Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

АЛЬТЕРНАТИВА ДЛЯ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ СБЛИЖЕНИЯ

Н. Н. Красовский, А. И. Субботин

(Свердловск)

Предлагается новый класс обобщенных смешанных стратегий игроков в задаче о приведении конфликтно управляемого движения на заданное множество при фазовом ограничении. Он оказывается настолько широким, что содержит стратегии, доставляющие ситуации типа седловой точки в типичных дифференциальных играх. Материал статьи примыкает к вопросам, рассматривавшимся в работах [1–4]. В основе рассуждений лежит экстремальная конструкция, введенная в работах [5–7].

§ 1. Рассматривается конфликтно управляемое движение, описываемое уравнением

$$dx/dt = f(t, x, u, v), \quad x[t_0] = x_0 \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор системы, u и v — векторные управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно, $f(t, x, u, v)$ — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по x. Предполагается, что выбор игроками управляющих воздействий u и v стеснен ограничениями

$$u \in P, \qquad v \in Q \tag{1.2}$$

где P и Q — замкнутые и ограниченные множества в соответствующих векторных пространствах.

Ниже вводятся понятия смешанных стратегий игроков и определяются порожденные этими стратегиями движения системы (1.1). Предлагаемое определение стратегий отвечает следующему характеру информации, предоставляемой игрокам: в каждый текущий момент времени $t \geqslant t_0$ игрокам известна реализовавшаяся позиция игры $p[t] = \{t, x[t]\}$, но не известно управление, выбираемое партнером в данный и в последующие моменты времени.

Класс рассматриваемых смешанных стратегий оказывается достаточно полным в следующем смысле: какова бы ни была начальная позиция игры $p_0 = \{t_0, x_0\}$ и момент времени $\vartheta > t_0$, в классе смешанных стратегий либо существует стратегия первого игрока, которая гарантирует приведение движения (1.1) на некоторое заданное множество к моменту $t = \vartheta$ и при этом обеспечивает выполнение некоторого заданного фазового ограничения; либо существует стратегия второго игрока, которая обеспечивает на отрезке времени $[t_0, \vartheta]$ уклонение от попадания на заданное множество всех движений 1.1), не нарушающих заданного фазового ограничения. (Более точно альтернатива сформулирована в конце этого параграфа.) В §§ 2, 3 содержится описание так называемой экстремальной конструкции [5–7], при помощи которой доказана справедливость сформулированной в данном параграфе альтернативы.

Эта альтернатива позволяет строить оптимальные стратегии, определяющие ситуации типа седловой точки в дифференциальных играх. В частности, используя материал данной статьи, можно исследовать следующие типы игровых задач динамики:

1. Игровая задача наведения с фазовыми ограничениями. В этой задаче требуется построить оптимальную стратегию первого игрока, гарантирующую приведение движения (1.1) на заданное множество за наименьшее время и при этом обеспечивающей выполнение некоторого фазового ограничения.

2. Дифференциальная игра, в которой движение описывается уравнением (1.1), а плата задается равенством

$$\gamma = \varphi(\vartheta, x[\vartheta]) + \int_{t_0}^{\vartheta} \psi(t, x[t])\,dt$$

где $\varphi(t, x)$ и $\psi(t, x)$ — заданные непрерывные функции, а $\vartheta = \vartheta(x[\cdot])$ — момент времени, когда точка $p[t] = \{t, x[t]\}$ впервые попадает на некоторое заданное множество N.

3. Дифференциальная игра с платой, следующего вида:

$$\gamma = \max \varphi(t, x[t]) \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta(x[\cdot])$$

где, как и в предыдущем случае, $\varphi(t, x)$ — непрерывная функция, $\vartheta(x[\cdot])$ — момент попадания точки $p[t] = \{t, x[t]\}$ на заданное множество N.

Введем понятия смешанных стратегий игроков и определим отвечающие этим стратегиям движения системы (1.1). Пусть $U = U(t, x)$ — функция, определенная при $t \geqslant t_0$ и при всех x, которая позиции игры $p = \{t, x\}$ ставит в соответствие множество $U(t, x)$ регулярных борелевских мер $\mu(du)$ [8], нормированных на P, т. е. $\mu(P) = 1$.

В дальнейшем рассматриваются лишь такие меры $\mu(du)$, поэтому для краткости будем называть их просто мерами $\mu(du)$ на P.

Будем говорить, что определенная выше функция $U = U(t, x)$ задает смешанную стратегию первого игрока. Движения системы (1.1), порожденные этой стратегией, определим следующим образом.

Пусть Δ — некоторое покрытие полупрямой $[t_*, \infty)$ системой непересекающихся полуинтервалов

$$[\tau_i, \tau_{i+1}) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \tau_0 = t_*)$$

Аппроксимационным движением системы (1.1)

$$x_\Delta[t] = x_\Delta[t; t_*, x_* U, V_\tau]$$

порожденным смешанной стратегией первого игрока $U = U(t, x)$ в паре с тривиальной стратегией второго игрока V_τ и отвечающим покрытию Δ, назовем всякую абсолютно непрерывную вектор-функцию $x_\Delta[t]$, удовлетворяющую при почти всех $t \geqslant t_*$ следующим рекуррентным соотношениям:

$$\frac{dx_\Delta[t]}{dt} \in F(t, x_\Delta[t]; \mu(du; p[\tau_i])) \tag{1.3}$$

$$x_\Delta[t_*] = x_\Delta[\tau_0] = x_*, \quad \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

Здесь $x_\Delta[t_*] = x_*$ — начальное условие для движения

$$x_\Delta[t] = x_\Delta[t; t_*, x_*, U, V_\tau]$$

$F(t, x; \mu(du))$ — выпуклая оболочка множества всех векторов вида

$$f = \int f(t, x, u, v)\,\mu(du)$$

где $v \in Q$; $\mu(du; p[\tau_i])$ — некоторая мера на P, принадлежащая множеству $U(\tau_i, x_\Delta[\tau_i])$.

Введем теперь понятие обобщенного движения системы (1.1). Обозначим через $\sigma(\Delta)$ величину, заданную равенством

$$\sigma(\Delta) = \sup_i(\tau_{i+1} - \tau_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

где τ_i — граничные точки полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1})$ покрытия Δ. Абсолютно непрерывную вектор-функцию

$$x[t] = x[t; t_*, x_*, U, V_\tau]$$

назовем обобщенным движением системы (1.1), удовлетворяющим начальному условию $x[t_*] = x_*$ и порожденным смешанной стратегией первого игрока $U = U(t, x)$ в паре с тривиальной стратегией второго игрока V_τ, если существует некоторая последовательность движений

$$x_{\Delta_k}[t] = x_{\Delta_k}[t; t_*, x_k, U, V_\tau] \qquad (k = 1,2,\ldots)$$

такая, что равномерно на любом конечном отрезке $[t_*, t^*]$ имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} x_{\Delta_k}[t; t_*, x_k, U, V_\tau] = x[t; t_*, x_*, U, V_\tau]$$

причем выполняются следующие условия:

$$\lim \sigma(\Delta_k) = 0, \qquad \lim x_k = x_*, \qquad k \to \infty$$

В дальнейшем обобщенные движения для краткости будем называть просто движениями системы (1.1).

Отметим некоторые свойства множества движений

$$x[t] = x[t; t_*, x_*, U, V_\tau]$$

Заметим, что во-первых, это множество непусто, во-вторых, множество движений $x[t; t_*, x_*, U, V_\tau]$, рассматриваемое как совокупность вектор-функций $x = x[t]$, определенных на некотором конечном промежутке $[t_*, t^*]$, является компактным в себе ([9], стр. 222) и зависит от начального условия x_* полунепрерывно сверху относительно включения.

Последнее свойство означает выполнение следующего условия: если $x_i \to x_*$ при $i \to \infty$, а последовательность вектор-функций $x[t; t_*, x_i, U, V_\tau]$ равномерно на $[t_*, t^*]$ сходится к некоторой вектор-функции $x_*[t]$, то на отрезке $[t_*, t^*]$ вектор-функция $x_*[t]$ совпадает с некоторым из движений $x[t; t_*, x_*, U, V_\tau]$.

В частном случае, когда множество $U(t, x)$ состоит из единственного элемента — некоторой меры $\mu(du)$ и не зависит от позиции игры $p = \{t, x\}$, соответствующие движения будем обозначать символом $x[t] = x[t; t_*, x_*, \mu(du), V_\tau]$.

Заметим, что в этом случае множество движений $x[t; t_*, x_*, U, V_\tau]$ будет совпадать с множеством решений следующего дифференциального уравнения в контингенциях [10]:

$$\frac{dx[t]}{dt} \in F(t, x[t]; \mu(du)), \qquad x[t_*] = x_* \tag{1.5}$$

Аналогичным образом вводится понятие смешанной стратегии второго игрока, которая задается некоторой функцией $V \div V(t, x)$ (причем $V(t,x)$ — множества регулярных мер $\nu(dv)$, нормированных на Q) и определяются движения системы (1.1) $x[t] = x[t;\ t_*,\ x_*,\ U_\tau,\ V]$, отвечающие стратегии $V = V(t, x)$ и тривиальной стратегии первого игрока U_τ. Множество движений $x[t] = x[t;\ t_*,\ x_*,\ U_\tau,\ V]$ обладает при этом теми же свойствами, что и множество движений $x[t] = x[t;\ t_*,\ x_*,\ U,\ V_\tau]$.

