Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

О ТОЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Л. С. Гноенский

(Москва)

Исследуется точность воспроизведения нелинейной управляемой системой с запаздыванием произвольных воздействий из некоторого класса функций. Приводятся оценки максимальной ошибки воспроизведения воздействий в зависимости от параметров управляемого объекта и выбранного закона управления.

§ 1. Постановка задачи. Рассматривается замкнутая система, состоящая из управляемого объекта и регулятора. Назначение системы состоит в воспроизведении выходной величиной объекта $y(t)$ заранее неизвестного задающего воздействия $x(t)$ из класса F функций с ограниченной скоростью изменения

$$x'(t) \equiv \varphi(t), \quad |\varphi(t)| \leqslant m, \quad x(0) = 0 \tag{1.1}$$

Качество работы системы, находящейся при $t \leqslant 0$ в состоянии покоя, будем характеризовать максимальной ошибкой

$$\varepsilon_{\max}(t) = \max|\varepsilon(t)|, \quad \varepsilon(t) = x(t) - y(t) \qquad (x \in F) \tag{1.2}$$

и величиной

$$\varepsilon_\infty = \lim \varepsilon_{\max}(t) \qquad (t \to \infty)$$

Исследуется, таким образом, известная задача Б. В. Булгакова о накоплении возмущений [1,2].

Поведение управляемого объекта описывается дифференциальным уравнением

$$c_0 y^{(n)}(t) + \ldots + c_{n-2} y''(t) + y'(t) = u(t - \tau) \tag{1.3}$$

$$y(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 \quad u(t_1) = 0 \quad (-\tau \leqslant t_1 \leqslant 0) \tag{1.4}$$

Управляющий сигнал $u(t)$ ограничен по модулю константой u_0. В качестве закона управления, реализуемого регулятором, выберем «жесткую» обратную связь

$$u(t) = k\varepsilon(t) \left(|\varepsilon(t)| \leqslant \frac{u_0}{k}\right), \quad u(t) = u_0 \operatorname{sign} k\varepsilon(t) \quad \left(|\varepsilon(t)| > \frac{u_0}{k}\right) \tag{1.5}$$

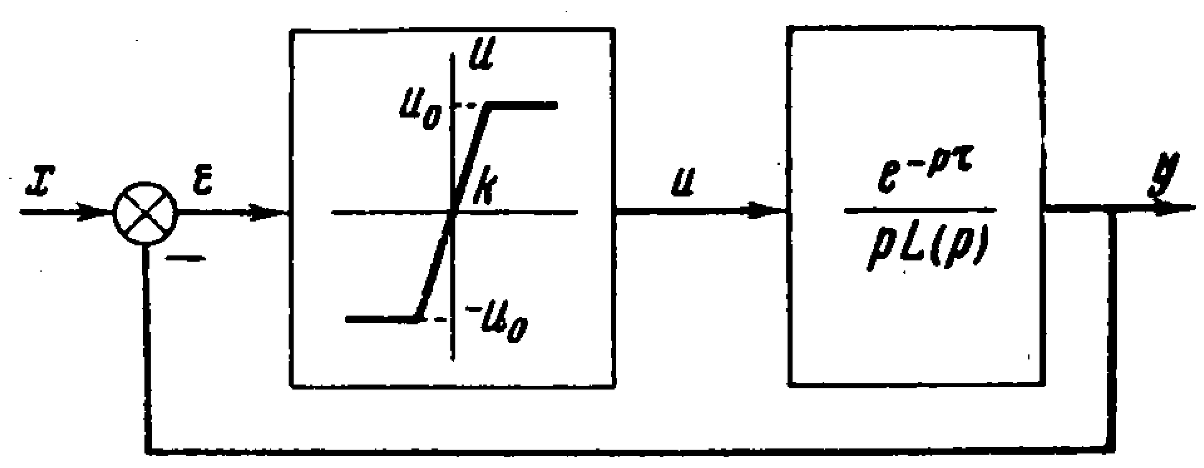
Уравнения (1.3), (1.5) описывают поведение замкнутой астатической следящей системы с запаздыванием и нелинейностью типа ограничения. Структурная схема этой системы изображена на фигуре, где $F_1(p)$ — передаточная функция объекта

$$F_1(p) = \frac{e^{-p\tau}}{Q(p)} = \frac{Y(p)}{U(p)}, \quad Q = pL, \quad L(p) = c_0 p^{n-1} + \cdots + c_{n-2} p + 1 \qquad (1.6)$$

Функции $Y(p)$, $U(p)$ — преобразования Лапласа функций $y(t)$, $u(t)$.

Ниже приводятся оценки сверху для ε_∞ в зависимости от параметров u_0, m, τ, k, а также от расположения нулей полинома $L(p)$, которое предполагается известным. Это предположение допустимо, так как разомкнутая система часто содержит ряд последовательно соединенных элементов, описываемых уравнениями невысокого порядка: первого или второго.

Рассматриваемая задача есть задача преследования, в которой расстояние между преследуемым и преследователем определяется функцией $\varepsilon(t)$. Величина $\varepsilon_{\max}(t)$ отлична от нуля даже при $u_0 > m$ и начальных условиях (1.1), (1.4) вследствие того, что преследуемый объект «безынерционен», т. е. мгновенно развивает свою максимальную скорость m, а преследующий объект обладает инерционными свойствами, определяемыми расположением нулей многочлена $L(p)$. Выбранный закон управления (1.5) не является оптимальным. Он получил широкое распространение в технике из-за простоты технической реализации, так как не используется информация о высших производных, получение которой связано со значительными трудностями. Однако и при таком законе величина ε_∞ может быть достаточно малой, если управляемый объект имеет хорошие динамические свойства.



Из стационарности системы следует, что $\varepsilon_{\max}(t) < \varepsilon_\infty$. Если $\varepsilon_\infty < u_0 k^{-1}$, то в силу (1.5) замкнутая система ведет себя как линейная и описывается уравнением

$$c_0 y^{(n)}(t) + \ldots + c_{n-2} y''(t) + y'(t) + ky(t-\tau) = kx(t-\tau) \qquad (1.7)$$
$$y(t_1) = x(t_1) = 0 \quad (-\tau \leqslant t_1 \leqslant 0), \qquad y(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

Оценка $\varepsilon_{\max}(t)$ и ε_∞ в линейной системе приведена в теореме 1.3. Если эта оценка окажется больше $u_0 k^{-1}$, то нельзя гарантировать, что система удовлетворяет (1.7), и следует применить теорему 1.1, в которой дана оценка ε_∞ в нелинейной системе (1.3), (1.5).

