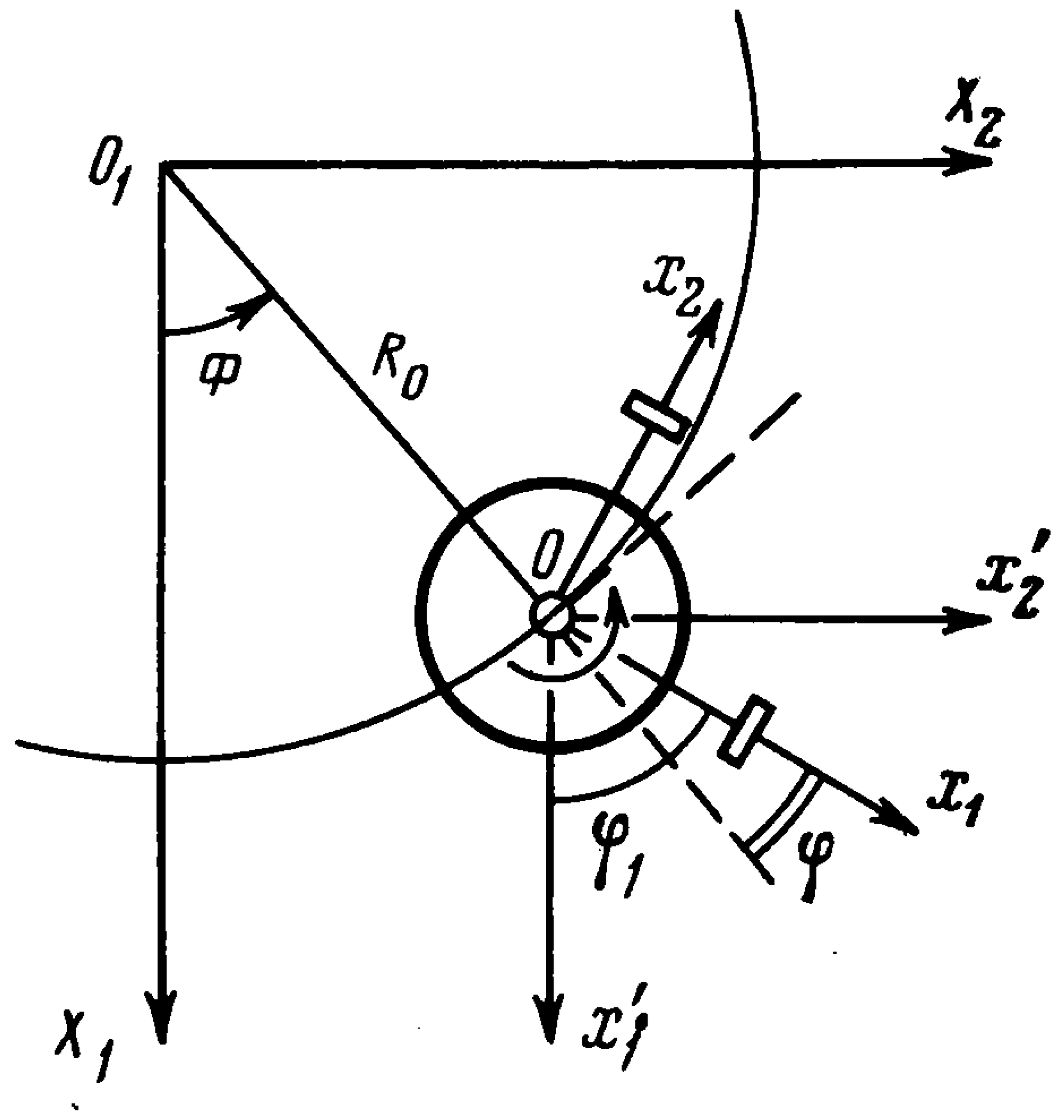
ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

В. В. Крементуло (Москва)

Дано решение задачи об оптимальной (в определенном смысле) стабилизации вращательного движения гиростата (твердого тела с тремя маховиками), центр масс которого перемещается по круговой орбите в центральном ньютоновском поле сил.

В работах [1,2] проведено решение аналогичной задачи стабилизации вращательного движения твердого тела, движущегося по инерции. Вопросы устойчивости положений относительного равновесия и стационарных движений твердых тел и гиростатов в ньютоновском поле сил детально изучены [3–6]. Известно, что стабилизация указанных движений твердого тела обеспечивается при помощи пассивного демпфирования [7,8].

1. Исходные уравнения движения. Постановка задачи. Придерживаясь обозначений работы [1], рассмотрим симметричный гиростат: твердое тело с тремя маховиками ($C_1 = C_2 = C$, $I_1 = I_2 = I$), движущийся в центральном ньютоновском поле сил (O_1 — притягивающий центр, O — центр масс гиростата). Уравнения движения гиростата [4,5] допускают следующее частное решение типа регулярной прецессии: центр масс O движется в плоскости $X_1O_1X_2$ по круговой орбите с радиусом R_0 с постоянной угловой скоростью $\Phi^{\cdot} = \omega_1$; гиростат вращается равномерно с относительной угловой скоростью $\varphi^{\cdot} = \omega$ вокруг оси симметрии Ox_3, направленной перпендикулярно плоскости орбиты; при этом два маховика, оси которых лежат в плоскости x_1Ox_2, неподвижны, а третий маховик с осью вращения Ox_3 либо неподвижен, либо вращается равномерно относительно тела. На фигуре и