Ниже также будут использоваться движения $x[t;\ t_*,\ x_*,\ U_\tau,\ V_\tau]$, отвечающие паре тривиальных стратегий игроков, и движения $x[t;\ t_*,\ x_*,\ U,\ V]$, порожденные парой произвольных смешанных стратегий $U = U(t, x)$, $V = V(t, x)$. При этом движением $x[t;\ t_*,\ x_*,\ U_\tau,\ V_\tau]$ называется всякая непрерывная вектор-функция $x[t]$, удовлетворяющая при почти всех $t \geqslant t_*$ включению $dx[t]\,/\,dt \in F(t, x[t])$, $x[t_*] = x_*$, $t \geqslant t_*$, здесь $F(t, x)$ — выпуклая оболочка множества всех векторов вида $f = f(t, x, u, v)$, где $u \in P$, $v \in Q$. Движение $x[t;\ t_*,\ x_*,\ U,\ V]$ определяется как и движение $x[t;\ t_*,\ x_*,\ U,\ V_\tau]$ предельным переходом от $x_\Delta[t]$. Только теперь соотношение (1.3) для $x_\Delta[t]$ заменяется следующим равенством:

$$\frac{dx_\Delta[t]}{dt} = \iint f(t, x_\Delta[t], u, v)\, \mu(du;\ p[\tau_i])\, \nu(dv;\ p[\tau_i])$$

$$x_\Delta[t_*] = x_*, \qquad \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

где

$$\mu(du;\ p[\tau_i]) \in U(\tau_i,\ x_\Delta[\tau_i]),\quad \nu(dv;\ p[\tau_i]) \in V(\tau_i,\ x_\Delta[\tau_i])$$

Таковы формальные определения стратегий игроков и отвечающих этим стратегиям движений системы (1.1).

Поясним кратко смысл введенных понятий. Рассмотрим, например, определение движения $x[t;\ t_*\ x_*,\ U,\ V]$, которое выше было введено как предел некоторой последовательности аппроксимационных движений $x_{\Delta_k}[t] = x_{\Delta_k}[t;\ t_*,\ x_k,\ U,\ V]$, отвечающих кусочно-постоянным мерам $\mu(du;\ p[\tau_i]) \in U(\tau_i,\ x_{\Delta_k}[\tau_i])$ и $\nu(dv;\ p[\tau_i]) \in V(\tau_i, x_{\Delta_k}[\tau_i])$ при $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$. Заметим теперь, что смешивание управлений u и v заданное на промежутке $[\tau_i,\ \tau_{i+1})$ соответственно мерами $\mu(du;\ p[\tau_i])$ и $\nu(dv;\ p[\tau_i])$ можно осуществить приближенно путем смешивания во времени управлений u и v, которые следует определить равенствами

$$u[t] = u^{(j)} \quad \text{при } t \in [\tau_i^{(j)},\ \tau_i^{(j+1)}),\ j = 1, \ldots, m^{(i)}$$

$$v[t] = v^{(s)} \text{ при } t \in [\tau_i^{(s)},\ \tau_i^{(s+1)}),\ s = 1, \ldots, l^{(i)}$$

Здесь значения векторов $u^{(j)}$ и $v^{(s)}$, а также система непересекающихся полуинтервалов $[\tau_i^{(j)},\ \tau_i^{(j+1)})$ и $[\tau_i^{(s)},\ \tau_i^{(s+1)})$, покрывающих промежуток $[\tau_i,\ \tau_{i+1})$, определяются соответственно мерами $\mu(du;\ p[\tau_i])$ и $\nu(dv;\ p[\tau_i])$.

Таким образом, движение $x[t;\ t_*, x_*,\ U,\ V]$ можно содержательно определить, как предел некоторых движений системы (1.1), осуществляемых определенным образом смешанными во времени управлениями первого и второго игроков. При этом следует предполагать, что второй (первый) игрок не знает, как конкретно выбираются полуинтервалы $[\tau_i^{(j)}, \tau_i^{(j+1)})$ $[\tau_i^{(s)}, \tau_i^{(s+1)})$, хотя стратегия смешивания U (стратегия V) (соотношение мер полуинтервалов $[\tau_i^{(j)}, \tau_i^{(j+1)})$ $([\tau_i^{(s)}, \tau_i^{(s+1)}))$ и значения $u^{(j)}$ $(v^{(s)})$, отвечающие мере μ $(du;$ $p[\tau_i]) \in U$ $(\tau_i,\ x_{\Delta_k}[\tau_i])$ $(\nu$ $(dv;$ p $[\tau_i])\in V$ $(\tau_i,\ x_{\Delta_k}$ $[\tau_i])$, могут быть ему даже известны.

Таким образом, смешивания управлений u и v должны быть независимыми (по сути дела в том же смысле, как это понимается в тех известных игровых ситуациях, которые трактуются на основе понятий теории вероятностей). Эти предположения отвечают описанному выше характеру информации, предоставляемой игрокам: каждый из игроков не знает реализаций u $[t]$ или v $[t]$ управлений, выбираемых партнером в данный момент времени (и в будущем), ему известна лишь реализовавшаяся позиция p $[t] = \{t,\ x\ [t]\}$.

Отметим еще следующее обстоятельство. Множество движений x $[t;\ t_*,\ x_*,\ U,\ V_\tau]$ включает в себя всякое удовлетворяющее условию x $[t_*] = x_*$ движение системы (1.1), которое может реализоваться при выбранной первым игроком стратегии $U = U$ $(t,\ x)$ в паре с любой стратегией второго игрока. Поэтому выполнение некоторого условия для всех движений x $[t;\ t_*,\ x_*,\ U,\ V_\tau]$ будет означать, что стратегия $U = U$ $(t$ $x)$ гарантирует выполнение этого условия при любом допустимом поведении партнера. Аналогичное замечание можно сделать относительно движений x $[t;\ t_*,\ x_*,\ U_\tau,\ V]$.

Обратимся к формулировке упоминавшейся выше альтернативы. Введем некоторые обозначения. Пусть x $[t]$ — некоторое движение системы (1.1), G — некоторое замкнутое множество в пространстве векторов $p = \{t,\ x\}$. Символом $\vartheta\,(x\ [\cdot];\ G)$ будем обозначать момент времени, когда точка p $[t] = \{t,\ x\ [t]\}$ впервые попадает на множество G, если условие p $[t] \in G$ не осуществляется ни при каких $t \geqslant t_0$, то полагаем ϑ $(x\ [\cdot];$ $G) = \infty$.

Через ρ $(\{t,\ x\},\ G)$ в дальнейшем обозначается евклидово расстояние от точки $p = \{t,\ x\}$ до множества G. Момент времени, когда для некоторого движения x $[t]$ впервые выполняется неравенство ρ $(\{t,\ x\ [t]\},\ G) \geqslant \varepsilon$ обозначается через τ^ε $(x\ [\cdot];\ G)$. Замкнутую ε-окрестность множества G будем изображать символом G^ε, таким образом, $G^\varepsilon = \{p = g + q : g \in G,\ \|q\| \leqslant \varepsilon\}$.

Здесь и в дальнейшем $\|q\|$ — евклидова норма вектора q.

Основной результат статьи составляет следующее утверждение.

Альтернатива. Пусть $p_0 = \{t_0,\ x_0\}$ — начальная позиция игры, M и D — некоторые замкнутые множества в пространстве векторов $p = \{t,\ x\}$, $\vartheta \geqslant t_0$ — некоторое конечное число. Тогда справедливо одно из следующих двух утверждений:

либо существует смешанная стратегия первого игрока $U = U$ $(t,\ x)$ такая, что для любого движения

$$x\ [t] = x\ [t;\quad t_0,\ x_0,\ U,\ V_\tau]$$

выполняются соотношения

$$\vartheta\ (x\ [\cdot];\ \ M) \leqslant \vartheta, \qquad \{t,\ x\ [t]\} \in D \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\ (x\ [\cdot];\ M)$$

т. е. для движения x $[t] = x$ $[t;\ t_0,\ x_0,\ U,\ V_\tau]$ условие $\{t,\ x\ [t]\} \in M$ осуществится не позже, чем в момент ϑ и при этом в процессе движения точки p $[t] = \{t,\ x\ [t]\}$ из $p_0 = \{t_0,\ x_0\}$ на множество M выполняется фазовое ограничение $\{t,\ x\ [t]\} \in D$;

либо существует смешанная стратегия второго игрока $V = V$ $(t,\ x)$ и положительное число $\varepsilon > 0$ такие, что для любого движения x $[t] =$

$= x[t;\ t_0,\ x_0,\ U_\tau,\ V]$ выполняется условие

$$\rho(\{t,\ x[t]\},\ M) > \varepsilon \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant \min\ \{\vartheta,\ \tau^\varepsilon(x[\cdot];\ D)\}$$

т. е. не существует движений $x[t] = x[t;\ t_0,\ x_0,\ U_\tau,\ V]$, которые удовлетворяют условию $\{t,\ x[t]\} \in D^\varepsilon$ и попадают на M^ε не позже, чем в момент ϑ.

§ 2. В основе подхода, используемого при исследовании рассматриваемых в данной работе вопросов, будет лежать экстремальная конструкция, введенная в работах [5–7]. Определим основные элементы этой конструкции.

