О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПА ГЕССА

Ю. А. Архангельский (Москва)

Как известно, решение уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Гесса

$$e_1 \sqrt{A\,(B-C)} + e_3 \sqrt{C\,(A-B)} = 0, \quad e_2 = 0$$

(A, B, C — главные моменты инерции, e_1, e_2, e_3 — координаты центра тяжести тела) не сводится к квадратурам, а приводится к решению уравнения Риккати, что сильно осложняет исследование соответствующего движения.

Общая качественная картина движения тела в случае Гесса была впервые дана Н. Е. Жуковским [1], затем более подробная при помощи метода подвижного годографа — Ковалевым [2,3] 1.

Однако обе эти геометрические интерпретации достаточно сложны и нахождение с их помощью для конкретного твердого тела движения, удовлетворяющего конкретным начальным условиям, сопряжено с большими трудностями.

В данной работе движение твердого тела в случае Гесса исследуется при предположении, что телу в начальный момент времени сообщена большая угловая скорость ω_0 вокруг некоторой оси. Получаемые при этом явные зависимости углов Эйлера от времени дают возможность достаточно просто провести подробный анализ движения гироскопа Гесса.

1. Составим уравнения движения твердого тела в связанной с этим телом прямоугольной системе координат $Oxyz$, ось Ox которой проходит через центр тяжести тела, а оси Oy и Oz выбраны таким образом (это всегда можно сделать в случае Гесса [4]), что выражение для кинетической энергии тела будет

$$2T = a_1 x^2 + a\,(y^2 + z^2) - 2byz$$
$$a_1 = A_{11}\,(A_{22}A_{33})^{-1}, \quad a = A_{33}^{-1}, \; b = A_{12}\,(A_{11}A_{33})^{-1}$$

Здесь x, y, z — проекции кинетического момента тела на оси $Oxyz$; A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{12} — компоненты соответствующего тензора инерции, между которыми существует зависимость $A_{12}^2 = A_{11}\,(A_{22} - A_{33})$.

Отметим также выражения для проекций угловой скорости ω_1, ω_2, ω_3

$$\omega_1 = -\,by, \quad \omega_2 = ay, \quad \omega_3 = az$$

В случае Гесса в выбранных осях $Oxyz$ четвертый интеграл будет $x = 0$, а уравнения, три их первых интеграла и проекции угловой скорости при условии $b > 0$ в безразмерных переменных

$$y = \sqrt{\Gamma / b}\; y_1, \quad z = \sqrt{\Gamma / b}\; z_1, \quad t = t_1 / \sqrt{\Gamma b}, \quad \omega_i = a \sqrt{\Gamma / b}\; \omega_i^*$$
$$\Gamma = \mathrm{Mg}\, \sqrt{e_1^2 + e_3^2}, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1.1}$$

примут вид [2]

$$\frac{dy_1}{dt_1} = -\,y_1 z_1 - \gamma_3, \qquad \frac{dz_1}{dt_1} = y_1^2 + \gamma_2 \tag{1.2}$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt_1} = \frac{2}{c}\,(z_1\gamma_2 - y_1\gamma_3), \quad \frac{d\gamma_2}{dt_1} = -\,y_1\gamma_3 - \frac{2}{c}\,z_1\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt_1} = y_1\left(\gamma_2 + \frac{2}{c}\,\gamma_1\right) \tag{1.3}$$

$$y_1^2 + z_1^2 - c\gamma_1 = ch, \; y_1\gamma_2 + z_1\gamma_3 = k_1, \; \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{1.4}$$

$$\omega_1^* = (-c / 2)\, y_1, \quad \omega_2^* = y_1, \quad \omega_3^* = z_1 \tag{1.5}$$

Здесь $c = 2b / a$; γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы вертикали, h, k_1 — безразмерные произвольные постоянные.

Переписывая в полярных координатах ρ и α

$$y_1 = \rho \cos \alpha, \quad z_1 = \rho \sin \alpha \tag{1.6}$$

---

1 См. также А. М. Ковалев. Геометрическое исследование некоторых решений задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку. Кандидатская диссертация, Донецк. гос. ун-т, 1969.

интеграл энергии и интеграл площадей в виде

$$\rho^2 = c(\gamma_1 + h), \qquad \rho(\gamma_2 \cos\alpha + \gamma_3 \sin\alpha) = k_1 \tag{1.7}$$

получим при помощи (1.2) и (1.3) уравнения для определения γ_1 и w

$$w = \operatorname{tg} {}^1/_2\, \alpha \tag{1.8}$$

$$c\frac{d\gamma_1}{dt_1} = 2\,\mathrm{sign}\,(\gamma_{20}\sin\alpha_0 - \gamma_{30}\cos\alpha_0)\sqrt{c(h+\gamma_1)(1-\gamma_1^2) - k_1^2}$$

$$2\frac{dw}{dt_1} = (1-w^2)\sqrt{c(h+\gamma_1)} + k_1[c(h+\gamma)]^{-1}(1+w^2)$$

Здесь и ниже для любой функции $F(t)$ вводится обозначение $F_0 = F(0)$.