Для линейных систем без запаздывания оценка $\varepsilon_{\max}(t)$ дана в [3,4]. Оценки $\varepsilon_{\max}(t)$ в линейных системах с запаздыванием приводились в сообщении автора на второй всесоюзной конференции по теории уравнений с отклоняющимся аргументом.

Предположим, что все нули p_j многочлена $L(p)$, перенумерованные в порядке убывания их действительных частей, удовлетворяют условиям

$$p_j = -\alpha_j(1 + i\mu_j), \quad \alpha_j \geqslant a_0 > 0 \qquad (1.8)$$
$$(j = 1, \ldots n-1)$$
$$\alpha_1 = a_0, \quad \max|\mu_j| = \mu_0$$

Величины a_0 и μ_0 в теории автоматического регулирования называются степенью устойчивости и колебательностью $L(p)$.

Теорема 1.1. Наибольшая ошибка ε_∞ в нелинейной системе с запаздыванием (1.3), (1.5) не превышает величины

$$\varepsilon_\infty < G_0 = u_0 \left\{ k^{-1} + (a_0\gamma)^{-1} \left[D_0 + (2\tau a_0\gamma + 1) D_1 - 1 + m u_0^{-1} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(1 - \frac{m}{u_0}\right) \ln \frac{D_0 + 2D_1 e^{a_0\gamma\tau} - D_1}{1 - m u_0^{-1}} \right] \right\} \quad (m < u_0) \qquad (1.9)$$
$$\varepsilon_\infty < G_0 = u_0 \{ k^{-1} + (a_0\gamma)^{-1} [D_0 + (2\tau a_0\gamma + 1) D_1] \} \quad (m = u_0)$$
$$\varepsilon_\infty = \infty \quad (m > u_0)$$

Здесь

$$D_1 = D_2 (a_0 (1 - \gamma) (\alpha_2 - a_0\gamma)^{-1})^\varkappa \quad (\alpha_2 \neq a_0), \qquad D_1 = D_2 e^{-1} \quad (\alpha_2 = a_0)$$
$$D_2 = \frac{1-\gamma}{\gamma} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\sqrt{1+\mu_j^2}}{\beta_j}, \qquad \beta_j = \frac{\alpha_j - a_0\gamma}{\alpha_j}, \qquad \varkappa = \frac{a_0(1-\gamma)}{\alpha_2 - a_0} \qquad (1.10)$$

Двум возможным вариантам: 1) наличию на прямой

$$\operatorname{Re} p = -a_0 \qquad (1.11)$$

хотя бы одного действительного нуля $L(p)$, 2) отсутствию действительных нулей $L(p)$ на этой прямой, соответствуют значения

$$1)\ D_0 = \frac{1}{2\gamma} \prod_{j=2}^{n-1} \nu_j, \qquad 2)\ D_0 = \frac{r}{2\gamma} \prod_{j=3}^{n-1} \nu_j \quad (n > 3) \qquad (1.12)$$

$$1)\ D_0 = \frac{\nu_2}{2\gamma}, \quad 2)\ D_0 = \frac{r}{2\gamma} \quad (n = 3), \qquad D_0 = D_1 = \gamma = 1 \quad (n = 2)$$
$$\nu_j = \left(\frac{1+\mu_j^2}{2\mu_j\beta_j}\right)^{1/2} \quad (|\mu_j| \geqslant \beta_j), \qquad \nu_j = \left(\frac{1+\mu_j^2}{\mu_j^2+\beta_j^2}\right)^{1/2} \quad (|\mu_j| < \beta_j) \qquad (1.13)$$

$$r = (1 + \mu_1^2) \{2 [(1-\gamma)^2 - \gamma^2 - \mu_1^2 + ((1-2\gamma)^2 + 2\mu_1^2((1-\gamma)^2 +$$
$$+ \gamma^2) + \mu_1^4)^{1/2}]\}^{-1/2}, \quad 0 < \gamma \leqslant (1 + \sqrt{2})^{-1}$$

где γ — произвольное число.

Замечание. Оценки ε_∞ в уравнении первого порядка ($n = 1$) можно получить из оценок для $n = 2$ предельным переходом при $a_0 \to \infty$

$$\varepsilon_\infty < u_0 [k^{-1} + \tau (1 + m u_0^{-1})] \quad (m \leqslant u_0), \qquad \varepsilon_\infty = \infty \quad (m > u_0) \qquad (1.14)$$

Доказательство теоремы 1.1 приведено в § 2. Из (1.9), (1.13) следует, что если a_0 — степень устойчивости $L(p)$, велика, колебательность μ_0 ограниченна, запаздывание τ мало, то выбирая k достаточно большим, можно сделать максимальную ошибку ε_∞ малой. Величины a_0, μ_0, τ определяют динамические свойства объекта.

Перейдем к оценке $\varepsilon_{\max}(t)$ в линейной замкнутой системе (1.7). Величина $\varepsilon_{\max}(t)$ зависит от степени устойчивости δ^* квазиполинома $N(p)$, соответствующего уравнению (1.7)

$$N(p) = Q(p) + k e^{-p\tau}, \qquad \delta^* = \min_j(-\operatorname{Re} p_j^*), \qquad N(p_j^*) = 0 \qquad (1.15)$$

Оценим снизу достижимую при соответствующем выборе коэффициента усиления k степень устойчивости $N(p)$.