Определение 2.1. Пусть каждому значению t из некоторого промежутка $[t_0,\ \eta]$ в фазовом пространстве $\{x\}$ поставлено в соответствие непустое замкнутое множество $W(t)$. Систему множеств $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \eta)$ будем называть u-стабильной относительно M, если каковы бы ни были $t_* \in [t_0,\ \eta)$, $x_* \in W(t_*)$ и $\delta \in (0,\ \eta - t_*]$, для любой меры $\nu\ (dv)$ найдется движение $x[t] = x[t;\ t_*,\ x_*,\ U_\tau,\ \nu(dv)]$, удовлетворяющее либо условию $x[t_* + \delta] \in W(t_* + \delta)$, либо условию $\{\tau,\ x[\tau]\} \in M$ при некотором $\tau \in [t_*,\ t_* + \delta]$.

Определение 2.2. Пусть в пространстве векторов $p = \{t,\ x\}$ задано некоторое замкнутое множество G и пусть задана система непустых замкнутых множеств $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \eta)$, которую будем называть v-стабильной относительно G, если, каковы бы ни были $t_* \in [t_0,\ \eta)$, $x_* \in W(t_*)$ и $\delta \in (0,\ \eta - t_*]$, для любой меры $\mu\ (du)$ найдется движение $x[t] = x[t;\ t_*,\ x_*,\ \mu(du),\ V_\tau]$, удовлетворяющее либо включению $x[t_* + \delta] \in W(t_* + \delta)$, либо условию $\{\tau,\ x[\tau]\} \in G$ при некотором $\tau \in [t_*,\ t_* + \delta]$.

Пусть в пространстве $\{x\}$ задана некоторая система замкнутых множеств $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, которые, вообще говоря, могут быть пустыми при некоторых $t \in [t_0,\ \vartheta]$. Введем понятие экстремальной к этой системе множеств смешанной стратегии первого игрока $U^{(e)} = U^{(e)}(t,\ x)$. Обозначим через $\psi^*(t,\ x,\ s)$ величину, определяемую равенством

$$\psi^*(t,\ x,\ s) = \min_{\nu(dv)} \max_{\mu(du)} \iint s' f(t,\ x,\ u,\ v)\, \mu(du)\, \nu(dv) =$$
$$= \max_{\mu(du)} \min_{\nu(dv)} \iint s' f(t,\ x,\ u,\ v)\, \mu(du)\, \nu(dv) \tag{2.1}$$

где s — некоторый n-мерный вектор, штрих означает транспонирование, максимум и минимум вычисляются по всевозможным регулярным борелевским мерам $\mu\ (du)$ и $\nu\ (dv)$, нормированным на P и Q соответственно. Справедливость равенства (2.1) доказана, например, в работе ([11], стр. 95). Предположим сначала, что в рассматриваемой точке $t \in [t_0,\ \vartheta]$ множество $W(t)$ непусто. Обозначим через $S(t,\ x)$ множество всех векторов вида $s^\circ = w^\circ(x) - x$, где $w^\circ(x)$ — ближайшие к x точки множества $W(t)$. (Если $x \in W(t)$, то $S(t,\ x)$ состоит очевидно из единственного нулевого вектора.) Множество $U^{(e)}$ $(t,\ x)$ в случае, когда $W(t)$ непусто, определим как совокупность всех мер $\mu^\circ(du)$, удовлетворяющих хотя бы при одном векторе s° из $S(t,\ x)$ следующему условию:

$$\min_{\nu(dv)} \iint s^{\circ\prime} f(t,\ x,\ u,\ v)\, \mu^\circ(du)\, \nu(dv) = \psi^*(t,\ x,\ s^\circ) \tag{2.2}$$

Заметим, что существование таких мер вытекает из равенства (2.1). Если же при некотором значении $t \in [t_0, \vartheta]$ множество $W(t)$ пусто, то в этом случае будем полагать, что при любом x множество $U^{(e)}(t, x)$ составляют всевозможные регулярные борелевские меры $\mu(du)$, нормированные на P.

Итак, функция $U^{(e)} = U^{(e)}(t, x)$ определена при всех x и при $t \in [t_0, \vartheta]$. Отметим, что функция $U^{(e)} = U^{(e)}(t, x)$ удовлетворяет условию слабой полунепрерывности по x.

Смешанную стратегию первого игрока, которая задается функцией $U^{(e)} = U^{(e)}(t, x)$, будем называть экстремальной к системе множеств $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$.

Аналогично определяется экстремальная к некоторой системе замкнутых множеств $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ смешанная стратегия второго игрока $V^{(e)} = V^{(e)}(t, x)$. Множество $V^{(e)}(t, x)$ в случае, когда $W(t)$ непусто, составляют меры $\nu^\circ(dv)$, удовлетворяющие условию

$$\min_{\mu(du)} \int\int s^{\circ\prime} f(t, x, u, v)\, \mu(du)\, \nu^\circ(dv) = \psi_*(t, x, s^\circ) \tag{2.3}$$

которое должно выполняться, хотя бы при одном векторе s° из $S(t, x)$. Здесь величина $\psi_*(t, x, s)$ задается равенством

$$\psi_*(t, x, s) = \max_{\nu(dv)} \min_{\mu(du)} \int\int s' f(t, x, u, v)\, \mu(du)\, \nu(dv) =$$
$$= \min_{\mu(du)} \max_{\nu(dv)} \int\int s' f(t, x, u, v)\, \mu(du)\, \nu(dv) \tag{2.4}$$

где, как и выше, $\mu(du)$ и $\nu(dv)$ — всевозможные регулярные борелевские меры, нормированные на P и Q соответственно.

Справедливы следующие два утверждения.

Лемма 2.1. Если $x_0 \in W(t_0)$ и система непустых замкнутых множеств $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \eta)$ является u-стабильной относительно M, тогда экстремальная к системе множеств $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \eta)$ смешанная стратегия первого игрока $U^{(e)} = U^{(e)}(t, x)$ для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U^{(e)}, V_\tau]$ обеспечивает выполнение условия

$$x[t] \in W(t) \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant \min\{\eta, \vartheta(x[\cdot]; M)\} \tag{2.5}$$

Лемма 2.2. Если система непустых замкнутых множеств $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \eta)$ является v-стабильной относительно G и $x_0 \in W(t_0)$, тогда экстремальная к системе множеств $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \eta)$ смешанная стратегия второго игрока $V^{(e)} = V^{(e)}(t, x)$ для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_\tau, V^{(e)}]$ обеспечивает выполнение условия

$$x[t] \in W(t) \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant \min\{\eta, \vartheta(x[\cdot]; G)\}$$

Доказательство леммы 2.1. Пусть $x[t] = x[t; t_*, x_*, U^{(e)}, V_\tau]$ — произвольное движение, отвечающее стратегиям $U^{(e)}$ и V_τ. Покажем, что для этого движения выполняется условие (2.5). Обозначим через $x_{\Delta_k}[t]$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \eta)$ последовательность аппроксимационных движений, пределом которой является рассматриваемое обобщенное движение, т. е.

$$x_{\Delta_k}[t] = x_{\Delta_k}[t;\ t_0,\ x_k,\ U^{(e)},\ V_\tau]\quad (t_0 \leqslant t \leqslant \eta)$$

причем

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(\Delta_k) = 0,\quad \lim_{k\to\infty} x_k = x_0,\quad \lim_{k\to\infty}\bigl(\max_{t_0\leqslant t\leqslant \eta} \|x[t] - x_{\Delta_k}[t]\|\bigr) = 0 \tag{2.6}$$

Нетрудно показать, что выполнение условия (2.5) для рассматриваемого движения $x[t]$ будет доказано, если будет установлена справедливость следующего утверждения: для любого сколь угодно малого $\alpha > 0$ можно указать такой номер K, что для всех $k \geqslant K$ для движений $x_{\Delta_k}[t]$ выполняется такое соотношение

$$x_{\Delta_k}[t] \in W^\alpha(t)\ \ \text{при}\ t_0 \leqslant t \leqslant \min\{\eta,\ \vartheta(x_{\Delta_k}[\cdot];\ M^\alpha)\} \tag{2.7}$$

Следовательно доказательство леммы 2.1 сводится к доказательству сформулированного выше утверждения. Введем в рассмотрение величину $\varepsilon_k[t] = \rho(x_{\Delta_k}[t],\ W(t))$, напомним, что $\rho(x,\ W)$ — расстояние от точки x до множества W. Покажем, что величина $\varepsilon_k[t]$ при достаточно больших k не превосходит любого наперед указанного числа $\alpha > 0$ при всех $t \in [t_0,\ \min\{\eta,\ \vartheta(x_{\Delta_k}[\cdot];\ M^\alpha)\}$, т. е. выполняется условие (2.7). Итак, оценим изменение величины $\varepsilon_k[t]$ при $\tau_i^{(k)} \leqslant t < \tau_{i+1}^{(k)}$, $\tau_i^{(k)} < \eta$, здесь $[\tau_i^{(k)},\ \tau_{i+1}^{(k)})$ — полуинтервалы покрытия Δ_k. Движение $x_{\Delta_k}[t]$ при $t \in [\tau_i^{(k)},\ \tau_{i+1}^{(k)})$ определяется уравнением

$$\frac{dx_{\Delta_k}[t]}{dt} = f^{(e)}[t],\qquad f^{(e)}[t] \in F(t, x_{\Delta_k}[t];\ \mu^\circ(du;\ p[\tau_i^{(k)}]))$$

$$\mu^\circ(du;\ p[\tau_i^{(k)}]) \in U^{(e)}(\tau_i^{(k)},\ x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}])$$

т. е. мера $\mu^\circ(du;\ p[\tau_i^{(k)}])$ удовлетворяет условию (2.2), в котором вектор s° задается равенством

$$s^\circ = s^\circ[\tau_i^{(k)}] = w^\circ - x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}] \tag{2.8}$$