Предположим, что в начальный момент времени ось Ox лежит в горизонтальной плоскости, а ось Oz составляет с вертикалью угол θ_0 $(0 < \theta_0 < {}^1/_2\pi)$ и вокруг этой оси в начальный момент времени телу сообщена большая угловая скорость ω_0. Тогда начальные условия будут

$$\gamma_{10} = 0, \quad \gamma_{20} = \sin\theta_0, \; \gamma_{30} = \cos\theta_0 \tag{1.9}$$
$$y_{10} = 0, \quad z_{10} = \omega_0^*, \quad \rho_0 = \omega_0^*, \; \alpha = \pi/2$$

и из соотношений (1.7) получим

$$\omega_0^{*2} = \mathrm{ch}, \; k_1 = \omega_0^* \cos\theta_0 \tag{1.10}$$

Переходя к новым переменным σ и τ и вводя малый параметр μ

$$\gamma = h\sigma, \quad \tau = t_1\sqrt{h/c}, \quad \mu = h^{-1} \tag{1.11}$$

будем иметь

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = 2\sqrt{f(\sigma)}, \quad f(\sigma) = (1+\sigma)(\mu^2 - \sigma^2) - \mu^2\cos^2\theta_0 \; (\sigma_0 = 0) \tag{1.12}$$

$$2\frac{dw}{d\tau} = c(1-w^2)\sqrt{1+\sigma} + \mu(1+w^2)\cos\theta_0(1+\sigma)^{-1} \tag{1.13}$$

2. Для решения уравнения (1.12) найдем [5] корни $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ кубического уравнения $f(\sigma) = 0$

$$\sigma_1 = \mu\sin\theta_0 + {}^1/_2\mu^2\cos^2\theta_0 + \mu^3(\ldots), \; \sigma_2 = -\mu\sin\theta_0 + {}^1/_2\mu^2\cos^2\theta_0 + \mu^3(\ldots) \tag{2.1}$$
$$\sigma_3 = -1 - \mu^2\cos^2\theta_0 + \mu^3(\ldots)$$

и сделав замену

$$\sigma = \sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_2)\xi^2$$

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{\mu}{4}\frac{\cos^2\theta_0}{\sin\theta_0} + \mu^2(\ldots)\right] \tag{2.2}$$

будем иметь

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = -\sqrt{\sigma_1 - \sigma_3}\,d\tau \quad \left[k^2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} = 2\mu\sin\theta_0 + \mu^2(\ldots)\right] \tag{2.3}$$

Обращая соответствующий эллиптический интеграл, получим величину ξ

$$\xi = \mathrm{sn}\,(\tau^{(0)} - \sqrt{\sigma_1 - \sigma_3}\,\tau) \quad (\xi_0 = \mathrm{sn}\,\tau^{(0)})$$

в виде периодической по τ функции периода T_1

$$T_1 = 4K(\sigma_1 - \sigma_3)^{-1/2} = 2\pi T_2\,[T_2 = 1 - {}^1/_4\mu^2\sin^2\theta_0 + \mu^3(\ldots)] \tag{2.4}$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода.

Вводя новое переменное τ^* вместо τ

$$\tau = T_2\tau^* \tag{2.5}$$

получим, что величина ξ

$$\xi = \mathrm{sn}\,(\tau^{(0)} - 2K\pi^{-1}\tau^*) \tag{2.6}$$

будет периодической по τ^* функцией периода 2π.

Подставляя разложение величины ξ, получаемое при помощи формулы

$$\mathrm{sn}\,u = \sin u_1\,[1 + {}^1/_8 k^2(1 + \cos 2u_1)] + k^4(\ldots), \; u_1 = {}^1/_2\pi u K^{-1}$$

и приведенных выше выражений для k^2 и ξ_0, в ряд по степеням μ в формулы (2.15), будем иметь

$$\sigma = \mu \sin\theta_0 \sin 2\tau^* + {}^1/_2\mu^2 (\cos^2\theta_0 - {}^1/_2 \sin^2\theta_0 - \cos 2\theta_0 \cos 2\tau^* - \\ - {}^1/_2 \sin^2\theta_0 \cos 4\tau^*) + \mu^3 (\ldots) \qquad (2.7)$$

Отметим, что $\sigma(\tau^*)$ — периодическая по τ^* функция периода π.