Теорема 1.2. Пусть коэффициент усиления k удовлетворяет условию

$$k = \lambda \,|\, Q(-\delta) \,|\exp(-\delta\tau), \qquad (1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1) \tag{1.16}$$

тогда степень устойчивости δ^* квазиполинома $N(p)$ больше величины

$$\delta = \pi\delta_1 \left(2\delta_1\gamma_1(0)\sqrt{\lambda_1^2W^2 - 1} + \pi\right)^{-1} \tag{1.17}$$

Здесь δ_1 — наименьший корень квадратного уравнения

$$z\gamma_1(z) = 1, \quad \gamma_1(z) = \tau_1 + \frac{n-1}{a_0 - z}, \quad \tau_1 = \frac{\pi\tau\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_0}{a_0}, \quad W^2 = \prod_{j=1}^{n-1} A_j \tag{1.18}$$

$$A_j = 1 \quad (|\mu_j| \leqslant y_j), \quad A_j = \frac{\mu_j^2 + y_j^2}{2\mu_j y_j} \quad (|\mu_j| > y_j), \quad y_j = 1 - \frac{\delta_1}{\alpha_j}$$

$\lambda_0 \geqslant 0$, $\lambda_1 \geqslant 1$ — произвольные числа.

Следствие. Функцию $\gamma_1(z)$ в (1.18) можно заменить функцией

$$\gamma_1(z) = \tau_1 + \frac{q}{a_0 - z} + \sum \frac{1}{\alpha_j - a_0} \tag{1.19}$$

Здесь q — число нулей $L(p)$, лежащих на прямой (1.11), сумма распространена на все остальные нули $L(p)$.

Оценка, получаемая из следствия, может оказаться более точной, если $L(p)$ имеет нули, далеко отстоящие от прямой (1.11).

Доказательство теоремы 1.2 приведено в § 3. Условие $\lambda \in [1, \lambda_1]$ оправдано и техническими соображениями, так как трудно выдержать желаемое значение k достаточно точно.

Для уравнения первого порядка нетрудно определить $\delta^*_{\max}$ — максимальную достижимую степень устойчивости $N(p)$ при любых значениях k. Сравним ее с оценкой, получаемой из теоремы 1.2 при $\lambda_1 = 1$

$$\delta^*_{\max} = \tau^{-1} \quad (k = \tau^{-1}e^{-1}), \qquad \delta = 2\pi^{-1}\tau^{-1} \quad (k = 2\pi^{-1}\tau^{-1}e^{-2/\pi})$$

Приближенные методы исследования расположения нулей характеристического многочлена замкнутой системы в зависимости от коэффициента усиления k производились при помощи корневого годографа, например, в [5]. Для систем с запаздыванием такие методы рассматривались в [6]. Оценки сверху достижимой степени устойчивости даны в [7,8].

Используя теорему 1.2, дадим оценку $\varepsilon_{\max}(t)$ в линейной системе (1.7).

Теорема 1.3. Если коэффициент усиления k удовлетворяет условию

$$k = \lambda \,|\, Q(-\delta) \,|\, e^{-\delta\tau} \qquad (1 < \lambda_2 < \lambda < \lambda_3 < \lambda_1) \tag{1.20}$$

то в замкнутой линейной системе (1.7)

$$\varepsilon_{\max}(t) < m(\pi\delta)^{-1} G_1 (1 - e^{-\delta t}), \qquad \varepsilon_\infty < m(\pi\delta)^{-1} G_1 \tag{1.21}$$

Здесь величина δ определяется теоремой 1.2

$$G_1 = \frac{\ln(h + (1 + h^2)^{1/2})}{R_0} + \frac{(1 + h^2)^{1/2}(\pi/2 - \operatorname{arc\,tg} h)}{\sqrt{(h^2s + 1)(\lambda_3W)^{-2}} - 1}$$

$$h = \frac{\arccos(\delta\gamma_1(\delta))}{\delta\gamma_1(\delta)}, \qquad s = 1 + \sum{}^* \frac{\delta^2}{\alpha_j^2} \tag{1.22}$$

Сумма в (1.22) вычисляется лишь по всем действительным нулям $L(p)$.

$$R_0 = (1 - \lambda_2^{-1}) \quad (D_3 < 1), \qquad R_0 = (1 - \lambda_2^{-1})(2D_3^{-1} - D_3^{-2})^{1/2} \quad (D_3 > 1)$$

$$D_3 = \frac{\pi^2 \lambda_3 (\lambda_2 - 1) C}{4\lambda_2 (\tau_1 - \tau)^2}, \qquad C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta^2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(\alpha_j - \delta)^2}\right) \tag{1.23}$$

Доказательство теоремы 1.3 приведено в § 4. Произвольные константы γ, λ, λ_i в теоремах 1.1—1.3 следовало выбрать так, чтобы минимизировать G_1; это приводит, однако, к очень громоздким выражениям. Можно показать, что при $a_0 \to \infty$, $\tau \to 0$ и ограниченной величине μ_0 стремятся к нулю $\varepsilon_{\max}(t)$ и ε_∞.

Остановимся коротко на более сложном, чем (1.5) законе управления

$$u = kv \quad (|v| < u_0/k), \qquad u = u_0 \operatorname{sign} v \quad (|v| \geqslant u_0/k), \qquad v = \varepsilon + k_1 \varepsilon'$$

Обычно «коррекция по скорости» вводится в линейных замкнутых системах для улучшения их динамических свойств. Если, например, $\tau = 0$ и многочлен $L(p)$ имеет действительный нуль $p_1 = -a_0$, расположенный существенно ближе к мнимой оси, чем все остальные нули, то целесообразно положить $k_1 = a_0^{-1}$. При этом множитель $a_0^{-1} p + 1$, стоящий в числителе передаточной функции разомкнутой системы, сокращается с соответствующим множителем $L(p)$. Это позволяет по теореме 1.2 увеличить степень устойчивости замкнутой системы и в силу теоремы 1.3 уменьшить оценку наибольшей накопленной ошибки. Вопрос о влиянии коррекции по скорости на величину ε_∞ при наличии ограничений на управляющий сигнал остается открытым. Однако можно показать, что теорема 1.1 остается справедливой. Если выбирать k_1 так, чтобы $k_1 p + 1$ был одним из множителей $L(p)$, то справедливы и теоремы 1.2, 1.3. Можно гарантировать, что система остается линейной, пока

$$v_\infty \leqslant u_0 k^{-1}, \qquad v_\infty = \lim \max |v(t)| \, (t \to \infty, \ x \in F)$$

§ 2. Оценка максимальной ошибки в нелинейной системе. Докажем теорему 1.1.