где w° — некоторая точка из совокупности ближайших к $x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}]$ точек множества $W(\tau_i^{(k)})$. Предположим, что выполняется неравенство

$$\varepsilon_k[\tau_i^{(k)}] = \|w^\circ - x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}]\| = \|s^\circ[\tau_i^{(k)}]\| > 0 \tag{2.9}$$

Пусть $\nu_0(dv)$ — мера на Q, которая доставляет минимум в (2.2) при $t = \tau_i^{(k)}$, $x = x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}]$, $s^\circ = s^\circ[\tau_i^{(k)}]$, т. е.

$$\iint s^{\circ\prime}[\tau_i^{(k)}]\, f(\tau_i^{(k)}, x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}], u, v)\,\mu^\circ(du;\ p[\tau_i^{(k)}])\,\nu_0(dv) = \psi^*(\tau_i^{(k)},\ x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}],\ s^\circ[\tau_i^{(k)}]) \geqslant$$

$$\geqslant \iint s^{\circ\prime}[\tau_i^{(k)}]\, f(\tau_i^{(k)},\ x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}], u, v)\,\mu(du)\,\nu_0(dv) \tag{2.10}$$

Воспользуемся условием u-стабильности системы множеств $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \eta)$ причем сначала будем предполагать, что для любого из движений $x[t] = x[t;\ \tau_i^{(k)},\ w^\circ,\ U_\tau,\ \nu_0(dv)]$ точка $p[t] = \{t,\ x[t]\}$ не попадает на множество M при $t \in [\tau_i^{(k)},\ \tau_{i+1}^{(k)}]$. Тогда существует движение $x_*[t] = x[t;\ \tau_i^{(k)},\ w^\circ,\ U_\tau,\ \nu_0(dv)]$ такое, что

$$x_*[\tau_{i+1}^{(k)}] \in W(\tau_{i+1}^{(k)}) \tag{2.11}$$

Это движение описывается уравнением

$$\frac{dx_*[t]}{dt} = f_*[t],\quad x_*[\tau_i^{(k)}] = w^\circ,\quad f_*[t] = F(t,\ x_*[t];\ \nu_0(dv))$$

Из (2.11) вытекает неравенство

$$\varepsilon_k[\tau_{i+1}^{(k)}] = \rho(x_{\Delta_k}[\tau_{i+1}^{(k)}],\quad W(\tau_{i+1}^{(k)}) \leqslant \|x_{\Delta_k}[\tau_{i+1}^{(k)}] - x_*[\tau_{i+1}^{(k)}]\| \tag{2.12}$$

Оценим теперь расстояние между точками $x_{\Delta_k}[\tau_{i+1}^{(k)}]$ и $x_*[\tau_{i+1}^{(k)}]$. Для этого воспользуемся следующими соотношениями, которые являются следствием выполнения условия Липшица по x для правой части уравнения (1.1):

$$\begin{aligned} &F(t,\ x+\Delta x;\ \mu(du)) \in F^{\beta}(t,\ x;\ \mu(du)) \\ &F(t,\ x+\Delta x;\ \nu(dv)) \in F^{\beta}(t,\ x,\ \nu(dv)) \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} &\beta = \lambda \|\Delta x\| \\ &(\lambda = \mathrm{const} > 0) \end{aligned}\right) \tag{2.13}$$

где F^{β} — β — окрестность множества F; соотношения (2.13) справедливы для любых мер $\mu(du)$ и $\nu(dv)$ и при всех t и x.

Используя соотношения (2.13) и учитывая, что множества $F(t,\ x;\ \mu(du))$ и $F(t,\ x;\ \nu(dv))$ выпуклы и зависят от переменной t непрерывно, получим следующие выражения:

$$\begin{gathered} x_{\Delta_k}[\tau_{i+1}^{(k)}] = x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}] + f^{(e)}\delta_i^{(k)} + o(\delta_i^{(k)}) \\ x_*[\tau_{i+1}^{(k)}] = w^\circ + f_*\delta_i^{(k)} + o(\delta_i^{(k)}) \end{gathered} \tag{2.14}$$

где

$$\begin{gathered} \delta_i^{(k)} = \tau_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)},\ f^{(e)} \in F(\tau_i^{(k)},\ x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}];\ \mu^\circ(du;\ p[\tau_i^{(k)}])) \\ f_* \in F(\tau_i^{(k)},\ w^\bullet;\ \nu_0(dv)) \end{gathered} \tag{2.15}$$

Символом $o(\delta)$ обозначена величина высшего порядка малости относительно δ. Из равенств (2.14) в силу (2.8), (2.9), (2.12) вытекает оценка

$$\varepsilon_k^2[\tau_{i+1}^{(k)}] \leqslant \|x_{\Delta_k}[\tau_{i+1}^{(k)}] - x_*[\tau_{i+1}^{(k)}]\|^2 = \|s^\circ[\tau_i^{(k)}]\|^2 + 2\delta_i^{(k)}s^{\circ\prime}[\tau_i^{(k)}](f_* - f^{(e)}) + o(\delta_i^{(k)}) \tag{2.16}$$

Остается оценить скалярное произведение $s^{\circ\prime}[\tau_i^{(k)}](f_* - f^{(e)})$. В силу (2.13) и (2.15) можно утверждать, что существует вектор $f^* \in F(\tau_i^{(k)},\ x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}];\ \nu_0(dv))$, удовлетворяющий неравенству $\|f_* - f^*\| \leqslant \lambda\|w^\circ - x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}]\| = \lambda\|s^\circ[\tau_i^{(k)}]\|$. Поэтому справедливо соотношение

$$s^{\circ\prime}[\tau_i^{(k)}]f_* \leqslant s^{\circ\prime}[\tau_i^{(k)}]f^* + \lambda\|s^\circ[\tau_i^{(k)}]\|^2 \tag{2.17}$$

Заметим теперь, что для любого вектора $f \in F(t,\ x;\ \mu(du))$ ($f \in F(t;\ x;\ \nu(dv))$) можно указать меру $\nu(dv)$ ($\mu(du)$) такую, чтобы имело место равенство

$$f = \iint f(t,\ x,\ u,\ v)\,\mu(du)\,\nu(dv)$$

Учитывая это обстоятельство, скалярные произведения $s^{\circ\prime}[\tau_i^{(k)}]f^{(e)}$ и $s^{\circ\prime}[\tau_i^{(k)}]f^*$ можно представить в виде

$$\begin{gathered} s^{\circ\prime}[\tau_i^{(k)}]f^{(e)} = \iint s^{\circ\prime}[\tau_i^{(k)}]f(\tau_i^{(k)},\ x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}],\ u,\ v)\,\mu^\circ(du;\ p[\tau_i^{(k)}])\,\nu_*(dv) \\ s^{\circ\prime}[\tau_i^{(k)}]f^* = \iint s^{\circ\prime}[\tau_i^{(k)}]f(\tau_i^{(k)},\ x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}],\ u,\ v)\,\mu_*(du)\,\nu_0(dv), \end{gathered}$$

где $\mu_*(du)$ и $\nu_*(dv)$ — некоторые меры на P и Q соответственно. Поскольку мера $\mu^\circ(du;\ p[\tau_i^{(k)}])$ принадлежит множеству $U^{(e)}(\tau_i^{(k)},\ x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}])$, т. е. удовлетворяет условию (2.2), а мера $\nu_0(dv)$ задается условием (2.10), то справедливы неравенства

$$\begin{gathered} s^{\circ\prime}[\tau_i^{(k)}]f^{(e)} \geqslant \psi^*(\tau_i^{(k)},\ x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}],\ s^\circ[\tau_i^{(k)}]) \\ s^{\circ\prime}[\tau_i^{(k)}]f^* \leqslant \psi^*(\tau_i^{(k)},\ x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}],\ s^\circ[\tau_i^{(k)}]) \end{gathered}$$

из которых в силу (2.17) вытекает следующая оценка

$$s^{\circ\prime}[\tau_i^{(k)}](f_* - f^{(e)}) \leqslant \lambda\|s^\circ[\tau_i^{(k)}]\|^2 = \lambda\varepsilon_k^2[\tau_i^{(k)}] \tag{2.18}$$

Подставляя (2.18) в (2.16), получим неравенство

$$\varepsilon_k^2[\tau_{i+1}^{(k)}] \leqslant \varepsilon_k^2[\tau_i^{(k)}](1 + 2\delta_i^{(k)}\lambda) + o(\delta_i^{(k)})$$

Из приведенных выше выкладок видно, что $o(\delta_i^{(k)}) / \delta_i^{(k)}$, зависящая, вообще говоря, от позиции игры $p[\tau_i^{(k)}] = \{\tau_i^{(k)}, x_{\Delta_k}[\tau_i^{(k)}]\}$ стремится к нулю при $\delta_i^{(k)} \to 0$ равномерно по $p \in \Gamma$, где Γ — произвольная ограниченная область.

Кроме того, полученная оценка остается справедливой при замене $\tau_{i+1}^{(k)}$ на любое число t из промежутка $[\tau_i^{(k)}, \tau_{i+1}^{(k)}]$. Итак, имеем неравенство

$$\varepsilon_k^2[t] \leqslant \varepsilon_k^2[\tau_i^{(k)}](1 + 2\delta_i^{(k)}\lambda) + o(\delta_i^{(k)}) \text{ при } t \in [\tau_i^{(k)}, \tau_{i+1}^{(k)}] \tag{2.19}$$

Напомним, что неравенство (2.19) получено в предположении, что для любого из движений $x[t] = x[t;\ \tau_i^{(k)},\ w^\circ,\ U_\tau,\ \nu_0(dv)]$ выполняется условие $\{t,\ x[t]\} \notin M$ при $t \in [\tau_i^{(k)},\ \tau_{i+1}^{(k)}]$.