таблице представлены следующие системы координат: $O_1X_1X_2X_3$ — инерциальная, $Ox_1x_2x_3$ — жестко связанная с гиростатом и направленная по осям маховиков, $Ox_1'x_2'x_3'$ — оси Резаля (ось Ox_3' совпадает с осью симметрии гиростата Ox_3, а оси Ox_1', Ox_2' лежат в экваториальной плоскости Ox_1x_2 и не участвуют во вращении гиростата вокруг оси Ox_3, в рассматриваемом ниже стационарном движении оси Ox_1', Ox_2' параллельны соответствующим осям O_1X_1, O_1X_2 инерциальной системы координат), пунктирными линиями обозначены оси орбитальной системы координат, направленные по радиусу-вектору центра масс гиростата, по касательной к орбите и по нормали к плоскости орбиты. Проекции мгновенной угловой скорости тела p_1, p_2, p_3 на оси $Ox_1x_2x_3$ и q_1, q_2, q_3 на оси $Ox_1'x_2'x_3'$ связаны соотношениями

	x_1'	x_2'	x_3'
X_1	β_{11}	β_{12}	β_{13}
X_2	β_{21}	β_{22}	β_{23}
X_3	β_{31}	β_{32}	β_{33}

$$p_1 = q_1 \cos\varphi_1 + q_2 \sin\varphi_1, \qquad p_2 = -q_1 \sin\varphi_1 + q_2 \cos\varphi_1, \qquad p_3 = q_3 + \varphi_1^{\cdot}$$
$$(\varphi_1^{\cdot} = \varphi^{\cdot} + \Phi^{\cdot}\beta_{33})$$

Пусть M — масса гиростата, X_1, X_2, X_3 — координаты его центра масс в системе $O_1X_1X_2X_3$, U — силовая функция гравитационных сил, которая зависит от координат X_1, X_2, X_3 и величин β_{13}, β_{23}, β_{33}, характеризующих положение оси симметрии Ox_3 гиростата в неподвижном пространстве [3], в наших обозначениях

$$U(X_1, X_2, X_3, \beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{33}) = \frac{\varkappa M}{R} + \frac{1}{2}\frac{\varkappa}{R^3}(C_3 - C) - \tag{1.1}$$
$$-\frac{3}{2}\frac{\varkappa}{R^5}(C_3 - C)(X_1\beta_{13} + X_2\beta_{23} + X_3\beta_{33})^2, \qquad R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$$

($\varkappa$ — гравитационная постоянная)

Тогда уравнения движения гиростата [1,3] имеют вид

$$MX^{\bullet\bullet}_i = \partial U / \partial X_i \qquad (i=1,2,3) \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} Cq_1^{\cdot} + (C_3 - C)\, q_2 q_3 + C_3 \varphi_1^{\cdot} q_2 + q_2 g_3 - q_3 g_2 + g_1^{\cdot} = M_{x'_1} \\ Cq_2^{\cdot} + (C - C_3)\, q_1 q_3 - C_3 \varphi_1^{\cdot} q_1 + q_3 g_1 - q_1 g_3 + g_2^{\cdot} = M_{x'_2} \\ C_3\,(q_3 + \varphi_1^{\cdot}) + q_1 g_2 - q_2 g_1 + g_3^{\cdot} = M_{x'_3} \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} g_1^{\cdot} + Iq_1^{\cdot} + (g_2 + Iq_2)\, \varphi_1^{\cdot} = w_1, \quad g_2^{\cdot} + Iq_2^{\cdot} - (g_1 + Iq_1)\, \varphi_1^{\cdot} = w_2 \\ g_3^{\cdot} + I_3\,(q_3 + \varphi_1^{\cdot})^{\cdot} = w_3 \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\beta_{i1}^{\bullet} + q_2\beta_{i3} - q_3\beta_{i2} = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.5}$$

Здесь g_1, g_2, g_3 — относительные кинетические моменты маховиков, приведенные к осям $Ox'_1x'_2x'_3$, через w_1, w_2, w_3 обозначены новые управляющие моменты, связанные со старыми u_1, u_2, u_3 соотношениями

$$w_1 = u_1 \cos\varphi_1 - u_2 \sin\varphi_1, \quad w_2 = u_1 \sin\varphi_1 + u_2 \cos\varphi_1, \quad w_3 = u_3 \tag{1.6}$$

Моменты гравитационных сил $M_{x'_1}$, $M_{x'_2}$, $M_{x'_3}$ относительно осей $Ox'_1x'_2\,x'_3$ имеют вид [3]

$$M_{x_1'} = -\Sigma \frac{\partial U}{\partial \beta_{i3}} \beta_{i2}, \qquad M_{x_2'} = \Sigma \frac{\partial U}{\partial \beta_{i3}} \beta_{i1}, \qquad M_{x_3'} = 0$$

На основании (1.1) имеем

$$\begin{gathered} M_{x_1'} = 3\varkappa\,(C_3 - C)\,(\Sigma X_i\beta_{i2})\,(\Sigma X_i\beta_{i3})\,R^{-5} \\ M_{x_2'} = -3\varkappa\,(C_3 - C)\,(\Sigma X_i\beta_{i1})\,(\Sigma X_i\beta_{i3})\,R^{-5}, \qquad M_{x_3'} = 0 \end{gathered} \tag{1.7}$$

Введем вместо X_1, X_2, X_3 сферические координаты центра масс R, Ψ, Φ

$$X_1 = R\cos\Psi\cos\Phi, \quad X_2 = R\cos\Psi\sin\Phi, \quad X_3 = R\sin\Psi$$

Отметим, что в уравнения (1.4) вращательного движения маховиков моменты гравитационных сил не входят вследствие симметрии маховиков.

