{02} = \ldots = \nu_{0n} = \nu_0$$

Первые приближения к характеристическим показателям являются, таким образом, корнями уравнения

$$\left|\frac{\partial P_k^{(2)}}{\partial \alpha_j} - \lambda_1^2\delta_{kj}\nu_0^2\right| = 0 \tag{2.15}$$

Из автономности исходной системы (1.1) следует, что уравнение (2.15), рассматриваемое как уравнение n-й степени относительно λ_1^2, имеет нулевой корень. Необходимые условия устойчивости (условия первой группы) состоят в том, чтобы остальные корни $(\lambda_1^2)_1, \ldots, (\lambda_1^2)_{n-1}$ были отрицательны [1]. Если имеется хотя бы один положительный или комплексный корень, то синхронный режим будет неустойчив. Пусть указанные числа отрицательны. Тогда $(2n - 2)$ критических показателя системы в вариациях будут представляться разложениями

$$\lambda_k^{(1)} = i\mu\,|(\lambda_1^2)_k|^{1/2} + \mu^2 \ldots, \quad \lambda_k^{(2)} = -i\mu\,|(\lambda_1^2)_k|^{1/2} + \mu^2 \ldots$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

один показатель — разложением $\lambda_n^{(1)} = \lambda_{2n}\mu^2 + \ldots$, а один равен нулю. Отсюда видно, что если условия устойчивости первой группы выполнены, то на устойчивость системы существенно влияют члены порядка μ^2 в разложении искомых показателей, которые теперь предстоит вычислить.

В дальнейшем потребуются вторые приближения $\psi_k^{(2)}, \vartheta_k^{(2)}$. Используя соотношения

$$\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 U_k + \left(\frac{\partial^2 Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k^2}\right)_0 \Gamma_k = \frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left[\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 \Gamma_k\right]$$

$$\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 (X_k^{(1)})_0 + \left(\frac{\partial^2 Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k^2}\right)_0 V_k = \frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left[\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 V_k\right] + R_k^{(1)}\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0$$

$$\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k}\right)_0 (Y_k^{(1)})_0 + \left(\frac{\partial^2 Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k \partial \omega_k}\right)_0 U_k = \frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left[\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k}\right)_0 U_k\right] \tag{2.16}$$

после интегрирования (2.12), получим

$$\psi_k^{(2)} = -\beta\lambda_1 a_k U_k + \beta^3 a_k\left[\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 \Gamma_k - \right.$$

$$\left. - \left\langle\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 \Gamma_k\right\rangle\right] + \beta^2 a_k\left[\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 V_k - \left\langle\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 V_k\right\rangle\right] +$$

$$+ R_k^{(1)}\beta^2 a_k (Y_k^{(1)})_0 + \beta b_k (Y_k^{(1)})_0 + \beta^2 a_k\left[\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k}\right)_0 U_k - \left\langle\left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k}\right)_0 U_k\right\rangle\right] +$$

---

[1] Случай кратного нулевого корня не рассматривается.

$$+\lambda_1 a_k \frac{\partial U_k}{\partial \nu_k} + \beta \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial \alpha_j} - \nu_1 \beta^2 a_k (Y_k^{(1)})_0 + \alpha_{k1} \beta a_k \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 + \lambda_1 b_k \nu_0 + \tag{2.17}$$

$$+(\nu_1 - R_k^{(1)}) \beta \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k}\right)_0 a_k - \lambda_1 a_k \frac{\partial R_k^{(1)}}{\partial \nu_k} \nu_0 + \nu_1 a_k \lambda_1 + \lambda_2 a_k \nu_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial R_k^{(2)}}{\partial \alpha_j} a_j$$

$$\vartheta_k^{(2)} = \beta^4 a_k L_k - 2\lambda_1 \beta^2 a_k \Gamma_k + R_k^{(1)} (X_k^{(1)})_0 + \beta^3 a_k M_k +$$

$$+\beta^3 R_k^{(1)} a_k U_k + \beta^2 b_k U_k + \beta \lambda_1 a_k \frac{\partial \Gamma_k}{\partial \nu_k} + \beta^2 \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial \Gamma_k^{(2)}}{\partial \alpha_j} -$$