Возможны два случая:

либо для рассматриваемого аппроксимационного движения $x_{\Delta_k}[t]$ это предположение выполняется для любого промежутка $[\tau_i^{(k)},\ \tau_{i+1}^{(k)})$, $\tau_i^{(k)} < \eta$,

либо существует промежуток $[\tau_j^{(k)}, \tau_{j+1}^{(k)}), \tau_j^{(k)} < \eta$, когда впервые это предположение не выполняется, но тогда нетрудно показать, что для некоторого $t_* \in [\tau_j^{(k)},\ \tau_{j+1}^{(k)})$ $(t_* \leqslant \eta)$ выполняется следующее соотношение

$$\rho(\{t_*, x_{\Delta_k}[t_*]\}, M) \leqslant \varepsilon_k[\tau_j^{(k)}] + \omega(\delta_j^{(k)}) \tag{2.20}$$

$$\omega(\delta) \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0$$

При этом при всех $i = 0, 1, \ldots, j - 1$ имеет место оценка (2.19).

Пусть выбрано произвольное число $\alpha > 0$, используя оценку (2.19) и учитывая равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k[t_0] = 0$, которое в силу (2.6) вытекает из условия $x_0 \in W(t_0)$, можно доказать существование такого числа $K > 0$, что при всех $k \geqslant K$ будет иметь место неравенство

$$\varepsilon_k[t] \leqslant {}^1/_2\alpha \qquad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant \min\{\eta, \tau_j^{(k)}\} \tag{2.21}$$

$$\omega(\delta_j^{(k)}) \leqslant \omega(\sigma(\Delta_k)) \leqslant {}^1/_2\alpha$$

Следовательно, по определению величины $\varepsilon_k[t]$ и в силу (2.20) выполняется условие (2.7). Таким образом, утверждение, сформулированное на стр. 1012, справедливо. Лемма 2.1 доказана.

Доказательство леммы 2.2 проводится по тому же плану, что и доказательство леммы 2.1.

§ 3. Обратимся теперь к определению максимальной в некотором смысле системы множеств $W(t)$, обладающей свойством u-стабильности относительно M. Рассмотрение этой системы множеств позволит установить справедливость альтернативы, сформулированной в § 1.

Обозначим через $\varkappa(x[\cdot];\tau,\vartheta)$ определенный на непрерывных вектор-функциях $x[t]$ $(\tau \leqslant t \leqslant \vartheta)$ функционал, который задается равенством

$$\varkappa(x[\cdot];\ \tau, \vartheta) = \min\nolimits_t \rho(\{t, x[t]\}, M) + \max\nolimits_t \rho(\{t, x\}, D) \tag{3.1}$$

Здесь минимум и максимум вычисляются соответственно при $\tau \leqslant t \leqslant \vartheta$ и $\tau \leqslant t \leqslant \min\{\vartheta, \vartheta(x[\cdot];\ M)\}$.

Заметим, что функционал $\varkappa(x[\cdot];\ \tau, \vartheta]$ является полунепрерывным снизу, т. е. для любой непрерывной вектор-функции $x_*[t]$ $(\tau \leqslant t \leqslant \vartheta)$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любой вектор-функции $x[t]$ $(\tau \leqslant t \leqslant \vartheta)$, удовлетворяющей условию

$$\max\nolimits_t \|x[t] - x_*[t]\| \leqslant \delta \qquad (\tau \leqslant t \leqslant \vartheta)$$

будет выполняться неравенство

$$\varkappa\,(x\,[\cdot];\,\tau,\,\vartheta) \geqslant \varkappa\,(x_*\,[\cdot];\,\tau,\,\vartheta) - \varepsilon$$

Определение 3.1. Будем говорить, что из позиции $p_* = \{t_*,\ w_*\}$ множество M поглощается позиционно в D к моменту ϑ, если для любой смешанной стратегии второго игрока $V = V\,(t,\ x)$ можно указать движение $x\,[t] = x\,[t;\ t_*,\ w_*,\ U_\tau,\ V]$ такое, что

$$\varkappa\,(x\,[\cdot];\ t_*,\,\vartheta) = 0 \tag{3.2}$$

т. е. $\vartheta\,(x\,[\cdot];\ M) \leqslant \vartheta$ и при всех $t \in [t_*,\,\vartheta\,(x\,[\cdot];\ M)]$ выполняется включение $\{t,\ x\,[t]\} \in D$.

Обозначим через $W\ (t,\ \vartheta)$ множество всех точек w таких, что из позиции $p = \{t,\ w\}$ множество M поглощается позиционно в D к моменту времени ϑ.

Рассмотрим некоторые свойства множеств $W\,(t,\ \vartheta)$. Предварительно докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.1. Пусть $p_* = \{t_*,\ w_*\}$ — некоторая позиция игры, причем $t_* \leqslant \vartheta$, $\{t_*,\ w_*\} \in D$. Если существует мера $\nu_*\,(dv)$ на Q и момент времени $t^* \in [t_*,\,\vartheta]$ такие, что любое из движений $x\,[t] = x\,[t;\ t_*,\ w_*,\ U_\tau,\ \nu_*\ (dv)]$ удовлетворяет условиям

$$\rho\ (\{t,\ x[t]\};\ M) > 0 \quad \text{при } t \in [t_*,\ t^*] \tag{3.3}$$

$$x\,[t^*] \notin W\,(t^*,\vartheta) \tag{3.4}$$

тогда точка w_* не принадлежит множеству $W\,(t_*,\ \vartheta)$.

Доказательство. Из определения множества $W\,(t,\ \vartheta)$ видно, что справедливость леммы 3.1 будет установлена, если будет доказано существование такой смешанной стратегии второго игрока $V_* = V_*\,(t,\ x)$, что для любого движения $x\,[t] = x\,[t;\ t_*,\ w_*,\ U_\tau,\ V_*]$ будет выполняться неравенство

$$\varkappa\,(x\,[\cdot];\ t_*,\ \vartheta) > 0 \tag{3.5}$$

Доказательство существования этой смешанной стратегии V_* проведем по следующему плану. Сначала предположим, что существует некоторая система множеств $W_*\,(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, обладающая перечисленными ниже свойствами. Затем покажем, что в этом случае экстремальная к такой системе множеств смешанная стратегия второго игрока обеспечивает выполнение неравенства (3.5). И, наконец, покажем, что при выполнении условий леммы 3.1 система множеств $W_*\,(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, обладающая нужными свойствами, существует.

Итак, предположим, что существует система множеств $W_*\,(t)$, обладающая следующими свойствами.

1°. Множества $W_*\,(t)$ непусты и замкнуты при $t_* \leqslant t \leqslant \eta$, где η — некоторое число, удовлетворяющее неравенству $\eta \leqslant \vartheta$, причем если $\eta < \vartheta$, тогда для любой точки $w \in W_*\,(\eta)$ имеет место равенство

$$\rho\ (\{\eta,\ w\};\ D) = \varepsilon > 0 \tag{3.6}$$

2°. Для любой точки $w \in W_*\,(t)(t_* \leqslant t \leqslant \eta)$ выполняется неравенство

$$\rho\ (\{t,\ w\},\ M) \geqslant \varepsilon > 0 \tag{3.7}$$

3°. Множество $W_*(t_*)$ содержит точку w_*.

4°. Система множеств $W_*(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \eta)$ является v-стабильной относительно G, где G — совокупность точек $p = \{t, x\}$, удовлетворяющих условию

$$\rho(\{t, x\}, D) \geqslant \varepsilon > 0$$

Покажем, что для любого движения $x[t] = x[t; t_*, w_*, U_\tau, V^{(e)}]$ выполняется неравенство $\varkappa(x[\cdot]; t_*, \vartheta) \geqslant \varepsilon > 0$. (Здесь $V^{(e)} = V^{(e)}(t, x)$ — экстремальная к системе множеств $W_*(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ смешанная стратегия второго игрока).

Действительно, в силу леммы 2.2 для любого движения $x[t] = x[t; t_*, w_*, U_\tau, V^{(e)}]$ будет выполняться следующее условие:

$$x[t] \in W_*(t), \qquad t_* \leqslant t \leqslant \min\{\eta, \vartheta(x[\cdot]; G)\} \tag{3.8}$$

Предположим сначала, что $\min\{\eta, \vartheta(x[\cdot]; G)\} = \vartheta$, тогда из (3.8) и (3.7) получим неравенство

$$\rho(\{t, x[t]\}, M) \geqslant \varepsilon > 0 \quad \text{при } t_* \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{3.9}$$

Если же величина $\xi = \min\{\eta, \vartheta(x[\cdot]; G)\} < \vartheta$, тогда из (3.8) в силу свойств 1°, 2°, 4° имеем следующие соотношения:

$$\rho(\{t, x[t]\}, M) \geqslant \varepsilon > 0 \quad \text{при } t \in [t_*, \xi]$$
$$\rho(\{\xi, x[\xi]\}, D) = \varepsilon > 0 \tag{3.10}$$

Таким образом, для любого движения $x[t] = x[t; t_*, w_*, U_\tau, V^{(e)}]$ выполняется либо условие (3.9), либо условие (3.10), поэтому для всякого движения $x[t] = x[t, t_*, w_*, U_\tau, V^{(e)}]$ имеет место неравенство

$$\varkappa(x[\cdot]; t_*, \vartheta) \geqslant \varepsilon > 0 \tag{3.11}$$

Теперь покажем, что при выполнении условий леммы 3.1 можно построить систему множеств $W_*(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \eta)$, обладающую перечисленными выше свойствами 1°—4°.