Изучаемый стационарный режим записывается в виде

$$\begin{gathered} R = R_0,\ R^{\cdot} = 0,\ \Psi = 0,\ \Psi^{\cdot} = 0,\ \Phi = \omega_1 t,\ \Phi^{\cdot} = \omega_1 \\ \varphi^{\bullet}_1 = \omega_1 + \omega, \quad q_i = 0, \quad \beta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \\ g_1 = g_2 = 0, \ g_3 = g_3^{\circ} = \mathrm{const}, \ w_i = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3) \end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь ω — произвольно, а ω_1 связано с U (1.1) соотошением [3]

$$\omega_1 = -\frac{1}{MR_0}\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)_0$$

Индекс нуль означает, что рассматриваемая функция вычислена на стационарном движении (1.8). При $\omega = 0$ получаем как частный случай положение относительного равновесия гиростата на круговой орбите.

Уравнения движения (1.2) — (1.5) допускают помимо тривиальных три интеграла, выражающих постоянство проекций кинетического момента гиростата на оси $O_1X_1X_2X_3$

$$L_i + (Cq_1 + g_1)\,\beta_{i1} + (Cq_2 + g_2)\,\beta_{i2} + [C_3\,(q_3 + \varphi^{\cdot}_1) + g_3]\beta_{i3} = h_i \quad (i=1,2,3) \tag{1.9}$$

Здесь

$$\begin{gathered} L_1 = MR^2\,(\Psi^{\cdot} \sin\Phi - \Phi^{\cdot} \sin\Psi\cos\Psi\cos\Phi) \\ L_2 = -MR^2\,(\Psi^{\cdot} \cos\Phi + \Phi^{\cdot} \sin\Psi\cos\Psi\sin\Phi), \quad L_3 = MR^2\Phi^{\cdot}\cos^2\Psi \end{gathered} \tag{1.10}$$

проекции на оси $O_1X_1X_2X_3$ вектора кинетического момента центра масс гиростата.

Преобразуем [1] при помощи (1.9) уравнения вращательного движения маховиков (1.4), исключив из последних g_1, g_2, g_3. В результате с учетом (1.2) получим

$$\begin{gathered} (C - I)\, q_1^{\bullet} = -(C - I)\, q_2\varphi_1^{\bullet} + (q_3 + \varphi_1^{\bullet})\, \Sigma\,(h_i - L_i)\,\beta_{i2} - q_2\Sigma\,(h_i - L_i)\,\beta_{i3} + M_{x_1'} - w_1 \\ (C - I)\, q_2^{\bullet} = (C - I)\, q_1\varphi_1^{\bullet} - (q_3 + \varphi_1^{\bullet})\, \Sigma\,(h_i - L_i)\,\beta_{i1} + q_1\Sigma\,(h_i - L_i)\,\beta_{i3} + M_{x_2'} - w_2 \\ (C_3 - I_3)\,(q_3 + \varphi_1^{\bullet})^{\bullet} = q_2\Sigma\,(h_i - L_i)\,\beta_{i1} - q_1\Sigma\,(h_i - L_i)\,\beta_{i2} - w_3 \end{gathered} \tag{1.11}$$

Замкнутую систему преобразованных уравнений движения гиростата относительно переменных R, Ψ, Φ, q_i, β_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ составляют уравнения (1.2), (1.11), (1.5).

Для исследуемого стационарного режима (1.8) постоянные h_i равны

$$h_1^\circ = h_2^\circ = 0, \qquad h^\circ{}_3 = MR_0^2\omega_1 + C_3(\omega_1 + \omega) + g^\circ{}_3$$

Приняв движение (1.8) за невозмущенное, обозначим возмущенное движение через

$$R_0 + R,\quad R^\cdot,\quad \Psi,\quad \Psi^\cdot,\quad \omega_1 t + \Phi,\quad \omega_1 + \Phi^\cdot,\quad 1 + \beta_{ik} \quad (i = k)$$
$$\beta_{ik}\,(i \neq k),\quad h_1,\quad h_2,\quad h^\circ + h_3,\quad w_i,\quad (i, k = 1, 2, 3)$$
$$(h^\circ = h_3^\circ - MR_0^2\omega_1)$$

сохраняя тем самым за возмущениями обозначения исходных переменных (h_i — начальные возмущения кинетического момента гиростата). Тогда на основании (1.2), (1.11), (1.5) получим следующие уравнения возмущенного движения, соответствующие (1.8):

$$Y_i(R, \Psi, \Phi, R^\cdot, \Psi^\cdot, \Phi^\cdot, R^{\cdot\cdot}, \Psi^{\cdot\cdot}, \Phi^{\cdot\cdot}, \beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{33}, t) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.12}$$

$$\begin{gathered} q_1^\cdot = h_{12}q_3 - (h_{13} + \omega^*)\, q_2 + \omega^*\Sigma\, h_{1i}\beta_{i2} + \\ + \beta_{13}\nu \sin 2(\omega_1 t + \Phi) + 2\,\beta_{23}\nu \sin^2(\omega_1 t + \Phi) + v_1 + Q_1 + U_1 \\ q_2^\cdot = (h_{13} + \omega^*)\, q_1 - h_{11}q_3 - \omega^*\, \Sigma\, h_{1i}\beta_{i1} - \\ - 2\,\beta_{13}\nu \cos^2(\omega_1 t + \Phi) - \beta_{23}\nu \sin 2(\omega_1 t + \Phi) + v_2 + Q_2 + U_2 \\ q_3^\cdot = h_{31}q_2 - h_{32}q_1 + v_3 + Q_3 \\ \beta_{ii}^\cdot = B_{ii} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \beta_{12}^\cdot = -q_3 + B_{12}, \quad \beta_{13}^\cdot = q_2 + B_{13} \ (1\,2\,3) \end{gathered} \tag{1.13}$$