$$-\beta^3 \nu_1 a_k U_k + \alpha_{k1} \beta^2 a_k (Y_k^{(1)})_0 + (\nu_1 - R_k^{(1)}) \beta^2 a_k \frac{\partial U_k}{\partial \nu_k} +$$

$$+\beta b_k (X_k^{(1)})_0 + \beta^2 a_k \left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial \omega_k}\right)_0 U_k + \beta^3 a_k \left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 \Gamma_k +$$

$$+\lambda_1 a_k \frac{\partial V_k}{\partial \nu_k} + \beta^2 a_k \left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 V_k - \nu_1 \beta^3 a_k U_k +$$

$$+\beta \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_k^{(2)}}{\partial \alpha_j} a_j - \nu_1 \beta^2 a_k (X_k^{(1)})_0 + \alpha_{k1} \beta a_k \left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 -$$

$$-\lambda_1 a_k \beta \nu_k + \beta (\nu_1 - R_k^{(1)}) \left(\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial \omega_k}\right)_0 a_k + c_k \qquad (c_k = \mathrm{const})$$

§ 3. Условия устойчивости второй группы. Выпишем систему третьего приближения. Используем соотношения

$$\left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 \frac{\partial \Gamma_k}{\partial \nu_k} \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial^2 Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k \partial \omega_k}\right)_0 \Gamma_k \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k}\right)_0 \frac{\partial V_k}{\partial \nu_k} \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial^2 Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k \partial \omega_k}\right)_0 V_k \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial \nu_k} \langle (Y_k^{(1)})_0 (X_k^{(1)})_0 \rangle \tag{3.1}$$

$$\left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k}\right)_0 \frac{\partial U_k}{\partial \nu_k} \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial^2 Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k^2}\right)_0 U_k \right\rangle = \frac{\partial}{\partial \nu_k} \left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k}\right)_0 U_k \right\rangle$$

$$\left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k}\right)_0 (Y_k^{(1)})_0 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial^2 Y_k^{(1)}}{\partial \varphi_k \partial \omega_k}\right)_0 U_k \right\rangle = 0$$

Из условия существования периодических функций $\operatorname{Im} \psi_k^{(3)}$ находим, что мнимые части величин b_j должны удовлетворять системе

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial P_k^{(2)}}{\partial \alpha_j} - \lambda_1^2 \nu_0^2 \delta_{kj}\right] \operatorname{Im} b_j = \tag{3.2}$$

$$= \lambda_1 \left\{ -\beta^2 \langle (Y_k^{(1)})_0 (X_k^{(1)})_0 \rangle a_k + \beta^2 \left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k}\right)_0 U_k \right\rangle a_k + \right.$$

$$\left. + 2 \operatorname{Re} \lambda_2 \nu_0 a_k - \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial P_k}{\partial \nu_j} + \frac{\partial R_k^{(2)}}{\partial \alpha_j} + \left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(2)}}{\partial \nu}\right)_0 \zeta_j \right\rangle \right] a_j \right\}$$

Теперь $(n-1)$ пар вторых приближений к критическим показателям, отвечающие ненулевым корням (2.15), определятся из условия разрешимости неоднородной системы (3.2)

$$\operatorname{Re}\lambda_{2r} = \beta^3 \sum_{k=1}^{n} \left[\langle (Y_k^{(1)})_0 (X_k^{(1)})_0 \rangle - \left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k} \right)_0 U_k \right\rangle \right] a_k^{(r)} a_k^{(r)*} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial P_k}{\partial \nu_j} + \frac{\partial R_k^{(2)}}{\partial \alpha_j} + \left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(2)}}{\partial \nu} \right)_0 \zeta_j \right\rangle \right] a_j^{(r)} a_k^{(r)*} \tag{3.3}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Здесь по сравнению с предыдущим уточнена нумерация решений системы (2.14). Именно $a_k^{(r)}$ означает, что решение соответствует корню $(\lambda_1)_r$ $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$. При этом предполагается, что все корни уравнения (2.15) простые, а соответствующие им собственные векторы $\mathbf{a}^{(r)}$ и $\mathbf{a}^{(r)*}$ нормированы

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(r)} a_k^{(r)*} = 1 \tag{3.4}$$