Пусть X — совокупность точек $x[t^*] = x[t^*, t_*, w_*, U_\tau, \nu_*(dv)]$, отвечающих всевозможным движениям $x[t] = x[t; t_*, w_*, U_\tau, \nu_*(dv)]$. Множество X ограничено, замкнуто и в силу (3.4) пересечение множеств X и $W(t^*, \vartheta)$ пусто. Это означает, что для любой точки $w \in X$ можно указать смешанную стратегию второго игрока $V_w = V_w(t, x)$ такую, что для любого движения $x[t] = x[t; t^*, w, U_\tau, V_w]$ будет выполняться неравенство $\varkappa(x[\cdot]; t^*, \vartheta) > 0$. Множество вектор-функций $x[t; t^*, w, U_\tau, V_w]$ будет компактным в себе, а функционал $\varkappa(x[\cdot]; t^*, \vartheta)$ полунепрерывен снизу по $x[\cdot]$. Поэтому существует такое число $\alpha(w) > 0$, что для всех движений $x[t] = x[t; t^*, w, U_\tau, V_w]$ будет иметь место неравенство

$$\varkappa(x[\cdot]; t^*, \vartheta) \geqslant \alpha(w) > 0 \tag{3.12}$$

Так как множество движений $x[t; t^*, w, U_\tau, V]$ зависит от начального условия $x[t^*] = w$ полунепрерывно сверху относительно включения, то из (3.12) получим, что для всех точек x^*, удовлетворяющих неравенству $\|x^* - w\| \leqslant r(w)$ (где $r(w)$— некоторое положительное число), и для любого движения $x[t] = x[t; t^*, x^*, U_\tau, V_w]$ будет выполняться соотношение

$$\varkappa(x[\cdot]; t^*, \vartheta) \geqslant {}^1\!/_2\alpha(w) > 0$$

Совокупность сфер

$$R(w, r(w)) = \{x : \|x - w\| < r(w),\ r(w) > 0\}$$

покрывает замкнутое ограниченное множество X, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие

$$R_i = R(w_i, r(w_i)) = \{x : \|x - w_i\| \leqslant r(w_i)\}$$
$$X \subset \bigcup R_i \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{3.13}$$

Стратегии $V_w = V_w(t, x)$, отвечающие точкам w_i $(i = 1, \ldots, m)$ будем в дальнейшем обозначать просто через $V_i = V_i(t, x)$. Через $X_i[t^*, \vartheta]$ обозначим совокупность всех движений $x[t] = x[t; t^*, x^*, U_\tau, V_i]$ $(t^* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, отвечающих всевозможным начальным условиям $x[t^*] = x^* \in R_i$.

Символом $X[t^*, \vartheta]$ обозначим множество всех вектор-функций $x[t]$ $(t^* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, заданное равенством

$$X[t^*, \vartheta] = \bigcup X_i[t^*, \vartheta] \qquad (i=1, \ldots, m) \tag{3.14}$$

Множество движений $x[t; t^*, x^*, U_\tau, V_i]$ $(t^* \leqslant t \leqslant \vartheta,\ i = 1, \ldots, m)$ будет компактным в себе и зависит от x^* полунепрерывно сверху относительно включения, поэтому из замкнутости множеств R_i вытекает, что множества $X_i[t^*, \vartheta]$ и $X[t^*, \vartheta]$ будут компактными в себе. Причем из построения этих множеств вытекает справедливость неравенства

$$\varkappa(x[\cdot];\ t^*,\ \vartheta) \geqslant \alpha^* > 0 \tag{3.15}$$

для любой вектор-функции $x[t]$ $(t^* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, принадлежащей множеству $X[t^*, \vartheta]$, здесь $\alpha^* = \min\{{}^1/_2\alpha\ (w_i)\}$ при $i = 1, \ldots, m$.

Обозначим через $X[t_*, \vartheta]$ множество всех непрерывных вектор-функций $x[t]$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, которые при $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ совпадают с некоторыми из движений $x[t; t_*, w_*, U_\tau, \nu_*(dv)]$, а при $t^* \leqslant t \leqslant \vartheta$ являются элементами множества $X[t^*, \vartheta]$. Из соотношений (3.3) и (3.15) вытекает, что для любой вектор-функции $x[t]$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, принадлежащей множеству $X[t_*, \vartheta]$ выполняется неравенство

$$\varkappa(x[\cdot];\ t_*,\ \vartheta) \geqslant \alpha_* > 0$$

Из этого неравенства, используя свойство компактности в себе множества $X[t_*, \vartheta]$, можно получить, что для любой вектор-функции $x[t]$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, принадлежащей множеству $X[t_*, \vartheta]$ выполняется, по крайней мере, одно из следующих двух соотношений

$$\max_t \rho(\{t, x[t]\}, D) > \varepsilon \quad \text{при } t_* \leqslant t \leqslant \min\{\vartheta,\ \vartheta(x[\cdot];\ M^\varepsilon)\} \tag{3.16}$$

$$\min_t \rho(\{t,\ x[t]\},\ M) > \varepsilon \quad \text{при } t_* \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{3.17}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — некоторое положительное число.

Пусть $W_*(\tau)$ — множество точек из фазового пространства $\{x\}$, которое задается следующим образом: точка w принадлежит множеству $W_*(\tau)$ тогда и только тогда, когда существует вектор-функция $x[t]$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, принадлежащая множеству $X[t_*, \vartheta]$ и удовлетворяющая условиям

$$x[\tau] = w, \quad \max \rho(\{t,\ x[t]\},\ D) \leqslant \varepsilon \quad \text{при } t_* \leqslant t \leqslant \tau \tag{3.18}$$

Покажем, что построенная система множеств $W_*(\tau)$ $(t_* \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$ обладает перечисленными выше (см. стр. 1015) свойствами 1°—4°. Обозначим через η верхнюю грань чисел $\tau \leqslant \vartheta$, при которых множества $W_*(\tau)$ непусты. Покажем, что тогда непусто и множество $W_*(\eta)$, а также непусто любое множество $W_*(\tau)$ при $t_* \leqslant \tau \leqslant \eta$.

Действительно, пусть τ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — последовательность чисел, сходящаяся слева к числу η, причем множества $W_*(\tau_k)$ $(k = 1, 2\ldots)$ непусты.

Рассмотрим некоторую последовательность точек w_k

$$w_k \in W(\tau_k) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

Каждой точке w_k отвечает некоторая вектор-функция $x_k[t]$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ из множества $X[t_*, \vartheta]$, удовлетворяющая условию

$$x_k[\tau_k] = w_k, \quad \max_t \rho(\{t,\ x_k[t]\},\ D) \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad t_* \leqslant t \leqslant \tau_k \tag{3.19}$$

Выделяя из последовательности вектор-функций $x_k[t]$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ подпоследовательность, сходящуюся к некоторой вектор-функции $x_*[t]$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, также принадлежащей множеству $X[t_*, \vartheta]$, из (3.19), учитывая, что $\tau_k \to \eta$ при $k \to \infty$, получим

$$x_*[\eta] = w_*, \quad \max_t \rho(\{t,\ x_*[t]\},\ D) \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad t_* \leqslant t \leqslant \eta$$

Таким образом, существует точка $w^* = x_*[\eta]$, принадлежащая множеству $W_*(\eta)$, следовательно, $W_*(\eta)$ непусто. Нетрудно заметить, что непустым будет любое множество $W_*(\tau)$ при $t_* \leqslant \tau \leqslant \eta$. Замкнутость множеств $W_*(\tau)$ $(t_* \leqslant \tau \leqslant \eta)$ можно проверить при помощи рассуждений, аналогичных доказательству непустоты множества $W_*(\eta)$. Заметим теперь, что при условии $\eta < \vartheta$ из определения числа η как наибольшего среди чисел τ, для которых $W(\tau)$ непусто, вытекает следующее соотношение:

$$\max_t \rho(\{t, x[t]\}, D) = \rho(\{\eta, x[\eta]\}, D) = \varepsilon, \quad t_* \leqslant t \leqslant \eta$$

где $x[t]$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ — элементы множества $X[t_*, \vartheta]$, которые в силу (3.18) отвечают точкам $w \in W_*(\eta)$. Таким образом, из последнего равенства вытекает справедливость соотношения (3.6). Итак, условие 1° проверено.

Условие 2° вытекает непосредственно из (3.16) — (3.18). Включение $w_* \in W_*(t_*)$ является следствием условия $\{t_*, x[t_*]\} \in D$ и равенства $x[t_*] = w_*$, которое, очевидно, выполняется для всех элементов множества $X[t_*, \vartheta]$.