Здесь

$$\frac{h_j}{C - I} = h_{1j}, \qquad \frac{h_j}{C_3 - I_3} = h_{3j}\ (j = 1, 2), \qquad \frac{h^\circ + h_3}{C - I} = h_{13}, \qquad \nu = \frac{3}{2}\frac{\varkappa}{R_0^3}\frac{C_3 - C}{C - I}$$
$$\omega^* = \omega_1 + \omega$$

Управляющие моменты v_i связаны с w_i соотношениями

$$\begin{gathered} (C - I)\, v_1 = -w_1 + \omega^* h_2, \ (C - I) v_2 = -w_2 - \omega^* h_1, \\ (C_3 - I_3)\, v_3 = -w_3 \end{gathered} \tag{1.14}$$

члены не ниже второго порядка малости относительно R, $R^\cdot$, Ψ, $\Psi^\cdot$, $\Phi^\cdot$, $q_i^\cdot$, β_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ имеют вид

$$\begin{gathered} B_{i1} = q_3\beta_{i2} - q_2\beta_{i3} \quad (1\,2\,3) \quad (i = 1, 2, 3) \\ (C - I)\, Q_1 = \Sigma\, [h_i B_{i1} - L_i(\omega^*\beta_{i2} + B_{i1})] + U_{1\beta} \\ (C - I)\, Q_2 = \Sigma\, [h_i B_{i2} + L_i(\omega^*\beta_{i1} - B_{i2})] + U_{2\beta} \\ (C_3 - I_3)\, Q_3 = \Sigma\, (h_i - L_i)\, B_{i3} \end{gathered} \tag{1.15}$$

$$\begin{gathered} L_1 = M(R_0 + R)^2\, [\Psi^\cdot \sin(\omega_1 t + \Phi) - (\omega_1 + \Phi^\cdot) \sin \Psi \cos \Psi \cos(\omega_1 t + \Phi)] \\ L_2 = -M(R_0 + R)^2\, [\Psi^\cdot \cos(\omega_1 t + \Phi) + (\omega_1 + \Phi^\cdot) \sin \Psi \cos \Psi \sin(\omega_1 t + \Phi)] \\ L_3 = M(R_0 + R)^2 (\omega_1 + \Phi^\cdot) \cos^2\Psi - MR_0^2\omega_1 \end{gathered} \tag{1.16}$$

$$\begin{gathered} U_1(R, \Psi, \Phi, t) = \frac{3\varkappa}{2(R_0 + R)^3}\frac{C_3 - C}{C - I} \sin 2\Psi \sin(\omega_1 t + \Phi) \\ U_2(R, \Psi, \Phi, t) = -\frac{3\varkappa}{2(R_0 + R)^3}\frac{C_3 - C}{C - I} \sin 2\Psi \cos(\omega_1 t + \Phi) \end{gathered} \tag{1.17}$$

В этих выражениях L_i — возмущения кинетического момента центра масс гиростата (1.10); через $U_{1\beta}$, $U_{2\beta}$ обозначены члены не ниже второго порядка малости, возникающие за счет гравитационных моментов (1.7) и обращающиеся в нуль при $\beta_{ik} = 0$ $(i, k = 1, 2, 3)$; члены U_1, U_2 также обусловлены (1.7), но зависят только от возмущений орбиты центра масс гиростата.

Уравнения движения центра масс (1.12) для сокращения записи детально не выписаны, поскольку явный вид этих уравнений для дальнейшего не существенен.

Задача оптимальной стабилизации формулируется следующим образом: так подобрать управления v_i в виде функций переменных q_i, β_{ik}, описывающих движение гиростата вокруг центра масс (и возможно переменных R, Ψ, Φ), чтобы нулевое решение

$$R = 0,\ \Phi = 0,\ \Psi = 0,\ R^{\cdot} = 0,\ \Psi^{\cdot} = \Phi^{\cdot} = 0$$

$$q_i = 0, \qquad \beta_{ik} = 0, \qquad h_i = 0 \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.18}$$

уравнений (1.13) было асимптотически устойчивым по части переменных q_i, β_{ik} и при этом выполнялось условие минимума некоторого функционала

$$\int_0^\infty \Omega\,(q_1, q_2, q_3, \beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{33}, R, \Psi, \Phi, R^{\cdot}, \Psi^{\cdot}, \Phi^{\cdot}, v_1, v_2, v_3, t)\, dt$$

2. Решение задачи стабилизации при условии невозмущаемости орбиты. Поставленную задачу решим сначала в предположении, что круговая орбита центра масс гиростата не возмущается, т. е.

$$R = 0,\ \Psi = 0,\ \Phi = 0,\ R^{\cdot} = 0,\ \Psi^{\cdot} = 0,\ \Phi^{\cdot} = 0,\ L_i = 0,\ U_1 = U_2 = 0 \tag{2.1}$$

Такая постановка задачи, на наш взгляд, не лишена смысла, так как возмущения круговой орбиты практически не изменяют условий устойчивости стационарных движений твердых тел и гиростатов [3–5], полученных в предположении о невозмущаемости орбиты.