А. Применим преобразование Лапласа ко второму равенству (1.2). Учитывая (1.1), (1.6), имеем

$$\mathrm{E}(p) = X(p) - Y(p) = p^{-1}\Phi(p) - (p\, L(p))^{-1} e^{-p\tau}\, U(p)$$

Используем теоремы о свертке и интегрировании оригинала

$$\varepsilon(t) = \int_0^t [\varphi(t_1) - s_1(t - t_1)\, u(t_1)]\, dt_1, \qquad s_1(t) \risingdotseq \frac{e^{-p\tau}}{pL(p)}, \qquad \varphi(t) \risingdotseq \Phi(p) \tag{2.1}$$

Символ $\risingdotseq$ означает соответствие между функцией-оригиналом и ее изображением по Лапласу. Пусть

$$\varepsilon(a) = \frac{u_0}{k}, \quad \varepsilon(t) \geqslant \frac{u_0}{k} \quad (t \in [a, c]), \quad \varepsilon(b) = \max_t \varepsilon(t) \quad (t \in [a, c]) \tag{2.2}$$

Из (2.1), (2.2), (1.5) следует

$$u(t) = u_0 \qquad (t \in [a,\ b])$$

$$\varepsilon(b) \leqslant m(b-a) + u_0 \left\{ \frac{1}{k} - \int_a^b s_1(b-t_1)\,dt_1 + \int_0^a |s_1(a-t_1) - s_1(b-t_1)|\,dt_1 \right\} \tag{2.3}$$

Дадим оценку снизу для второго члена и оценку сверху для третьего члена в фигурных скобках неравенства (2.3). Из (2.1) получаем

$$s_1(t) = 1 + q_1(t), \quad q_1(t) \risingdotseq Q_1(p) = (pL(p)\,e^{p\tau})^{-1} - p^{-1} \tag{2.4}$$

Для функции $q_1(t)$ справедлива оценка, доказательство которой, чтобы не прерывать изложения, будет дано в п. В.

$$\begin{aligned} &|q_1(t)| < e^{-a_0\gamma t}(D_0 + D_1(e^{a_0\gamma\tau} - 1)) \quad (t \geqslant \tau) \\ &|q_1(t)| < e^{-a_0\gamma t}(D_0 + D_1(e^{a_0\gamma t} - 1)) \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Величины a_0, γ, D_0, D_1 в (2.5) определены в формулировке теоремы 1.1. Ниже предполагается, что

$$b - a \geqslant \tau, \qquad b \geqslant \tau, \qquad a \geqslant \tau \tag{2.6}$$

Используя (2.5), получаем

$$\int_0^{b-a} s_1(t)\,dt > b - a - \frac{D_0}{a_0\gamma}(1 - e^{-a_0\gamma(b-a)}) - \tau D_1 + \frac{D_1(e^{a_0\gamma\tau} - 1)}{a_0\gamma e^{a_0\gamma(b-a)}} \tag{2.7}$$

Оценим третий член в фигурных скобках (2.3)

$$J_1 = \int_0^a |s_1(a-t_1) - s_1(b-t_1)|\,dt_1 = \int_{b-a}^{b} |s_2(z)|\,dz, \quad s_2(z) = s_1(z - b + a) - s_1(z) \tag{2.8}$$

Из (2.1) следует

$$s_2(z) \risingdotseq G(p)\Psi(p), \quad G(p) = \frac{e^{-p\tau}}{L(p)} \risingdotseq g(t), \quad \Psi(p) = \frac{e^{-p(b-a)} - 1}{p} \risingdotseq \psi(t) \tag{2.9}$$

По теореме о свертке

$$s_2(z) = \int_0^z g(z - z_1)\,\psi(z_1)\,dz_1$$

Из вида изображения Лапласа функции $\psi(z_1)$ следует, что

$$\psi(z_1) = -1 \quad (0 \leqslant z_1 \leqslant b - a), \; \psi(z_1) = 0 \qquad (z_1 > b - a)$$

Поэтому

$$s_2(z) = -\int_0^{b-a} g(z - z_1)\,dz_1 \qquad (z > b - a) \tag{2.10}$$

Из (2.9) получаем

$$g(z) = l(z - \tau) \quad (z > \tau), \qquad g(z) = 0 \quad (z \leqslant \tau), \qquad l(z) \risingdotseq L^{-1}(p)$$

В п. Б приведена оценка

$$|l(t)| \leqslant D_1 a_0 \gamma e^{-a_0\gamma t}$$

Используем эту оценку и равенство (2.10)

$$\begin{aligned} &|s_2(z)| \leqslant D_1 e^{a_0\gamma\tau}(e^{a_0\gamma(b-a)} - 1)\,e^{-a_0\gamma z} \qquad (z \geqslant b - a + \tau) \\ &|s_2(z)| \leqslant D_1 e^{a_0\gamma\tau}(e^{-a_0\gamma\tau} - e^{-a_0\gamma z}) \qquad (b - a \leqslant z < b - a + \tau) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Из (2.8), (2.11) получаем оценку

$$u_0J_1 \leqslant u_0D_1e^{a_0\gamma\tau}\left\{\tau e^{-a_0\gamma\tau} - \frac{e^{-a_0\gamma(b-a)} - e^{-a_0\gamma b} + e^{-a_0\gamma a} - e^{-a_0\gamma\tau}}{a_0\gamma}\right\} \tag{2.12}$$

Подставим правые члены неравенств (2.7), (2.12) в (2.3). Так как

$$e^{-a_0\gamma b} - e^{-a_0\gamma a} \leqslant 0, \qquad b - a = \eta$$

то

$$\varepsilon(b) < \Phi_1 = u_0\left\{\frac{1}{k} + \frac{D_0 + D_1}{a_0\gamma} + 2\tau D_1 + \frac{e^{-a_0\gamma\eta}}{a_0\gamma}[D_1 - D_0 - 2D_1e^{a_0\gamma\tau}]\right\} - (u_0 - m)\eta \tag{2.13}$$

Максимальное значение $\Phi_1(\eta)$ достигается в точке

$$\eta^* = (a_0\gamma)^{-1}\ln[u_0(D_0 - D_1 + 2D_1e^{a_0\gamma\tau})(u_0 - m)^{-1}]$$

Подставив η^* в (2.13), получаем оценку (1.9) для $\varepsilon(b)$. Так как правая часть (1.9) не зависит от c и $\varepsilon(t)$ достигает в точке b максимума на $[a\ c]$, то (1.9) дает оценку ε_∞.