Проверим теперь выполнение четвертого свойства для построенной системы множеств $W_*(\tau)$. Пусть w — произвольная точка множества $W_*(\tau)$ $(t_* \leqslant \tau < \eta)$, $\mu_*(du)$ — некоторая мера на P, δ — число, удовлетворяющее условию $0 < \delta \leqslant \eta - \tau$. Покажем, что существует движение $x^*[t] = x[t; \tau, w, \mu_*(du), V_\tau]$, $(\tau \leqslant t \leqslant \tau + \delta)$, для которого выполнено одно из двух условий

$$x^*[\tau + \delta] \in W_*(\tau + \delta) \tag{3.20}$$

$$\max \rho(\{t, x^*[t]\}, D) \geqslant \varepsilon \quad \text{при } \tau \leqslant t \leqslant \tau + \delta \tag{3.21}$$

Обозначим через $x_*[t]$ вектор-функцию из множества $X[t_*, \vartheta]$, отвечающую в силу (3.18) точке w, т. е. удовлетворяющую условиям

$$\max_t \rho(\{t, x[t]\}, D) \leqslant \varepsilon \quad \text{при } t_* \leqslant t \leqslant \tau, \qquad x_*[\tau] = w \tag{3.22}$$

Можно показать, что среди движений $x[t; \tau, w, \mu_*(du), V_\tau]$ существует такое движение $x^*[t]$, что непрерывная вектор-функция

$$x[t] = \begin{cases} x_*[t] & \text{при } t_* \leqslant t \leqslant \tau \\ x_*[t] & \text{при } \tau \leqslant t \leqslant \vartheta \end{cases}$$

является элементом множества $X[t_*, \vartheta]$. Но тогда для этого движения $x^*[t] = x[t; \tau, w, \mu_*(du), V_\tau]$ выполняется одно из условий (3.20), (3.21).

Действительно, если $\max_t \rho(\{t, x^*[t]\}, D) \leqslant \varepsilon$ при $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \delta$, тогда в силу (3.22) и по определению множества $W_*(t)$ будет иметь место включение (3.20), в противном случае будет выполняться неравенство (3.21).

Таким образом, четвертое свойство семейства множеств $W_*(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \eta)$ проверено, что завершает доказательство леммы 3.1.

Лемма 3.2. Каждое из множеств $W(t, \vartheta)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ замкнуто. Множества $W(t, \vartheta)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ удовлетворяют включениям

$$W(t, \vartheta) \subset D^*(t), \quad D^*(t) \cap M^*(t) \subset W(t, \vartheta) \tag{3.23}$$

Здесь $D^*(t)$ и $M^*(t)$ — замкнутые множества в пространстве $\{x\}$, определенные следующим образом:

$$D^*(t) = \{x\colon \{t, x\} \in D\}, \qquad M^*(t) = \{x : \{t, x\} \in M\}$$

Справедливость включений (3.23) вытекает непосредственно из определения 3.1, поэтому остается показать, что множество $W(t, \vartheta)$ замкнуто. Пусть точка w_* не принадлежит множеству $W(t_*, \vartheta)$ $(t_* \in [t_0, \vartheta])$. Это означает, что существует такая смешанная стратегия второго игрока $V_* = V_*(t, x)$, для которой неравенство $\varkappa(x[\cdot]; t_*, \vartheta) > 0$ выполняется для любого движения $x[t] = x[t; t_*, w_*, U_\tau, V_*]$.

Компактное в себе множество вектор-функций $x[t; t_*, w_*, U_\tau, V_*]$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ зависит от начального условия w_* полунепрерывно сверху относительно включения, а функционал $\varkappa\,(x\,[\cdot];\, t_*,\, \vartheta)$ полунепрерывен снизу, поэтому существует такое $\varepsilon > 0$, при котором неравенство $\varkappa\,(x\,[\cdot];\; t_*,\; \vartheta) > 0$ имеет место для любого движения $x\,[t;\; t_*,\; w,\; U_\tau,\; V_*]$, где $\| w - w_* \| \leqslant \varepsilon$. Следовательно, для любой точки $w_* \notin W\,(t_*,\, \vartheta)$ можно указать такую ε-окрестность $R\,(w_*,\, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$, что $R\,(w_*,\, \varepsilon) \cap W\,(t_*,\, \vartheta) = \phi$, т. е. дополнение множества $W\,(t_*,\, \vartheta)$ открыто, поэтому множество $W\,(t_*,\, \vartheta)$ — замкнуто. Лемма 3.2. доказана.

Обозначим, как и выше, через $R\,(x_0,\, r)$ замкнутую сферу радиуса r с центром в точке x_0. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.3. Если $x_0 \in W\,(t_0,\, \vartheta)$, то для любого числа $r > 0$ можно указать такое $\eta\,(r)$ $(t_0 \leqslant \eta\,(r) \leqslant \vartheta)$, для которого выполняются условия:

1) Каждое из множеств $W\,(t,\, \vartheta) \cap R\,(x_0,\, r)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant \eta\,(r)$ непусто;

2) либо

$$\rho(x_0,\, W\,(\eta\,(r),\, \vartheta)) = r$$

либо

$$W\,(\eta(r),\, \vartheta) \cap R\,(x_0,\, r) \subset M^*\,(\eta\,(r)) = \{x\colon \{\eta\,(r),\, x\} \in M\}$$

3) система множеств $W\,(t,\; \vartheta)\; (t_0 \leqslant t \leqslant \eta\,(r))$ u-стабильна относительно M.

Доказательство. Пусть τ_* — верхняя грань всех чисел τ, удовлетворяющих следующим требованиям:

$$\tau \leqslant \vartheta, \qquad W\,(t,\;\vartheta) \cap R\,(x_0,\; r) \neq \phi \qquad \text{при } t \in [t_0,\; \tau]$$

Заметим, что множество таких чисел τ непусто, поскольку число $\tau = t_0$ удовлетворяет перечисленным требованиям. Покажем, что в качестве $\eta\,(r)$ можно взять число τ_*, т. е. число τ_* удовлетворяет условиям 1) — 3).

Проверим сначала выполнение условия 1). Для этого достаточно показать, что непусто множество $W\,(\tau_*,\, \vartheta) \cap R\,(x_0,\, r)$. Пусть τ_k $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$ — последовательность чисел, сходящаяся к τ_* слева. Каждое из множеств $W\,(\tau_k,\, \vartheta) \cap R\,(x_0,\, r)$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$ непусто и все эти множества равноограничены, поэтому можно выделить последовательность точек w_k, $w_k \in W\,(\tau_k,\, \vartheta) \cap R\,(x_0,\, r)$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$, сходящуюся к некоторой точке w_*.

Очевидно $w_* \in R\,(x_0,\, r)$, покажем, что $w_* \in W\,(\tau_*,\, \vartheta)$. Предположим противное, т. е. $w_* \notin W\,(\tau_*,\, \vartheta)$. Тогда в силу леммы 3.2 можно утверждать, что существует $\varepsilon > 0$, при котором выполняется соотношение

$$R\,(w_*,\, \varepsilon) \cap W\,(\tau_*,\, \vartheta) = \phi \tag{3.24}$$

Точки $p_k = \{\tau_k,\, w_k\}$ принадлежат множеству D (см. (3.23)), поэтому в силу замкнутости множества D имеет место включение

$$\{\tau_*,\, w_*\} > D \tag{3.25}$$

Из (3.24), (3.25) и (3.23) вытекает, что точка $p_* = \{\tau_*,\, w_*\}$ не может принадлежать множеству M. Поэтому в силу замкнутости множества M выполняется соотношение

$$\rho\,(\{t_*,\; w_*\},\; M) > 0 \tag{3.26}$$

Пусть $\nu\,(dv)$ — некоторая мера на Q. Из (3.24), (3.26) вытекает, что при достаточно больших k для любого движения $x\,[t] = x\,[t;\; \tau_k,\; w_k,\; U_\tau,\; \nu\,(dv)]$ будут выполняться условия

$$\rho\,(\{t,\; x\,[t]\},\; M) > 0 \qquad \text{при} \quad t \in [\tau_k,\; \tau_*]$$

$$x\,[\tau_*] \in R\,(w_*,\, \varepsilon), \qquad x\,[\tau_*] \notin W\,(\tau_*,\; \vartheta)$$

Поэтому в силу леммы 3.1 при достаточно больших k будет выполняться следующее соотношение $w_k \notin W(\tau_k, \vartheta)$. Полученное противоречие доказывает справедливость включения

$$w_* \in W(\tau_*, \vartheta) \cap R(x_0, r)$$

Следовательно, условие 1) для числа $\tau_* = \eta(r)$ выполняется.

Проверим теперь выполнение условия 2). Предположим опять противное, т. е. допустим, что существует точка $w_* \in W(\tau_*, \vartheta) \cap R(x_0, r)$, для которой одновременно выполняются соотношения

$$\| w_* - x_0 \| < r, \qquad w_* \notin M(\tau_*)$$

причем последнее соотношение включает и тот случай, когда множество $M(\tau_*)$ пусто. В силу определения числа τ_* существует последовательность чисел t_k, сходящаяся к τ_* справа, такая, что множества $W(t_k, \vartheta) \cap R(x_0, r)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ пусты.

Итак, имеют место следующие соотношения:

$$t_k > \tau_*, \qquad \lim_{k\to\infty} t_k = \tau_*, \qquad W(t_k, \vartheta) \cap R(x_0, r) = \phi$$

$$\| w_* - x_0 \| < r, \qquad \rho(\{\tau_*, w_*\}, M) > 0$$

Пусть $\nu(dv)$ — некоторая мера на Q, тогда из этих соотношений вытекает, что при достаточно больших k для любого движения $x[t] = x[t; \tau_*, w_*, U_\tau, \nu(dv)]$ будут выполняться условия

$$\rho(\{t, x[t]\}, M) > 0 \qquad \text{при } t \in [\tau_*, t_k]$$

$$\|x[t_k] - x_0\| \leqslant r, \qquad \text{т. е. } x[t_k] \notin W(t_k, \vartheta)$$

Следовательно, в силу леммы 3.1 будем иметь следующее соотношение $w_* \notin W(\tau_*, \vartheta)$, что противоречит предположению. Это противоречие доказывает выполнение условия 2) для числа $\tau_* = \eta(r)$.

