Замечание 3.1. Пусть в рассмотренной выше задаче об упругом маятнике соотношение частот вертикальных и горизонтальных колебаний будет (1 : 2) (а не (2 : 1), как в [1]). Специфика гамильтониана (3.2) такова, что при приведении к нормальной форме (с точностью до членов выше третьего порядка малости) коэффициент A в выражении (2.1) будет равен нулю. Таким образом, нормальная форма (2.1) в этом случае будет иметь вырожденный характер. Поэтому по сравнению с обычной картиной перекачки энергии при резонансе третьего порядка в системе с двумя степенями свободы, для анализа эффектов нелинейной связи с этом случае следует привлечь более старшие члены в исходном гамильтониане (и в нормальной форме). Подробнее эту картину рассмотрим в одной из последующих заметок.

Автор благодарит В. В. Румянцева и Л. Г. Хазина за интерес к работе и полезные обсуждения.

Поступила 27 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Витт А., Горелик Г. Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем. Ж. техн. физ., 1933, т. 3, вып. 2—3.
2. Борн М. Лекции по атомной механике, т.1. Харьков—Киев, Гос. научн-техн. изд-во, 1934.
3. Moser J. Lectures on hamiltonian systems. Rigorons and formal Stability of orbits about an oblate planer. Mem. Amer. Math. Soc., 1968, No. 81.
4. Glimm J. Formal stability of hamiltonian systems. Communs Pure and Appl. Math., 1964, vol. 17, No. 4.
5. Брюно А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона. Матем. заметки, 1967, т. 1, вып. 3.
6. Хазин Л. Г. Вопросы устойчивости систем Гамильтона и резонансы, № 1—2 Препринты, М., Ин-т прикл. матем., 1969, № 20, 33.
7. Маркеев А. П. Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.

ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ-УГОЛ В ЗАДАЧЕ ЭЙЛЕРА—ПУАНСО

Ю. А. Садов

(Москва)

Использование переменных действие-угол (см., например, [1]) позволяет в ряде случаев значительно упростить применение метода возмущений для исследования динамики возмущенного движения, особенно при вычислении высших приближений. Ниже определяются переменные такого типа для задачи о свободном вращении твердого тела вокруг неподвижной точки (случай Эйлера — Пуансо).

Свободное движение твердого тела с неподвижной точкой описывается системой канонических уравнений с гамильтонианом [2]

$$H=\frac{G^2-G_\zeta^2}{2}\left(\frac{\sin^2\varphi}{A}+\frac{\cos^2\varphi}{B}\right)+\frac{G_\zeta^2}{2C} \tag{1}$$

где A, B, C — главные моменты инерции тела относительно закрепленной точки; G — величина кинетического момента; G_ζ — проекция этого момента на ось связанной системы координат, соответствующую моменту инерции C; ψ, ϑ, φ — эйлеровы углы (прецессия, нутация, собственное вращение), определяющие положение тела в неподвижной системе координат, одна из осей которой направлена по вектору кинетического момента. Положение этого вектора в исходной абсолютной системе координат задается двумя величинами: L — проекцией кинетического момента на ось исходной системы координат и углом h. Величины G, G_ζ, L, ψ, φ, h образуют полный набор канонических переменных в рассматриваемой задаче.

Переход к переменным действие-угол осуществляется при помощи канонического преобразования, в результате которого гамильтониан H оказывается функцией одних только импульсов и не зависит от углов.

В рассматриваемой задаче в качестве переменных действие можно использовать следующую тройку импульсов: G, L, I, где I — усредненная по собственному вращению величина проекции кинетического момента на ось связанной системы координат

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint G_\zeta \, d\varphi \tag{2}$$

Интегрирование здесь проводится по полному циклу изменения G_ζ в зависимости от φ согласно уравнению (1). Если в качестве оси $O\zeta$ связанной системы координат выбрать ту ось эллипсоида инерции, проекция на которую вектора кинетического момента всегда положительна, то I выражается через исходные переменные следующим образом:

$$I = \frac{2G}{\pi\varkappa}\left(\frac{1+\varkappa^2}{\lambda^2+\varkappa^2}\right)^{1/2}\left[(\lambda^2+\varkappa^2)\,\Pi\left(\frac{\pi}{2},\,\varkappa^2,\,\lambda\right) - \lambda^2 K(\lambda)\right] \tag{3}$$

Здесь $\varkappa$ и λ — положительные параметры

$$\varkappa^2 = \frac{C(B-A)}{A(C-B)}, \qquad \lambda^2 = \varkappa^2\,\frac{2CH - G^2}{G^2 - 2AH} \tag{4}$$

Соотношение (3) определяет λ как неявную функцию $I\,/\,G$. Это позволяет вычислить недостающие угловые переменные, используя производящую функцию

$$S = Lh + G\psi + \int G_\zeta(G,\,I,\,\varphi)\,d\varphi$$

Выполнив вычисления, находим, что импульсам L, G, I сопряжены соответственно углы

$$h = \frac{\partial S}{\partial L}$$

$$v = \frac{\partial S}{\partial G} = \psi + \frac{\sqrt{(1+\varkappa^2)(\lambda^2+\varkappa^2)}}{\varkappa}\left[\Pi(\xi,\,\varkappa^2,\,\lambda) - \Pi\left(\frac{\pi}{2},\,\varkappa^2,\,\lambda\right)\frac{F(\xi,\lambda)}{K(\lambda)}\right]$$

$$f = \frac{\partial S}{\partial I} = \frac{\pi}{2}\,\frac{F(\xi,\lambda)}{K(\lambda)}$$

Вспомогательная переменная ξ связана с φ соотношением

$$\operatorname{ctg}\varphi = -\sqrt{1+\varkappa^2}\,\operatorname{tg}\xi$$

причем $\xi = 0$ при $\varphi = \pi/2$.