Выше предполагалось, что выполняются условия (2.6). Аналогично можно исследовать и остальные случаи и убедиться, что наибольшее значение для правой части (2.3) дает рассмотренный вариант.

Б. Оценим $|l(t)|$.

$$l(t) \risingdotseq \frac{1}{L(p)} = \prod_{j=1}^{n-1}\frac{p_j}{p_j - p}, \qquad p_j = -\alpha_j(1 + i\mu_j)$$

Из (1.8) следует $\operatorname{Re} p_1 = -a_0$.

Обозначим

$$\chi(t) = |p_1p_2|(\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}), \qquad l_{12}(t) \risingdotseq p_1p_2(p - p_1)^{-1}(p - p_2)^{-1}$$

Применяя теорему о свертке, получаем

$$e^{a_0\gamma t}|l_{12}(t)| \leqslant \chi(t)e^{a_0\gamma t} \qquad (0<\gamma<1) \tag{2.14}$$

Заменим правую часть (2.14) на ее максимальное значение. Учитывая (1.10), имеем

$$|l_{12}| \leqslant h_1|p_1p_2|(\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2)^{-1}e^{-a_0\gamma t}, \quad h_1 = a_0(1-\gamma)(a_0(1-\gamma)(\alpha_2 - a_0\gamma)^{-1})^{\varkappa} \tag{2.15}$$

Используя эту оценку и теорему о свертке, оценим $|l_{13}(t)|$

$$l_{13}(t) \risingdotseq \prod_{j=1}^{3}\frac{p_j}{p - p_j}, \quad |l_{13}| \leqslant \frac{|p_3|}{e^{\alpha_3 t}}\int_0^t |l_{12}(t_1)|e^{\alpha_3 t_1}dt_1 \leqslant \prod_{j=1}^{3}\frac{|p_j|}{\alpha_j\beta_j}h_1e^{-a_0\gamma t}$$

Последовательно повторяя приведенную выкладку, приходим к оценке

$$|l_{1,n-1}(t)| \equiv |l(t)| \leqslant \prod_{j=1}^{n-1}\frac{|p_j|}{\alpha_j\beta_j}h_1e^{-a_0\gamma t} = D_1a_0\gamma e^{-a_0\gamma t} \tag{2.16}$$

Если $\alpha_2 = a_0$, то переходя в (2.15) к пределу при $\alpha_2 \to a_0$, получаем (1.10). Если $n = 2$, то

$$l(t) \risingdotseq p_1(p - p_1)^{-1}, \qquad l(t) = a_0e^{-a_0 t}, \quad D_1 = \gamma = 1$$

В. Оценим $|q(t)|$. Из (2.4) следует

$$q_1(t) \risingdotseq Q_2(p) + Q_3(p), \qquad Q_2 = (pL(p))^{-1} - p^{-1} \risingdotseq q_2(t), \qquad Q_3 = L^{-1}\Phi_\tau \risingdotseq q_3(t) \tag{2.17}$$

$$\Phi_\tau(p) = (e^{-p\tau} - 1)p^{-1} \risingdotseq \varphi_\tau(t), \quad \varphi_\tau(t) = -1 \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau), \qquad \varphi_\tau(t) = 0 \quad (t > \tau)$$

Применяя теорему о свертке и учитывая (2.16), (2.17), имеем

$$|q_3| \leqslant D_1(1-e^{-a_0\gamma t}) \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau), \qquad |q_3| \leqslant D_1'(e^{a_0\gamma\tau}-1)e^{-a_0\gamma t} \quad (t>\tau) \tag{2.18}$$

Так как $Q_2(p)$ не имеет полюсов правее прямой (1.11), то используя теорему обращения, имеем

$$|q_2| \leqslant \frac{e^{-a_0\gamma t}}{2\pi} \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{\pi_1(\omega)\sqrt{a_0^2\gamma^2+\omega^2}}{(a_0^2\gamma^2+\omega^2)}\,d\omega, \quad \pi_1 = \prod_{j=1}^{n-1}\left|1-\frac{(-a_0\gamma+i\omega)}{p_j}\right|^{-1} \tag{2.19}$$

Хотя бы один нуль $L(p)$ лежит на прямой (1.11). Рассмотрим случай $p_1 = -a_0$. Тогда

$$\sqrt{a_0^2\gamma^2+\omega^2}\,|p_1+a_0\gamma-i\omega|^{-1} < 1 \quad (0<\gamma<{}^1/_2) \tag{2.20}$$

Множители функции $\pi_1(\omega)$, соответствующие действительным нулям $L(p)$, оцениваются сверху величиной ν_j, множители, соответствующие комплексно-сопряженным нулям $L(p)$ — величиной ν_j^2, где ν_j определяется формулой (1.13). В этом нетрудно убедиться непосредственным вычислением максимумов этих множителей.

Если нет действительных нулей $L(p)$, лежащих на прямой (1.11), то на ней лежит хотя бы одна пара комплексно-сопряженных нулей p_1, p_2. В этом случае

$$\sqrt{a_0^2\gamma^2+\omega^2}\,(|p_1+a_0\gamma-i\omega|\,|p_2+a_0\gamma-i\omega|)^{-1} \leqslant r \quad (0<\gamma<(1+\sqrt{2})^{-1}) \tag{2.21}$$

Значение r приведено в (1.13) и находится вычислением максимума левой части (2.21). Подставив оценки для множителей $\pi_1(\omega)$ и (2.20) или (2.21) в (2.19), получаем

$$|q_2(t)| \leqslant D_0 e^{-a_0\gamma t}, \quad (1)\ D_0 = \frac{1}{2\gamma}\prod_{j=2}^{n-1}\nu_j, \qquad (2)\ D_0 = \frac{r}{2\gamma}\prod_{j=3}^{n-1}\nu_j \tag{2.22}$$

Сумма неравенств (2.18), (2.22) дает оценку (2.5) для $|q_1(t)|$.