Что касается нулевых корней уравнения (2.16), то, как было уже указано ранее, они соответствуют характеристическим показателям полной системы в вариациях вида

$$\lambda_n^{(1)} = \lambda_{2n}\mu^2 + \ldots, \quad \lambda_n^{(2)} = 0 \tag{3.5}$$

Вычислим характеристический показатель $\lambda_n^{(1)}$ с точностью до величин порядка большего, чем μ^2. Известно, что сумма показателей системы уравнений с периодическими коэффициентами равна среднему за период значению следа матрицы коэффициентов. Вычисляя эту величину для системы в вариациях, получим

$$\sum_{r=1}^{n} (\lambda_r^{(1)} + \lambda_r^{(2)}) = \mu^2 \sum_{k=1}^{n} \left[\beta \frac{\partial R_k^{(2)}}{\partial \alpha_k} + \beta^3 \langle (X_k^{(1)})_0 (Y_k^{(1)})_0 \rangle - \right.$$

$$\left. - \beta^3 \left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k} \right)_0 U_k \right\rangle + \beta \frac{\partial P_k}{\partial \nu_k} + \beta \left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(2)}}{\partial \nu} \right)_0 \zeta_k \right\rangle \right] + \mu^3 \ldots \tag{3.6}$$

Отсюда, в результате преобразований, аналогичных приведенным в [1], получаем, что искомый характеристический показатель с принятой точностью определяется из соотношения

$$\lambda_{2n} = \sum_{k,\, j=1}^{n} \left\{ \left[\beta \frac{\partial P_k}{\partial \nu_j} + \beta \frac{\partial R_k^{(2)}}{\partial \alpha_j} + \beta \left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(2)}}{\partial \nu} \right)_0 \zeta_j \right\rangle \right] a_j^{(n)} a_k^{(n)*} + \right.$$

$$\left. + \left[\beta^3 \langle (Y_k^{(1)})_0 (X_k^{(1)})_0 \rangle - \beta^3 \left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k} \right)_0 U_k \right\rangle \right] a_k^{(n)} a_k^{(n)*} \right\} \tag{3.7}$$

Условия устойчивости второй группы запишутся $\operatorname{Re}\lambda_{2r} < 0$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$, где $\operatorname{Re}\lambda_{2r}$ вычисляется согласно (3.3).

Исследование устойчивости существенно облегчается в том частном случае, когда вектор-функция $\mathbf{F}_1$ представима в виде суммы

$$\mathbf{F}_1 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_{1k} (\varphi_k, \omega_1, \ldots, \omega_n) \tag{3.8}$$

а функции $Y_k^{(2)}$ линейны по координатам несущей системы

$$Y_k^{(2)} = Y_{k0}^{(2)} (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n) + Y_{k1}^{(2)} (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n)\, \mathbf{v} \tag{3.9}$$

При этом вектор $\mathbf{v}$ в порождающем приближении представится в виде суперпозиции

$$\mathbf{v}_0 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}_{0k} (\tau + \alpha_k, \nu_0, \nu_{01}, \ldots, \nu_{0n}) \tag{3.10}$$

где составляющие $\mathbf{v}_{0k}$ определяются из уравнений

$$\mathbf{v}_{0k}' = \beta\, [A\, \mathbf{v}_{0k} + \mathbf{F}_{1k} (\tau + \alpha_k, \nu_0, \nu_{01}, \ldots, \nu_{0n})] \tag{3.11}$$

Соответственно уравнения для определения параметров порождающего решения могут быть записаны в виде

$$P_k = P_{k0} + \sum_{j=1}^{n} P_{kj} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.12}$$

$$P_{kj} = \langle (Y_{k1}^{(2)})_0\, \mathbf{v}_{j0} \rangle$$

$$P_{k0} = \langle (Y_{k0}^{(2)})_0 \rangle - \beta \langle (Y_k^{(1)})_0 (X_k^{(1)})_0 \rangle + \beta \left\langle U_k \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k} \right)_0 \right\rangle$$

В данном случае из (2.3) имеем

$$\zeta_k = \frac{\partial \mathbf{v}_{0k}}{\partial \nu_0}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.13}$$

Следовательно

$$\left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(2)}}{\partial \mathbf{v}} \right)_0 \zeta_j \right\rangle = \left\langle (Y_{k1}^{(2)})_0 \frac{\partial \mathbf{v}_{0j}}{\partial \nu_0} \right\rangle = \frac{\partial P_{kj}}{\partial \nu_0} \tag{3.14}$$