Гамильтониан невозмущенного движения в переменных действие-угол L, G, I, h, v, f принимает вид

$$H = \frac{G^2}{2A}\left(1 - \frac{C-A}{C}\,\frac{\varkappa^2}{\varkappa^2+\lambda^2}\right)$$

где λ следует рассматривать как функцию $I\,/\,G$ согласно (3).

Уравнения невозмущенного движения

$$L^{\cdot} = 0,\; G^{\cdot} = 0,\; I^{\cdot} = 0,\; h^{\cdot} = 0$$

$$v^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial G} = Q_1(I,\,G), \qquad f^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial I} = Q_2(I,\,G)$$

легко интегрируются.

Чтобы рассматривать в найденных переменных задачи возмущенного движения, требуется выразить через эти переменные соответствующий гамильтониан. Так как возмущающая часть гамильтониана является обычно функцией положения тела, которое характеризуется направляющими косинусами связанной системы координат в абсолютной, то достаточно выразить через новые переменные направляющие косинусы тела.

Оказывается, что матрица направляющих косинусов может быть записана в виде

$$S = S_1 S_2 S_3$$

где

$$S_1 = \begin{Vmatrix} \cos h & -\sin h \cos\delta & \sin h \sin\delta \\ \sin h & \cos h \cos\delta & -\cos h \sin\delta \\ 0 & \sin\delta & \cos\delta \end{Vmatrix} \quad \left(\cos\delta = \frac{L}{G} > 0\right)$$

$$S_2 = \begin{Vmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

а элементы матрицы S_3 зависят лишь от одной угловой переменной f и могут быть представлены в виде рядов Фурье по этой переменной. Получающиеся формулы аналогичны формулам, найденным Якоби при вычислении явной зависимости направляющих косинусов от времени [3]. Для элементов s_{ij} матрицы S_3 справедливы следующие разложения:

$$s_{11} = -\frac{2\pi}{K}\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+\lambda^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}(1-q^{2n+1})\operatorname{ch}\sigma}{1-2q^{2n+1}\operatorname{ch}2\sigma+q^{4n+2}}\sin(2n+1)f$$

$$s_{12} = -\frac{2\pi}{K}\sqrt{\frac{1+\varkappa^2}{\lambda^2+\varkappa^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}(1+q^{2n+1})\operatorname{ch}\sigma}{1+2q^{2n+1}\operatorname{ch}2\sigma+q^{4n+2}}\cos(2n+1)f$$

$$s_{13} = -\frac{2\pi}{K}\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\lambda^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}(1-q^{2n})\operatorname{ch}\sigma}{1-2q^{2n}\operatorname{ch}2\sigma+q^{4n}}\sin 2nf$$

$$s_{21} = \frac{2\pi}{K}\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+\lambda^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}(1+q^{2n+1})\operatorname{sh}\sigma}{1-2q^{2n+1}\operatorname{ch}2\sigma+q^{4n+2}}\cos(2n+1)f$$

$$s_{22} = -\frac{2\pi}{K}\sqrt{\frac{1+\varkappa^2}{\lambda^2+\varkappa^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}(1-q^{2n+1})\operatorname{sh}\sigma}{1+2q^{2n+1}\operatorname{ch}2\sigma+q^{4n+2}}\sin(2n+1)f$$

$$s_{23} = \frac{2\pi}{K}\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\lambda^2}}\left\{-\frac{1}{4\operatorname{sh}\sigma}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}(1+q^{2n})\operatorname{sh}\sigma}{1-2q^{2n}\operatorname{ch}2\sigma+q^{4n}}\cos 2nf\right\}$$

$$s_{31} = \frac{2\pi}{K}\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+\lambda^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}}{1+q^{2n+1}}\cos(2n+1)f$$

$$s_{32} = -\frac{2\pi}{K}\sqrt{\frac{1+\varkappa^2}{\varkappa^2+\lambda^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}}{1-q^{2n+1}}\sin(2n+1)f$$

$$s_{33} = \frac{2\pi}{K}\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\lambda^2}}\left(\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}}{1+q^{2n}}\cos 2nf\right)$$

Здесь $K \equiv K(\lambda)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем λ; $q = \exp(-\pi K' / K)$; параметр σ равен

$$\sigma = \frac{\pi}{2K}F\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\varkappa}{\lambda},\ \sqrt{1-\lambda^2}\right)$$

Более подробно ход вычислений и результаты изложены в работе [4].

Поступила 19 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Усп. матем. н., 1963, т. 18, стр. 91—192.
2. Депри А. Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости. Сб. «Механика». Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1968, № 2, стр. 3—9.
3. Jacobi C. G. J. Gesammelte Werke. Berlin, Raimer, 1882, Bd 2, S. 289—352.
4. Садов Ю. А. Переменные действие-угол в задаче Эйлера — Пуансо. Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1970. Преп. № 22.