§ 3. Оценка степени устойчивости линейных систем с запаздыванием.

Докажем теорему 1.2.

Из принципа аргумента следует [9], что необходимым и достаточным условием расположения всех нулей квазиполинома $N(p)$ левее прямой $\operatorname{Re} p = -\delta$ является следующее равенство для приращения аргумента функции $N(p)$:

$$\Delta \arg N_\delta(\omega) = {}^1/_2 n\pi \quad (0 \leqslant \omega < \infty), \qquad N_\delta(\omega) \equiv N(-\delta+i\omega) \tag{3.1}$$

Пусть для некоторого $\delta \in (0, a_0)$ удалось найти такое $\omega_1 > 0$, что при коэффициенте усиления k, удовлетворяющем условию (1.16) теоремы 1.2

$$\begin{gathered} \operatorname{Im} N_\delta(\omega) \geqslant 0 \quad (0 \leqslant \omega \leqslant \omega_1), \qquad \operatorname{Im} Q_\delta(\omega) \geqslant 0 \quad (0 \leqslant \omega \leqslant \omega_1) \\ |Q_\delta(\omega)| \geqslant \lambda_1 |Q_\delta(0)| \quad (\omega > \omega_1), \qquad Q_\delta(\omega) \equiv Q(-\delta+i\omega) \end{gathered} \tag{3.2}$$

При этих условиях справедливо равенство (3.1), и величина δ дает оценку снизу степени устойчивости δ^* квазиполинома $N(p)$.

Действительно, на любом интервале изменения ω

$$\Delta \arg N_\delta(\omega) = \Delta \arg Q_\delta(\omega) + \Delta \arg N_\delta^*(\omega)\, Q_\delta^{-1}(\omega) \tag{3.3}$$

Так как a_0 — степень устойчивости $L(p)$, больше δ, и $Q = pL(p)$, то $n-1$ нулей $Q(p)$ лежат слева от прямой $\operatorname{Re} p = -\delta$, а один $p = 0$ — справа от нее. Поэтому

$$Q_\delta(0) < 0, \quad \Delta \arg Q_\delta(\omega) = {}^1/_2(n-2)\pi \quad (0 \leqslant \omega < \infty) \tag{3.4}$$

По условию (1.16) теоремы $N_\delta(0) > 0$, следовательно, учитывая (3.2) при любом $\omega > \omega_1$ точка

$$D = N_\delta(\omega)\, Q_\delta^{-1}(\omega) = 1 + ke^{-(-\delta+i\omega)\tau}\, Q_\delta^{-1}(\omega)$$

лежит в нижней полуплоскости. Вместе с тем при $\omega > \omega_1$ в силу (3.2), (1.16) точка D лежит в правой полуплоскости и стремится при $\omega \to \infty$ к точке (1, 0) на действительной оси. Отсюда

$$\Delta \arg N_\delta(\omega)\, Q_\delta^{-1}(\omega) = \pi \qquad (0 \leqslant \omega < \infty) \tag{3.5}$$

Из равенств (3.3) — (3.5) получаем (3.1).

Перейдем к определению величины δ, для которой удовлетворяются условия (3.2). Обозначим

$$Q_\delta(\omega) = \rho_\delta(\omega)\, e^{i\varphi_\delta(\omega)}, \quad k = \lambda\rho_\delta(0)e^{-\delta\tau} \quad (1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1) \tag{3.6}$$

Первое из условий (3.2) эквивалентно неравенству

$$\rho_\delta(\omega)\sin\varphi_\delta(\omega) > \lambda\rho_\delta(0)\sin\omega\tau \tag{3.7}$$

Так как

$$\delta \in (0, a_0), \qquad Q(p) = pL(p)$$

то

$$\varphi_\delta = -\pi - \operatorname{arc\,tg} \omega\delta^{-1} + \psi_\delta, \quad \psi_\delta = \arg L(-\delta + i\omega), \quad \psi_\delta(0) = 0 \tag{3.8}$$

Нетрудно проверить, что при любых значениях ω справедливо неравенство

$$\psi_\delta'(\omega) \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_j - \delta} \leqslant \frac{n-1}{a_0 - \delta} \tag{3.9}$$

Если выполняется условие

$$\begin{gathered} 0 < \delta\gamma_1(\delta) < 1, \quad \gamma_1(\delta) = \tau_1 + (n-1)\,(a_0 - \delta)^{-1} \\ \tau_1 = \pi\tau\lambda_1 / 2 + \lambda_0 a_0^{-1} \end{gathered} \tag{3.10}$$

где λ_0 — произвольное неотрицательное число, то из (3.8), (3.9) следует

$$\sin\varphi_\delta > \sin\tau_1\omega > 0 \qquad (0 \leqslant \omega \leqslant \omega_1 = \gamma_1^{-1}(\delta)\arccos\delta\gamma_1(\delta) < \pi / 2\,\tau_1) \tag{3.11}$$

т. е. выполняется второе условие (3.2). Так как

$$\sin\tau_1\omega > \frac{2\omega\tau_1}{\pi}\ (\omega \in [0, \omega_1]), \qquad \lambda \in [1, \lambda_1], \quad \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

то при

$$\rho_\delta(\omega)\,\rho_\delta^{-1}(0) > 1, \qquad \omega \in [0, \omega_1] \tag{3.12}$$

неравенство (3.7) заведомо справедливо. Обозначим

$$\rho_\delta(\omega)\,\rho_\delta^{-1}(0) = \Gamma_1(z)\, H_1^{-1}(z) = I_1(z), \qquad z = \omega^2 \tag{3.13}$$

Здесь $\Gamma_1(z)$ объединяет множители, соответствующие действительным нулям $Q(p)$, а $H_1^{-1}(z)$ — множители, соответствующие комплексным нулям $Q(p)$. Отбрасывая у многочлена с положительными коэффициентами $\Gamma_1(z)$ члены со степенями z выше первой, получаем

$$\Gamma_1(z) > \Gamma(z) = 1 + kz^*, \qquad k^* = \frac{1}{\delta^2} + \sum{}^* \frac{1}{(\alpha_j - \delta)^2} \tag{3.14}$$

В (3.14) в состав суммы входят слагаемые, соответствующие действительным нулям $L(p)$.