Окончательно условия устойчивости второй группы запишутся в виде

$$\sum_{k,j=1}^{n} \left\{ \left[\beta \frac{\partial P_k}{\partial \nu_j} + \beta \frac{\partial R_k^{(2)}}{\partial \alpha_j} + \beta \frac{\partial P_{kj}}{\partial \nu_0} \right] a_{jr} a_{kr}^* + \right.$$
$$\left. + \left[\beta^3 \langle (Y_k^{(1)})_0 (X_k^{(1)})_0 \rangle - \beta^3 \left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k} \right)_0 U_k \right\rangle a_{kr} a_{kr}^* \right\} < 0 \tag{3.15}$$

Предположим теперь, что функции $Y_k^{(2)}$ $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n, \mathbf{v})$, линейные по координатам несущей системы, имеют вид

$$Y_k^{(2)} (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n, \mathbf{v}) = Y_{k0}^{(2)} (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} Y_{ki}^{(2)} (\varphi_k, \omega_k)\, \xi_i \tag{3.16}$$

где m так называемых параметров обратного влияния [4,5] ξ_i связаны с координатным вектором $\mathbf{v}$ соотношениями $\xi_i = (\mathbf{v},\ \mathbf{q}_i)$, $\mathbf{q}_i$ — постоянные векторы в пространстве конфигураций несущей системы; скобки означают скалярные произведения.

Пусть, кроме того, вектор-функции $\mathbf{F}_{1k}$ представимы в виде

$$\mathbf{F}_{1k} = F_{1k}(\varphi_k,\ \omega_k)\ \mathbf{q}_k \tag{3.17}$$

Уравнение движения несущей системы перепишется тогда

$$\mathbf{v}^{\cdot} = A\mathbf{v} + \sum_{k=1}^{m} F_{1k}(\varphi_k,\ \omega_k)\,\mathbf{q}_k + \mu\ldots \tag{3.18}$$

В порождающем приближении

$$\mathbf{v}_0 = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{v}_{0k}, \qquad \mathbf{v}_{0k}' = A\mathbf{v}_{0k} + F_{1k}(\tau + \alpha_k,\ \nu_k)\,\mathbf{q}_k \tag{3.19}$$

Разложим периодические функции F_{1k} в ряды Фурье

$$F_{1k} = \sum_{\rho=0}^{\infty} F_{1k}^{(\rho)}(\nu)\cos\left[\rho(\nu t + \alpha_k) + \Theta_k^{(\rho)}(\nu)\right] \tag{3.20}$$

Будем искать векторы $\mathbf{v}_{0k}$ в виде рядов, компоненты которых удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{v}_k^{(\rho)\cdot} = A\mathbf{v}_k^{(\rho)} + F_{1k}^{(\rho)}\cos\left[\rho(\nu t + \alpha_k) + \Theta_k^{(\rho)}\right]\mathbf{q}_k \quad (\rho = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{3.21}$$

Последние уравнения имеют решения вида

$$\mathbf{v}_k^{(\rho)} = F_{1k}^{(\rho)}(\nu)\ \mathbf{v}_{k*}^{(\rho)} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m) \tag{3.22}$$

где

$$\mathbf{v}_{j*}^{(\rho)} = \mathbf{v}_{k1}^{(\rho)}\cos\left\{\rho(\nu t + \alpha_k) + \Theta_k^{(\rho)}(\nu)\right\} + \mathbf{v}_{k2}^{(\rho)}\sin\left\{\rho(\nu t + \alpha_k) + \Theta_k^{(\rho)}(\nu)\right\} \tag{3.23}$$

Здесь $\mathbf{v}_{k1}^{(\rho)}$, $\mathbf{v}_{k2}^{(\rho)}$ — некоторые функции синхронной частоты.