Проверим теперь выполнение условия 3), предположим, что оно не выполняется, т. е. существуют числа $t_* \in [t_0, \tau_*)$, $\delta \in (0, \tau_* - t_*]$, точка $w_* \in W(t_*, \vartheta)$ и некоторая мера $\nu_*(dv)$, для которых соотношения

$$\rho(\{t, x[t]\}, M) > 0 \quad \text{при } t_* \leqslant t \leqslant t_* + \delta \tag{3.27}$$

$$x[t_* + \delta] \notin W(t_* + \delta, \vartheta)$$

выполняются для любого движения $x[t] = x[t; t_*, w_*, U_\tau, \nu_*(dv)]$. Из (3.27) в силу леммы 3.1 сразу получим, что $w_* \notin W(t_*, \vartheta)$. Это противоречие доказывает выполнение условия 3).

Итак, полагая $\eta(r) = \tau_*$, получим, что число τ_* удовлетворяет условиям 1) — 3), сформулированным в лемме 3.3. Лемма доказана.

Используя леммы 3.2 и 3.3, докажем теперь следующую теорему, из которой непосредственно вытекает справедливость альтернативы, сформулированной в конце § 1.

Теорема 3.1. Если $x_0 \in W(t_0, \vartheta)$, то экстремальная к системе множеств $W(t, \vartheta)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ смешанная стратегия первого игрока $U^{(e)} = U^{(e)}(t, x)$ для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U^{(e)}, V_\tau]$ обеспечивает выполнение следующих соотношений:

$$\vartheta(x[\cdot]; M) \leqslant \vartheta, \quad \{t, x[t]\} \in D \quad \text{при } t \in [t_0, \vartheta(x[\cdot]; M)]$$

Если же $x_0 \notin W(t_0, \vartheta)$, тогда существует такое положительное число $\varepsilon > 0$ и такая смешанная стратегия второго игрока $V_* = V_*(t, x)$, что для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_\tau, V_*]$ будет выполняться условие

$$\{t, x[t]\} \notin M^\varepsilon \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant \min \{\vartheta, \tau^\varepsilon (x[\cdot]; D)\}$$

где $\tau^\varepsilon (x[\cdot]; D)$ — момент времени, когда впервые выполняется равенство $\rho (\{t, x[t]\}, D) = \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in W(t_0, \vartheta)$, выберем достаточно большое число r так, чтобы для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_\tau, V_\tau]$ выполнялось условие

$$\max_t \| x[t] - x_0 \| < r \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{3.28}$$

В силу леммы 3.3 этому числу r можно поставить в соответствие некоторое число $\eta(r) \in [t_0, \vartheta]$, удовлетворяющее условиям 1) — 3) этой леммы.

Рассмотрим теперь систему множеств $W(t, \vartheta)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \eta(r))$, которая в силу лемм 3.2 и 3.3 удовлетворяет всем условиям леммы 2.1. В силу леммы 2.1 для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U^{(e)}, V_\tau]$ выполняется следующее соотношение:

$$x[t] \in W(t, \vartheta) \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant \min \{\eta(r), \vartheta(x[\cdot]; M)\} \tag{3.29}$$

Покажем, что $\vartheta(x[\cdot]; M) \leqslant \eta(r)$. Действительно, если $\rho(x_0, W(\eta(r), \vartheta)) = r$ (см. условие 2 леммы 3.3), тогда в силу (3.28) и (3.29) будем иметь строгое неравенство $\vartheta(x[\cdot]; M) < \eta(r)$, если же выполняется соотношение $W(\eta(r), \vartheta) \cap R(x_0, r) \subset M^* \cdot (\eta(r))$ и $\min \{\vartheta(x[\cdot]; M), \eta(r)\} = \eta(r)$, то тогда в силу (3.28), (3.29) имеет место следующее включение: $x[\eta(r)] \in W(\eta(r), \vartheta) \cap R(x_0, r) \subset M^*(\eta(r))$, т. е. в этом случае $\vartheta(x[\cdot]; M) = \eta(r)$. Таким образом, для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U^{(e)}, V_\tau]$ имеет место неравенство $\vartheta(x[\cdot]; M) \leqslant \eta(r) \leqslant \vartheta$. Выполнение фазового ограничения $\{t, x[t]\} \in D$ при всех $t \in [t_0, \vartheta(x[\cdot]; M)]$ вытекает теперь из (3.29) и из включения $W(t, \vartheta) \subset D^*(t)$ (см. лемму 3.2). Итак, первое утверждение теоремы 3.1 доказано.

Пусть теперь $x_0 \notin W(t_0, \vartheta)$. По определению множества $W(t, \vartheta)$ это означает, что существует смешанная стратегия второго игрока $V_* = V_*(t, x)$, обеспечивающая выполнение неравенства

$$\varkappa(x[\cdot]; t_0, \vartheta) > 0 \tag{3.30}$$

для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_\tau, V_*]$. Поскольку множество движений $x[t; t_0, x_0, U_\tau, V_*]$ компактно в себе, то из (3.30) вытекает существование такого положительного числа $\varepsilon > 0$, что для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_\tau, V_*]$ будет выполняться следующее соотношение $\{t, x[t]\} \notin M^\varepsilon$ при всех $t_0 \leqslant t \leqslant \min \{\vartheta, \tau^\varepsilon (x[\cdot]; D)\}$. Таким образом, второе утверждение теоремы 3.1 доказано.

В заключение этого параграфа приведем некоторые утверждения, которые могут быть полезны при исследовании дифференциальных игр.

Пусть $W_*(\tau, \vartheta)$ $(t_0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$ множество точек w, удовлетворяющих условию: какова бы ни была смешанная стратегия второго игрока $V = V(t, x)$, существует движение

$$x[t] = x[t; \tau, w, U_\tau, V]$$

для которого выполняется включение

$$\{t, x[t]\} \in D \text{ при } \tau \leqslant t \leqslant \min \{\vartheta, \vartheta(x[\cdot]; M)\}$$

где по-прежнему $\vartheta(x[\cdot]; M)$ — момент первого попадания точки $p[t] = \{t, x[t]\}$ на множество M.

Теорема 3.2. Если $x_0 \in W_*(t_0, \vartheta)$, тогда экстремальная к системе множеств $W_*(t, \vartheta)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ смешанная стратегия первого игрока $U^{(e)} =$

$= U^{(e)}(t, x)$ для любого движения

$$x[t] = x[t;\ t_0,\ x_0,\ U^{(e)},\ V_\tau]$$

обеспечивает выполнение условия

$$\{t,\ x[t]\} \in D \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant \min\ \{\vartheta,\ \vartheta\ (x[\cdot];\ M)\}$$

Если $x_0 \notin W_*(t, \vartheta)$, тогда существует смешанная стратегия второго игрока $V_* = V_*(t, x)$ и число $\varepsilon > 0$, при которых для любого движения $x[t] = x[t;\ t_0,\ x_0,\ U_\tau,\ V_*]$ будут выполняться условия

$$\tau^\varepsilon(x[\cdot];\ D) \leqslant \vartheta, \quad \rho(\{t,\ x[t]\},\ M) > \varepsilon \ \text{при}\ t_0 \leqslant t \leqslant \tau^\varepsilon\ (x[\cdot];\ D)$$

Доказательство. Пусть M_* — объединение множества M и гиперплоскости $t = \vartheta = \text{const}$. Тогда из определения множеств $W_*(t, \vartheta)$ видно, что $W_*(t, \vartheta)$ есть совокупность всех точек $\{w\}$ таких, что из позиции $p = \{t, w\}$ множество M_* поглощается позиционно в D к моменту ϑ. Как нетрудно теперь заметить, справедливость теоремы 3.2 вытекает из теоремы 3.1 и из определения множества M_*.

Примечание 3.1. Нетрудно заметить, что утверждение теоремы 3.1 остается справедливым, если в формулировке этой теоремы и в определении множеств $W(\tau, \vartheta)$ поменять местами первого и второго игроков; т. е. множество $W(\tau, \vartheta)$ определить как совокупность точек w, для которых при любом выборе стратегии первого игрока U равенство (3.2) имеет место хотя бы для одного из движения $x[t] = x[t;\tau, w, U, V_\tau]$; при этом в формулировке теоремы 3.1 стратегии $U^{(e)}$, U_τ первого игрока следует заменить на стратегии второго игрока $V^{(e)}$, V_τ, а стратегии второго игрока V_τ, V^* заменить на стратегии первого игрока U_τ, U^*. Аналогичное замечание справедливо также и для теоремы 3.2.

Поступила 24 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Fleming W. H. The convergence problem for differential games. J. Math. Anal. and Appl., 1961, vol. 3.
2. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
3. Смольяков Э. Р. Дифференциальные игры в смешанных стратегиях. Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 1.
4. Varaiya P., Lin J. Existence of saddle points in differential games. SIAM J. Control, 1969, vol. 7, No. 1.
5. Красовский Н. Н. Об одной задаче преследования. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
6. Красовский Н. Н., Субботин А. И. О структуре дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 3.
7. Красовский Н. Н. О дифференциальной игре сближения. Докл. АН СССР 1970, т. 193, № 2.
8. Халмош П. Теория меры. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
9. Люстерник Л. А., Соболев В. Н. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
10. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью Матем. сб., 1960, т. 51(93), вып. 1.
11. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. М., «Наука», 1969.