Каждый множитель $h_j(z)$ функции $H_1(z)$, соответствующий паре комплексно-сопряженных нулей $L(p)$ оценивается сверху функцией

$$b_j(z) = 1 + k_j^2 z \qquad (0 \leqslant z \leqslant z_j = (A_j^2 - 1) k_j^{-2})$$
$$b_j(z) = A_j^2 \ (z > z_j) \tag{3.15}$$

Если кривая $h_j(z)$ имеет максимум, то горизонтальный участок ломаной $b_j(z)$ касается $h_j(z)$ в точке ее максимума, наклонный участок касается $h_j(z)$ и имеет с ней еще одну общую точку $z = 0$. Если $h_j(z)$ монотонно убывает, то $b_j(z)$ параллельна оси абсцисс. Можно убедиться, что коэффициенты k_j, A_j убывают с уменьшением δ. Из (3.10) следует, что $\delta < \delta_1$ — наименьшего корня уравнения (1.18). Поэтому в выражениях для k_j и A_j положим $\delta = \delta_1$

$$k_j^2 = 0 \quad (0 \leqslant \mu_j \leqslant y_j) \qquad k_j^2 = 0.25 \ \alpha_j^{-2} y_j^{-2}, \quad (\mu_j \geqslant \sqrt{3} y_j)$$
$$k_j^2 = 2(\mu_j^2 - y_j^2)(\mu_j^2 + y_j^2)^{-2} \qquad (y_j < \mu_j < \sqrt{3} y_j)$$

Величины y_j, A_j определяются формулой (1.18). Заменив множители $h_j(z)$ их оценками сверху (3.15), получаем оценку сверху $H_2(z)$ для $H_1(z)$. Заменив в выражении для $H_2'(z)$ производные $b'(z)$ на их наибольшие значения k_j^2, получаем

$$H_1(z) < H(z), \quad H(z) = 1 + k_0 z \quad (z < z_0 = (W^2 - 1) k_0^{-1})$$
$$H(z) = W^2 \quad (z > z_0), \qquad k_0 = W^2 \prod_{j=1}^{n-1} \frac{k_j}{A_j} \tag{3.16}$$

Из формулы (3.13), учитывая (3.14), (3.16), имеем

$$I_1(z) > \Gamma(z) H^{-1}(z) = I(z) \geqslant (1 + k^* z) / W^2 \tag{3.17}$$

Выберем δ так, чтобы удовлетворялись неравенства

$$I'(z) \geqslant 0 \quad (z \geqslant 0), \qquad I(z_1) > \lambda_1^2, \quad z_1 = \omega_1^2 \tag{3.18}$$

Тогда

$$I(z) \geqslant \lambda_1^2 \ (z \geqslant z_1) \tag{3.19}$$

Можно проверить, что

$$k^* > k_0 \qquad (\delta < \delta_1) \tag{3.20}$$

Этого достаточно для выполнения первого неравенства (3.18), а следовательно, и (3.12). Из (3.16), (3.11) следует, что второе неравенство (3.18) справедливо, если

$$\gamma_1^{-1}(\delta)\ \arccos(\delta\gamma_1(\delta)) \geqslant (\lambda_1^2 W^2 - 1)^{1/2}\ (k^*)^{-1/2} \tag{3.21}$$

Так как выпуклы вверх функции

$$\gamma_1^{-1}(\delta) \qquad (0 \leqslant \delta \leqslant \delta_1), \qquad \arccos x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$
$$\delta_1\gamma_1(\delta_1) = 1, \quad k^* > \delta^{-2}$$

то неравенство (3.21) заведомо выполняется, если

$$0.5\ \pi\gamma_1^{-1}(0)\ (1 - \delta\,\delta_1^{-1}) \geqslant \delta\sqrt{\lambda_1^2 W^2 - 1} \tag{3.22}$$

Из (3.22) находим величину δ, определяемую формулой (1.17). Эта величина и есть оценка сверху степени устойчивости $N(p)$. Действительно, все условия (3.2) выполнены. Первое условие выполняется, так как оно эквивалентно (3.7), которое следует из (3.11), (3.12) (3.17), (3.18). Второе условие справедливо в силу (3.11). Третье условие следует из (3.17), (3.19).

Следствие к теореме 1.2 можно получить, если неравенство (3.9) заменить неравенством

$$\psi_\delta'(\omega) \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_j - \delta} \leqslant \frac{q}{a_0 - \delta} + \sum \frac{1}{\alpha_j - a_0}$$

Здесь q — число нулей $L(p)$, лежащих на прямой (1.11), сумма распространена на все остальные нули $L(p)$.

§ 4. Оценка максимальной ошибки в линейной системе с запаздыванием. Докажем теорему 1.3. Применим преобразование Лапласа к уравнению (1.7). Учитывая (1.1), (1.2), (1.6), (1.15)

$$\mathrm{E}(p) = G(p)\ \Phi(p), \quad G(p) = L(p)\ N^{-1}(p), \quad \mathrm{E}(p) \risingdotseq \varepsilon(t), \quad \Phi(p) \risingdotseq \varphi(t)$$

Так как в силу теоремы 1.2 степень устойчивости $N(p)$ превышает δ, то $G(p)$ — изображение, и соответствующий ему оригинал $g(t)$ имеет показатель роста меньший $-\delta$ (см. [10]). Из теоремы свертки и (1.11) следует

$$\varepsilon(t) = \int_0^t g(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau, \quad \varepsilon_{\max}(t) = m\int_0^t |g(\tau)|\,d\tau \tag{4.1}$$

Оценим $|g(t)|$, используя теорему обращения и выбирая в качестве прямой интегрирования $p = -\delta + i\omega$. Положим

$$G(p) = p^{-1} + A(p), \quad A(p) = -kN^{-1}(p)\ p^{-1}\ e^{-p\tau} \tag{4.2}$$

Тогда

$$g(t) = \lim_{c\to\infty} \int_{-\delta-ic}^{-\delta+ic} \frac{G(p)\,e^{pt}}{2\pi}\,dp = \frac{e^{-\delta t}}{\pi} \lim_{c\to\infty}\int_0^c A(-\delta + i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega \tag{4.3}$$

так как интеграл от первого слагаемого $G(p)$ равен нулю.