Переписывая (1.13) при помощи соотношений (2.5) и (2.7), получим уравнение

$$2\frac{dw}{d\tau^*} = c(1-w^2) + \mu\,[{}^1/_2\, c\,(1-w^2)\sin\theta_0 \sin 2\tau^* + (1+w^2)\cos\theta_0] + \\ + \mu^2\,[(1-w^2)(\ldots) - {}^1/_2 (1+w^2)\sin 2\theta_0 \sin 2\tau^*] + \mu^3(\ldots) \qquad (2.8)$$

правая часть которого является периодической функцией τ^* периода π. Это уравнение обладает единственным периодическим решением W периода π, представляемым в виде ряда

$$W = w^* + \mu w_1 + \mu w_2 + \ldots$$

с периодическими коэффициентами, определяемыми из уравнений

$$2\frac{dw^*}{d\tau^*} = c(1 - w^{*2}) \qquad (2.9)$$

$$\frac{dw_j}{d\tau^*} = -cw_j + F_j(\tau^*, w^*, w_1, \ldots, w_{j-1}) \quad (j = 1, 2, \ldots) \qquad (2.10)$$

где F_j — периодическая по τ^* функция периода π.

Действительно, единственным периодическим решением уравнения (2.9) будет $w^* = 1$, а каждое из уравнений (2.10) в силу того, что c — действительное число, будет также обладать единственным периодическим решением [6].

Таким образом, получим выражение для W

$$W = 1 + \mu\frac{\cos\theta_0}{c} + \mu^2\left[\frac{\cos^2\theta_0}{2c^2} - \frac{3\sin 2\theta_0}{4(c^2+4)}(c\sin 2\tau^* - 2\cos 2\tau^*)\right] + \mu^3(\ldots) \qquad (2.11)$$

и, составляя для этого решения уравнение в вариациях, убеждаемся, что при достаточно малых μ периодическое решение (2.11) асимптотически устойчиво. Искомое же частное решение ($w_0 = 1$) уравнения (2.8) (его, вообще говоря, можно найти при помощи теоремы Пуанкаре [6]), в силу того, что

$$|w - W| \sim \mu \exp(-c\tau^*), \qquad \tau^* \sim \mu^{-1/2} t$$

очень быстро будет приближаться к решению W. Поэтому вместо решения уравнения (2.8) будем брать решение (2.11).

Из формул (1.8) и (2.11) получим выражения

$$\sin\alpha = 1 - {}^1/_2\,\mu^2 c^{-2}\cos^2\theta_0$$
$$\cos\alpha = -\mu c^{-1}\cos\theta_0 + {}^3/_4\mu^2(c^2+4)^{-1}\sin 2\theta_0\,(c\sin 2\tau^* - 2\cos 2\tau^*)$$

подставляя которые в соотношения (1.6), при помощи (1.7), (1.11), (2.7), будем иметь

$$y_1 = \left(\frac{c}{h}\right)^{1/2}\left\{-\frac{\cos\theta_0}{c} + \mu\left[\frac{3\sin 2\theta_0}{4(c^2+4)}(c\sin 2\tau^* - 2\cos 2\tau^*) - \frac{\cos\theta_0}{c}\right] + \mu^2(\ldots)\right\}$$
$$z_1 = \sqrt{\mathrm{ch}}\,\{1 + {}^1/_2\,\mu\sin\theta_0\sin 2\tau^* + {}^1/_8\,\mu^2\,[2\cos 2\theta_0(1-\cos 2\tau^*) + \\ + \sin^2\theta_0 \sin^2 2\tau^*] + \mu^3(\ldots)\} \qquad (2.12)$$

Из формул (1.2) (1.11) (2.20), (2.25) получим

$$\gamma_1 = \sin\theta_0\sin 2\tau^* + {}^1/_2\,\mu\,[\cos^2\theta_0 - {}^1/_2\sin^2\theta_0 - \cos 2\theta_0 \cos 2\tau^* - \\ - {}^1/_2 \sin^2\theta_0\cos 4\tau^*] + \mu^2(\ldots)$$
$$\gamma_2 = \sin\theta_0\cos 2\tau^* - \mu\,(c^{-1}\cos^2\theta_0 - {}^1/_2\cos 2\theta_0 \sin 2\tau^*) + \mu^2(\ldots) \qquad (2.13)$$
$$\gamma_3 = \cos\theta_0 + \mu\cos\theta_0\,(1 - \sin\theta_0\sin 2\tau^*) + \mu^2(..)$$

3. Для анализа движения гироскопа Гесса введем углы Эйлера θ, φ, ψ,

$$\cos\theta = \gamma_3, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2}{1-\gamma_3^2}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_3 - \frac{d\psi}{dt}\cos\theta \tag{3.1}$$