Линейная часть уравнений возмущенного движения (1.13) при условиях (2.1) отличается от линейной части соответствующих уравнений, установленных в работе [1], лишь наличием членов с периодическими коэффициентами, которые, однако, существенно влияют на характер полученных решений.

Рассмотрим сначала приближенную систему уравнений [1], представленную уравнениями (1.13), (2.1) без учета нелинейных членов Q_1°, Q_2°, Q_3° и имеющую нулевое решение

$$q_i = 0,\ \beta_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1,\ 2,\ 3) \tag{2.2}$$

(через Q_i° обозначены члены Q_i(1.15) при условиях (2.1)).

Придерживаясь обозначений работы [1], зададим подынтегральную функцию Ω_1 минимизируемого функционала в виде

$$\Omega_1 = F_1\,(q_1, q_2, q_3, t) + F_2\,(\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{33}, t) + \Sigma n_i v_i^2 + \\ + \Lambda_1\,(q_1, q_2, q_3, \beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{33}, t) \tag{2.3}$$

$$F_1\,(q_1, q_2, q_3, t) = \Sigma e_{ik}\,(t)\, q_i q_k \tag{2.4}$$

Здесь F_1, F_2 — определенно-положительные квадратичные формы с периодическими коэффициентами. Оптимальную функцию Ляпунова V° разыскиваем в виде

$$2\,V^\circ = 2\,\Phi_0 + \Sigma\, k_i \Phi_{ii} \tag{2.5}$$

$$2\Phi_0 = -\,2\Sigma k_i \beta_{ii} + \Sigma\, m_i q_i^2 + 2\,q_1\,\Sigma\, a_{ik}\,(t)\,\beta_{ik} + 2q_2 \Sigma b_{ik}\,(t)\,\beta_{ik} + 2q_3 \Sigma\, c_{ik}\,(t)\,\beta_{ik}$$

$$\Phi_{kl} = \beta_{kl} + \beta_{lk} + \Sigma\, \beta_{ki}\beta_{li} = 0 \qquad (k, l = 1,\ 2,\ 3;\ k \leqslant l)$$

Согласно теореме Н. Н. Красовского [9] с учетом теорем В. В. Румянцева [10], приходим к уравнению в частных производных для V°

$$\frac{\partial V^\circ}{\partial t} - \sum \frac{1}{4\,n_i}\left(\frac{\partial V^\circ}{\partial q_i}\right)^2 + \frac{\partial V^\circ}{\partial q_1}\Big[h_{12} q_3 - (h_{13} + \omega^*)\, q_2 + \\ + \omega^* \sum h_{1i}\beta_{i2} + \beta_{13}\nu \sin 2\omega_1 t + 2\beta_{23}\nu \sin^2 \omega_1 t\Big] + \\ + \frac{\partial V^\circ}{\partial q_2}\Big[(h_{13} + \omega^*)\, q_1 - h_{11} q_3 - \omega^* \sum h_{1i}\beta_{i1} - 2\,\beta_{13}\nu \cos^2 \omega_1 t - \\ - \beta_{23}\nu \sin 2\,\omega_1 t\Big] + \frac{\partial V^\circ}{\partial q_3}(h_{31} q_2 - h_{32} q_1) + \left(\frac{\partial V^\circ}{\partial \beta_{32}} - \frac{\partial V^\circ}{\partial \beta_{23}}\right) q_1 + \\ + \left(\frac{\partial V^\circ}{\partial \beta_{13}} - \frac{\partial V^\circ}{\partial \beta_{31}}\right) q_2 + \left(\frac{\partial V^\circ}{\partial \beta_{21}} - \frac{\partial V^\circ}{\partial \beta_{12}}\right) q_3 + \sum \frac{\partial V^\circ}{\partial \beta_{ik}}\, B_{ik} + \\ + F_1\,(q_1, q_2, q_3, t) + F_2\,(\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{33}, t) + \Lambda_1\,(q_1, q_2, q_3, \beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{33}, t) = 0 \tag{2.6}$$

Выделяя коэффициенты при одинаковых членах второго порядка, получаем системы линейных дифференциальных уравнений, позволяющие выразить a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, e_{ik} как функции времени и основных параметров k_i, m_i, n_i $(i, k = 1, 2, 3)$. При решении этих уравнений следует выбрать наиболее простые частные решения. Так, для a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} (за исключением тех, которые отвечают индексам 13, 23) находим постоянные значения, которые получаются из решений, найденных в работе [1], заменой ω на ω^*.

Решения для a_{j3}, b_{j3}, c_{j3} $(j = 1, 2)$ являются суммами постоянных величин a_{j3}^*, b_{j3}^*, c_{j3}^* и периодических функций частоты $2\omega_1$, обусловленных влиянием центрального силового поля

$$\begin{aligned}
a_{j3} &= a_{j3}^* + K_{j3}\cos 2\,\omega_1 t + L_{j3}\sin 2\,\omega_1 t \\
b_{j3} &= b_{j3}^* + M_{j3}\cos 2\,\omega_1 t + N_{j3}\sin 2\,\omega_1 t \\
c_{j3} &= c_{j3}^* \qquad (j = 1, 2)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Соответствующие вычисления проводятся без особого труда.