Оценим второй интеграл в формуле (4.3). Положим

$$z = \omega^2, \quad A_\delta(z) = |A(-\delta + i\omega)|, \quad \mu(z) = \varphi_\delta(\omega) + \omega\tau \tag{4.4}$$

Учитывая (3.6), (3.13)

$$A_\delta(z) = ((\delta^2 + z) R(z))^{-1/2}, \quad R(z) = \left(\frac{I_1(z)}{\lambda} - 1\right)^2 + \frac{4}{\lambda} I_1(z) \cos^2 \frac{\mu(z)}{2} \tag{4.5}$$

Используя (3.11) и неравенство

$$\sin\left(\sqrt{z}\,\frac{(\tau_1 - \tau)}{2}\right) > \frac{\sqrt{2}}{\pi}(\tau_1 - \tau)\sqrt{z} \qquad \left(0 \leqslant z \leqslant z_1 \leqslant \frac{\pi^2}{4(\tau_1 - \tau)^2}\right)$$

получаем

$$\cos^2(\mu(z)/2) > 2\pi^{-2}(\tau_1 - \tau)^2 z \quad (0 \leqslant z \leqslant z_1) \tag{4.6}$$

Дадим оценку снизу первому слагаемому $R(z)$ в (4.5). Можно проверить, что при любых $z > 0$

$$I_1'(z) \leqslant I_1(z)\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\delta^2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(\alpha_j - \delta)^2}\right] = I_1(z)\,C \tag{4.7}$$

Так как $1 < \lambda_2 < \lambda_1$, то, учитывая (3.17), (3.18)

$$1 \leqslant I_1(z) < \lambda_2 \quad (0 \leqslant z < z_2 < z_1), \qquad I_1(z_2) = \lambda_2 \tag{4.8}$$

Из (4.7), (4.8) и условия $\lambda > \lambda_2$ следует

$$I_1(z) \leqslant 1 + \lambda_2 C z \qquad (0 \leqslant z \leqslant z_2)$$
$$(1 - I_1(z)\lambda^{-1})^2 > (1 - \lambda_2^{-1} - Cz)^2$$
$$(0 \leqslant z \leqslant z_3 = (1 - \lambda_2^{-1})\ C^{-1} < z_2 < z_1) \tag{4.9}$$

На $[0, z_3]$ одновременно выполняются неравенства (4.6), (4.9). В силу (4.5) и условия $\lambda < \lambda_3$ на этом интервале

$$R(z) > (1 - \lambda_2^{-1} - Cz)^2 + 8\pi^{-2}\lambda_3^{-1}(\tau_1 - \tau)^2 z \equiv R_1(z) \equiv$$
$$\equiv (B - Cz)^2 + Dz \tag{4.10}$$

Обозначим через R_0^2 минимум $R_1(z)$ при $z \geqslant 0$. Нетрудно убедиться, что

$$R_0^2 = B^2\left(D_3 = \frac{2BC}{D} < 1\right), \quad R_0^2 = \frac{2B^2}{D_3} - \frac{B^2}{D_3^2}\,(D_3 > 1),$$
$$R(z) > \frac{BD}{C} > R_0^2 \qquad (z_3 \leqslant z \leqslant z_1) \tag{4.11}$$

Поэтому

$$R(z) \geqslant R_0^2 \qquad (z \in [0, z_1]) \tag{4.12}$$

Оценим теперь $A(z)$. Из (4.12), (3.17), (3.18) и неравенств

$$k^* > \delta^{-2}, \qquad \lambda \leqslant \lambda_3 < \lambda_1$$

следует

$$A > R_0^{-1}\,(\delta^2 + z)^{-1/2} \quad (0 \leqslant z \leqslant z_1), \qquad A > (\delta^2 + z)^{-1/2}((1 + k^* z)^{1/2} \times$$
$$\times (\lambda_3 W)^{-1} - 1)^{-1} > (\delta^2 + z)^{-1}\,(\delta^2 + z_1)^{1/2}\,((1 + k^* z_1)^{1/2}(\lambda_3 W)^{-1} - 1)^{-1}$$
$$(z_1 = \omega_1^2 < z = \omega^2 < \infty) \tag{4.13}$$

Заменим в (4.3) подынтегральное выражение его модулем и используем (4.13); получаем оценку сверху $|\,g(t)\,|$. Подставив ее в (4.1), получаем оценки (1.21), (1.22) для $\varepsilon_{\max}(t)$ и ε_∞.

Поступила 18 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами. Докл. АН СССР, 1946, т. 51, № 5.
2. Булгаков Б. В., Кузовков Н. Т. О накоплении возмущений в линейных системах с переменными параметрами. ПММ, 1950, т. 14, вып. 1.
3. Гноенский Л. С. О связи некоторых показателей качества в линейных стационарных управляемых системах. Докл. АН СССР, 1968, т. 181, № 1.
4. Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э. Математические основы теории управляемых систем. М., «Наука», 1969.
5. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука» 1964.
6. Бендриков Г. А., Конев Ф. Б. Применение метода траекторий корней для исследования линейных систем управления с «чистым» запаздыванием (свободный параметр — τ). Вест. МГУ. Сер. 3. Физ., астрон., 1968, № 3.
7. Цыпкин Я. З. О верхней границе степени устойчивости одноконтурных систем автоматического регулирования. Автомат. и телемехан., 1952, т. 13, № 4.
8. Гноенский Л. С., Каменский Г. А. О влиянии запаздывания в вычислительных устройствах на показатели качества управляемых систем. Тр. семинара по теории диф. уравнений с отклоняющимся аргументом, т. 7. М., Ун-т Дружбы народов им. Патриса Лумумбы, 1969.
9. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления, ч. 2. М.— Л., «Энергия», 1966.
10. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1961.