Из первой формулы (2.14), последней формулы (2.13) и формул (1.1), (1.11) получим

$$\theta = \theta_0 - 2c\omega_0^{-2}\lambda_1(1-\sin\theta_0\sin\omega_0 t) + \omega_0^{-4}(\ldots) \quad (\lambda_1 = ac^{-1}\Gamma\operatorname{ctg}\theta_0) \tag{3.2}$$

Подставляя во второе соотношение (3.1) формулы (1.1), (1.5), (2.12) (2.13) и интегрируя, будем иметь следующее выражение для угла прецессии:

$$\psi = \psi_0 - \omega_0^{-2}\lambda_1(2\sin\omega_0 t + c\cos\omega_0 t) + \omega_0^{-3}\lambda_2 t + \omega_0^{-4}(\ldots) \tag{3.3}$$
$$\lambda_2 = \lambda_1^2\sec\theta_0\,[(c^2+4)\cos^2\theta_0 - 2c^2]$$

Угол собственного вращения найдем при помощи формул (1.1), (1.5), (1.11), (2.12), (2.13), (3.1), (3.3) в виде

$$\varphi = \omega_0 t + \omega_0^{-2}\lambda_1\sec\theta_0\,[c\cos 2\theta_0(\cos\omega_0 t - 1) + 2\cos^2\theta_0\sin\omega_0 t] + \omega_0^{-3}(\ldots) \tag{3.4}$$

Для определения движения гироскопа Гесса при помощи полученных формул (3.2)—(3.4) возьмем на единичной сфере с центром в неподвижной точке сферический прямоугольник, образованный параллелями, отстоящими от средней параллели $\theta_0 - 2\omega_0^{-2}c\lambda_1$ на угол $\pm 2\omega_0^{-2}c\lambda_1\sin\theta_0$, и меридианами, отстоящими от среднего меридиана ψ_0 на угол $\pm\omega_0^{-2}\lambda_1(4+c^2)^{1/2}$. Тогда траекторией ($\theta_1 = \theta - \theta_0 + 2\omega_0^{-2}c\lambda_1$, $\psi_1 = \psi - \psi_0$) оси Oz на указанной единичной сфере, вращающейся с малой постоянной угловой скоростью $\omega_0^{-3}\lambda_2$ вокруг вертикали, будет эллипс

$$\frac{(\theta_1 + c\sin\theta_0\psi_1)^2}{(\lambda_3 c)^2} + \frac{\theta_1^2}{(2\lambda_3)^2} = 1 \qquad (\lambda_3 = \omega_0^{-2}c\lambda_1\sin\theta_0)$$

с главными осями, повернутыми на угол β

$$\operatorname{tg}2\beta = 8c\sin\theta_0\,(c^2 + 4 - 4c^2\sin^2\theta_0)^{-1}$$

относительно осей θ_1, ψ_1 и вписанный в указанный сферический прямоугольник.

Описывая этот эллипс, ось Oz гироскопа будет совершать в первом приближении периодическое движение с периодом $T^* = 2\pi\omega_0^{-1}$, касаясь в моменты времени $t^{(1)}$ и $t^{(2)}$

$$t^{(1)} = \omega_0^{-1}(\pi n + \varepsilon), \quad t^{(2)} = (2\omega_0)^{-1}(2n+1)\pi \quad (\operatorname{tg}\varepsilon = 2/c, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

крайних меридианов и параллелей и пересекая в моменты времени $t^{(3)}$ и $t^{(4)}$

$$t^{(3)} = {}^1\!/_2\,\omega_0^{-1}[(2n+1)\pi + 2\varepsilon], \qquad t^{(4)} = \omega_0^{-1}\pi n$$

средний меридиан ($\theta_1 = 0$) и среднюю параллель ($\psi_1 = 0$) .

Собственное вращение тела, как это следует из формулы (3.4), будет мало отличаться от равномерного вращения с большой угловой скоростью ω_0.

Проведенный анализ позволяет в достаточной мере проследить за движением гироскопа Гесса и зависимостью этого движения от конструктивных параметров гироскопа и его начальных значений.

Поступила 20 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Локсодромический маятник Гесса. Собр. соч., т. I, М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1948, стр. 257—274.
2. Ковалев А. М. Подвижный годограф угловой скорости в решении Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
3. Ковалев А. М. О движении тела в случае Гесса. Респ. межвед. сб. АН УССР. Механика твердого тела, вып. I, Киев, «Наукова думка», 1969.
4. Харламов П. В. Об уравнениях движения гиростата. Тр. межвуз. конф. по прикл. теории устойчивости движения и аналит. механ. Казань, 1964.
5. Гурса Э. Курс математического анализа, т. 1, ч. 2. М.— Л., Гостехтеоретиздат. 1933—34.
6. Дубошин Г. Н. Небесная механика. М., «Наука», 1964.