Коэффициенты $e_{ik}\,(t)$ формы F_1 выражаются формулами

$$\begin{gathered}
d_1^2 n_1 + a_{23} - a_{32} = e_{11}, \qquad d_2^2 n_2 + b_{31} - b_{13} = e_{22}, \qquad d_3^2 n_3 + c_{12} - c_{21} = e_{33} \\
(h_{13} + \omega^*)(m_1 - m_2) - a_{13} + a_{31} - b_{32} + b_{23} = 2e_{12} \\
-h_{12} m_1 + h_{32} m_3 - a_{21} + a_{12} - c_{32} + c_{23} = 2e_{13} \\
h_{11} m_2 - h_{31} m_3 - b_{21} + b_{12} - c_{13} + c_{31} = 2e_{23} \quad (d_i = m_i/2n_i;\ i = 1,2,3)
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Характер полученных решений a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, e_{ik} таков, что при достаточно больших d_i функции V° (2.5) и F_1 (2.4) являются определенно-положительными.

Форму $F_2\,(\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{33}, t)$ в соответствии с (2.5) (2.6) получаем в виде

$$\begin{gathered}
F_2 = \frac{1}{4n_1}(\Sigma a_{ik}\beta_{ik})^2 + \frac{1}{4n_2}(\Sigma b_{ik}\beta_{ik})^2 + \frac{1}{4n_3}(\Sigma c_{ik}\beta_{ik})^2 + \\
+ [\omega^*\Sigma h_{1i}\beta_{i1} + \nu\beta_{13}(1 + \cos 2\,\omega_1 t) + \nu\beta_{23}\sin 2\omega_1 t]\,(\Sigma b_{ik}\beta_{ik}) - \\
- [\omega^*\Sigma h_{1i}\beta_{i2} + \nu\beta_{13}\sin 2\omega_1 t + \nu\beta_{23}(1 - \cos 2\omega_1 t)]\,(\Sigma a_{ik}\beta_{ik})
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Для установления знака (2.9) перейдем [1] от зависимых переменных β_{ik} к независимым — углам Крылова θ, ψ

$$\beta_{13} = -\beta_{31} = \psi + \ldots, \quad \beta_{32} = -\beta_{23} = \theta + \ldots, \quad \beta_{21} = 0 \tag{2.10}$$

(многоточие означает члены более высокого порядка малости). Полагая для простоты $k_i = k$, $m_i = m$, $n_i = n$, $d_i = d$ $(i = 1, 2, 3)$ и считая d достаточно большим, выпишем в найденных решениях a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} главные члены

$$\begin{aligned}
a_{13} &= \frac{m\nu}{d}\sin 2\omega_1 t + \ldots, & b_{13} &= \frac{k - m\nu}{d} - \frac{m\nu}{d}\cos 2\omega_1 t + \ldots \\
a_{23} &= -\frac{k - m\nu}{d} - \frac{m\nu}{d}\cos 2\,\omega_1 t + \ldots, & b_{23} &= -\frac{m\nu}{d}\sin 2\,\omega_1 t + \ldots \\
b_{31} &= -\frac{k + mh_{13}\omega^*}{d} + \ldots, & a_{32} &= \frac{k + mh_{13}\omega^*}{d} + \ldots
\end{aligned} \tag{2.11}$$

(остальные коэффициенты a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} либо равны нулю, либо начинаются с членов, содержащих в знаменателях d в степенях выше первой). С учетом (2.10), (2.11) форма (2.9) принимает выражение

$$\begin{gathered}
F_2\,(\theta, \psi, t) = A_1(\psi^2 + \theta^2) + A_2(\psi\sin\omega_1 t + \theta\cos\omega_1 t)^2 + A_3(\psi\cos\omega_1 t - \\
- \theta\sin\omega_1 t)^2 + \varepsilon\Phi_2(\theta, \psi, t)
\end{gathered} \tag{2.12}$$

$$A_1 = \frac{(2\,k - m\nu)^2 - (mh_{13}\omega^*)^2}{2dm} - \frac{2k\nu}{d} + 3n\nu^2$$

$$A_2 = \frac{2\nu}{d}(2k - m\nu), \qquad A_3 = \frac{2\nu}{d}(2k + mh_{13}\omega^* - 2m\nu)$$

Здесь ε — малый параметр, многоточие означает члены не ниже третьего порядка малости, не влияющие на знак F_2, функция Φ_2 — квадратичная форма относительно ψ, θ. Функция F_2 является определенно-положительной [9, 11] при условиях $A_j > 0$ ($i = 1, 2, 3$), т. е.

$$(2k - m\nu)^2 - (mh_{13}\omega^*)^2 - 4km\nu + 3m^2\nu^2 > 0 \qquad (2.13)$$
$$\nu(2k - m\nu) > 0, \quad \nu(2k + mk_{13}\omega^* - 2m\nu) > 0$$

Учитывая, что $k > 0$, $m > 0$, из (2.13) приходим к неравенствам

$$\nu > 0, \qquad 2k - m\nu > 0, \qquad 2k + mh_{13}\omega^* - 2m\nu > 0 \qquad (2.14)$$
$$(2k - m\nu)^2 - (mh_{13}\omega^*)^2 - 4km\nu + 3m^2\nu^2 > 0$$

Первое неравенство выражает связь между моментами инерции гиростата

$$C_3 > C \qquad (2.15)$$

(аналогичное условие получено для обычной устойчивости тела при $\omega = 0$ в работе [6]), остальные неравенства связывают величины ω^*, h_3 с исходными параметрами k, m. Заметим, что в реальной задаче, где R_0 велико, ν будет достаточно мало (порядка $1/R_0^3$). Полагая для простоты $g_3^\circ = 0$ (маховики в невозмущенном движении (1.8) не вращаются), получим при $\nu \to 0$, что второе неравенство (2.14) выполняется тождественно, а третье и четвертое приводят к соотношению [1]

$$|h_{13}\omega^*| < 2k/m \qquad (2.16)$$

которое при фиксированных k, m ограничивает выбор угловой скорости ω^* и области допустимых начальных возмущений h_3.