Введем теперь в рассмотрение величины $K_{ij}^{(\rho)}(\nu)$ и $\Psi_{ij}^{(\rho)}(\nu)$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ldots,\ m,\ \ \rho = 0,\ 1,\ldots)$, определяемые из решения линейной задачи о вынужденных колебаниях несущей системы под действием заданных гармонических сил следующим образом:

$$(\mathbf{v}_{i*}^{(\rho)},\ \mathbf{q}_i) = K_{ij}^{(\rho)}\cos\left[\rho(\nu t + \alpha_j) + \Theta_j^{(\rho)}(\nu) - \Psi_{ji}^{(\rho)}(\nu)\right] \tag{3.24}$$

где

$$\mathbf{v}_{j*}^{(\rho)} = A\mathbf{v}_{j*}^{(\rho)} + \cos\rho(\nu t + \alpha_j)\,\mathbf{q}_j$$

Согласно (3.22) и (3.24)

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{m}\sum_{\rho=0}^{\infty} F_{1j}^{(\rho)}K_{ji}^{(\rho)}\cos\left[\rho(\nu t + \alpha_j) + \Theta_j^{(\rho)}(\nu) - \Psi_{ji}^{(\rho)}(\nu)\right] \tag{3.25}$$

Уравнения для определения параметров порождающего решения в данном частном случае примут вид

$$P_k = P_{k0} + \sum_{i,\ j=1}^{m}\sum_{\rho=0}^{\infty} P_{kij}^{(\rho)} = 0 \tag{3.26}$$

где

$$P_{kij}^{(\rho)} = \langle (Y_{ki}^{(2)})_0 \cos [\rho (\tau + \alpha_j) + \Theta_j^{(\rho)} - \Psi_{jk}^{(\rho)}] \rangle \; F_{1j}^{(\rho)} (\nu_0) \, K_{jk}^{(\rho)} (\nu_0) \qquad (3.27)$$

$$P_{k0} = \langle (Y_{k0}^{(2)})_0 \rangle - \beta \langle (Y_k^{(1)})_0 (X_k^{(1)})_0 \rangle + \beta \left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k} \right)_0 U_k \right\rangle$$

От характеристик колебательной системы в (3.26) зависят только гармонические коэффициенты влияния и фазы. Поэтому, если для некоторой системы объектов эти уравнения составлены, их можно использовать для исследования синхронизации при любой несущей системе. То же можно сказать и о составляемых на их основе условиях устойчивости.

§ 4. Система, консервативная в первом приближении. Ранее было показано, что в этом случае решения очевидным образом разлагаются по степеням μ. Рассмотрим теперь этот случай более подробно.

Допустим, что первые $2n$ уравнений исходной системы соответствуют консервативной с точностью до членов порядка μ^2 системе

$$\varphi_k^{\cdot} = \omega_k + \mu X_k^{(1)} (\varphi_k, \omega_k) + \mu^2 \ldots = \frac{\partial H_k}{\partial \omega_k} + \mu^2 \ldots$$

$$\omega_k^{\cdot} = \mu Y_k^{(1)} (\varphi_k, \omega_k) + \mu^2 \ldots = -\frac{\partial H_k}{\partial \varphi_k} + \mu^2 \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\mathbf{v}^{\cdot} = A\mathbf{v} + \mathbf{F}_1 (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \; \omega_1, \ldots, \omega_n) + \mu \ldots \qquad (4.1)$$

Здесь векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}_1$ и функции $X_k^{(1)}$, $Y_k^{(1)}$ удовлетворяют требованиям, указанным в § 1. Величина $H_k (\varphi_k, \omega_k)$ — парциальная функция Гамильтона k-го объекта [1].

При этих условиях выполняются равенства

$$\beta \left\langle \left(\frac{\partial Y_k^{(1)}}{\partial \omega_k} \right)_0 U_k \right\rangle - \beta \langle (Y_k^{(1)})_0 (X_k^{(1)})_0 \rangle = 0 \qquad (4.2)$$

В результате получается, что уравнения относительно параметров порождающего решения и условия устойчивости будут аналогичны соответствующим соотношениям работы [1].

Автор благодарит К. Ш. Ходжаева за помощь, оказанную при выполнении работы.

Поступила 28 IV 70

ЛИТЕРАТУРА

1. Нагаев Р. Ф., Ходжаев К. Ш. Синхронные движения в системе объектов с несущими связями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
3. Кушуль М. Я. О квазигармоническх системах, близких к системам с постоянными коэффициентами, у которых чисто мнимые корни фундаментального уравнения имеют непростые элементарные делители. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
4. Ходжаев К. Ш. О возбуждении вибраций. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
5. Нагаев Р. Ф. Синхронизация генераторов конечно-мерных сил. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.