Однако ограничение (2.15), обусловленное влиянием центрального силового поля, по-прежнему, сохраняется, и это является существенным отличием рассматриваемой задачи от задачи, изученной ранее в работе [1]. Учитывая сделанное выше замечание относительно функций V° и F_1, приходим к выводу, что при достаточно большом d и условиях (2.14), (2.15) построенные функции (2.3), (2.5) удовлетворяют всем требованиям теорем [9,10] и, следовательно, решают задачу оптимальной стабилизации движения (2.2) в силу приближенной системы уравнений, полученной из (1.13), (2.1) при $Q_1^\circ = Q_2^\circ = Q_3^\circ = 0$. Старшие члены функции Ω_1 (2.3) следует взять в виде

$$\Lambda_1 = -\Sigma(q_1a_{ik} + q_2b_{ik} + q_3c_{ik})B_{ik}$$

Искомое оптимальное управление с учетом (1.6), (1.14) и выражений

$$v_i^\circ = -\frac{1}{2n_i}\frac{\partial V^\circ}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

имеет вид

$$u_1^\circ = \omega^*(h_2\cos\omega^*t - h_1\sin\omega^*t) + (C - I)\Big[d_2q_2\sin\omega^*t +$$
$$+ d_1q_1\cos\omega^*t + \frac{1}{2n_1}(\Sigma a_{ik}\beta_{ik})\cos\omega^*t + \frac{1}{2n_2}(\Sigma b_{ik}\beta_{ik})\sin\omega^*t\Big]$$
$$u_2^\circ = -\omega^*(h_2\sin\omega^*t + h_1\cos\omega^*t) + (C - I)\Big[d_2q_2\cos\omega^*t -$$
$$- d_1q_1\sin\omega^*t - \frac{1}{2n_1}(\Sigma a_{ik}\beta_{ik})\sin\omega^*t + \frac{1}{2n_2}(\Sigma b_{ik}\beta_{ik})\cos\omega^*t\Big]$$
$$u_3^\circ = (C_3 - I_3)\left(d_3q_3 + \frac{1}{2n_3}\Sigma c_{ik}\beta_{ik}\right) \qquad (2.17)$$

Легко видеть, что оптимальная функция Ляпунова (2.5), а значит, и оптимальное управление (2.17) при упомянутых условиях (2.14), (2.15) решают задачу стабилизации движения (2.2) в силу нелинейных уравнений (1.13), (2.1), если подынтегральную функцию (2.3) заменить функцией

$$\Omega^\circ = \Omega_1 - \sum\frac{\partial V^\circ}{\partial q_i}Q_i^\circ \qquad (2.18)$$

отличающейся от (2.3) наличием дополнительных членов не ниже третьего порядка малости.

3. Полное решение задачи стабилизации. Рассмотрим точные уравнения возмущенного движения (1.13) относительно переменных R, Ψ, Φ, q_i, β_{ik}, $(i, k = 1, 2, 3)$ и представим искомое управление v_i как сумму двух управлений

$$v_i = v_i^\circ + v_i^* \qquad (u_i = u_i^\circ + u_i^*) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.1}$$

одно из которых зависит только от фазовых координат стабилизируемого тела, а другое — только от возмущений орбиты R, Ψ, Φ. Второе управление назовем корректирующим и выберем его заранее, положив

$$v_j^* = -U_j \quad (j = 1, 2), \qquad v_3^* = 0 \tag{3.2}$$

Основное управление v_i° будем разыскивать в соответствии с ранее разработанным методом. Воспользуемся найденной в п. 2 функцией Ляпунова (2.5), т. е. примем соответствующее управление u_i° в виде (2.17). При этом подынтегральная функция минимизируемого функционала принимает выражение

$$\Omega = \Omega_1 - \sum \frac{\partial V^\circ}{\partial q_i} Q_i \tag{3.3}$$

Здесь Q_i определяется согласно (1.15), (1.16). Функция Ω должна быть определенно-положительной по переменным q_i, β_{ik}, однако она теперь зависит и от переменных R, Ψ, Φ, $R^\cdot$, $\Psi^\cdot$, $\Phi^\cdot$, которые входят в члены не ниже третьего порядка малости и в принципе могут нарушить знакоопределенность функций Ω_1 (2.3). Главную часть Ω_1 составляет знакоопределенная квадратичная форма от q_i, β_{ik}, главной частью суммы, входящей в (3.3), является знакопеременная квадратичная форма от q_i, β_{ik} с коэффициентами — аналитическими функциями возмущений R, Ψ, $R^\cdot$, $\Psi^\cdot$, $\Phi^\cdot$, обращающимися в нуль при $R = 0$, $\Psi = 0$, $R^\cdot = 0$, $\Psi^\cdot = \Phi^\cdot = 0$. При условии малости указанных возмущений эти коэффициенты будут сколь угодно малы, а значит, функция Ω будет определенно-положительной [9] по q_i, β_{ik}. Итак, управление (2.17), (3.1), (3.2) решает поставленную задачу стабилизации движения (1.18), если центр масс гиростата движется по устойчивой круговой орбите.

Для доказательства устойчивости движения (1.18) по R, Ψ, $R^\cdot$, $\Psi^\cdot$, $\Phi^\cdot$, воспользуемся принципом сведения [9,12], рассматривая переменные R, Ψ, $R^\cdot$, $\Psi^\cdot$, $\Phi^\cdot$, как критические а q_i, β_{ik} как некритические. Согласно этому принципу, задача устойчивости решается на основании «укороченной» системы уравнений относительно R, Ψ, $R^\cdot$, $\Psi^\cdot$, $\Phi^\cdot$, представленной уравнениями (1.12) при условиях

$$q_i = 0, \qquad \beta_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{3.4}$$

Следовательно, укороченная система уравнений описывает движение гиростата в центральном поле сил при отсутствии внутренних управлений, зависящих от q_i, β_{ik}. Устойчивость нулевого решения

$$R = 0, \ \Psi = 0, \ R^\cdot = 0, \ \Psi^\cdot = \Phi^\cdot = 0 \tag{3.5}$$

этой системы по отношению к R, Ψ, $R^\cdot$, $\Psi^\cdot$, $\Phi^\cdot$ легко установить при помощи функции Ляпунова [3]

$$W = W_1 - \omega_1 W_2 + \frac{c}{MR^2} W_2^2 \tag{3.6}$$

составленной из интегралов энергии W_1 и кинетического момента W_2 относительно оси O_1X_3. Вычисления показывают, что при достаточно большом $c > 0$ функция W является определенно-положительной по всем выше указанным переменным. Из устойчивости решения (3.5) вытекает устойчивость движения (1.18) по всем переменным в силу полных уравнений (1.13). Таким образом, для нахождения управления v°_i (3.1) можно использовать функцию Ляпунова (2.5), если в последнюю внести небольшие изменения.

Заметим, что рассматриваемое движение (1.8), (1.18) не обладает устойчивостью по переменной Φ, так как любое малое возмущение $\Phi^{\cdot} = \Delta\omega_1$ приводит к росту Φ по закону

$$\Phi = (\Delta\omega_1)\, t \tag{3.7}$$

Переменная Φ входит лишь как аргумент в ограниченные функции $\sin(\omega_1 t + \Phi)$, $\cos(\omega_1 t + \Phi)$; этот факт не нарушает предшествующих выводов, основанных на устойчивости изучаемого стационарного движения относительно переменных R, Ψ, $R^{\cdot}$ $\Psi^{\cdot}$, $\Phi^{\cdot}$, но приводит к необходимости замены в уравнениях (1.13) аргумента периодических функций $\omega_1 t + \Phi$ на $(\omega_1 + \Delta\omega_1)\, t$. Поэтому вместо коэффициентов функции Ляпунова a_{j3}, b_{j3}, c_{j3} $(j = 1, 2)$, полученных ранее в виде (2.7), будем иметь $a_{j3}(\Delta\omega_1)$, $b_{j3}(\Delta\omega_1)$, $c_{j3}(\Delta\omega_1)$, задаваемые прежними выражениями (2.7), в которых аргумент $\omega_1 t$ заменен на $(\omega_1 + \Delta\omega_1)\, t$. Это также касается функций (1.17), (2.3). Следовательно, управление (2.17), (3.1), (3.2), т. е.

$$u_1 = u_1^{\circ}(\Delta\omega_1) + (C - I)\,[U_1(\Delta\omega_1)\cos\omega^* t + U_2(\Delta\omega_1)\sin\omega^* t]$$
$$u_2 = u_2^{\circ}(\Delta\omega_1) + (C - I)\,[-U_1(\Delta\omega_1)\sin\omega^* t + U_2(\Delta\omega_1)\cos\omega^* t]$$
$$u_3 = u_3^{\circ}(\Delta\omega_1)$$

обеспечивает при условиях (2.14), (2.15) оптимальную стабилизацию движения (1.8), (1.18), причем подынтегральная функция минимизируемого функционала имеет вид (3.3). Отметим, что в реальных условиях, когда R_0 весьма велико, корректирующее управление (3.2), (1.17), обусловленное возмущаемостью орбиты центра масс гиростата, сколь угодно мало и практически не играет существенной роли.

В предлагаемой работе изучена оптимальная стабилизация лишь одного из возможных стационарных движений гиростата при помощи внутренних управляющих моментов, однако разработанный метод позволяет в принципе решать задачи стабилизации различных положений относительного равновесия и стационарных движений гиростатов в ньютоновском поле сил.

Поступила 23 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Крементуло В. В. Об оптимальной стабилизации вращательного движения твердого тела с неподвижной точкой при помощи маховиков. Инж. ж. МТТ, 1966, № 6.
2. Крементуло В. В., Соколова Л. Е. Об оптимальной стабилизации вращательного движения твердого тела при помощи управляемого гироскопа. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 5.
3. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
4. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников, М., ВЦ АН СССР, 1967.
5. Анчев А. А. О стабилизации относительного равновесия спутника с маховиками. Космические исследования, 1966, т. 4, № 2.
6. Черноусько Ф. Л. Об устойчивости регулярной прецессии спутника. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
7. Охоцимский Д. Е., Сарычев В. А. Система гравитационной стабилизации искусственных спутников. В сб.: «Искусственные спутники Земли», М., Изд-во АН СССР, 1963, вып. 16.
8. Сарычев В. А. Исследование динамики системы гравитационной стабилизации. В сб.: «Искусственные спутники Земли», М., Изд-во АН СССР, 1963, вып. 16.
9. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения, изд. 2. М., «Наука», 1966.
10. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астрон. физ., химии, 1957, № 4.
11. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962.
12. Дыхман Е. И. Некоторые теоремы устойчивости. Изв. АН КазССР, сер. матем. и механ., 1950, вып. 4.