О «ПЕРЕКАЧКЕ ЭНЕРГИИ» МЕЖДУ НЕЛИНЕЙНО-СВЯЗАННЫМИ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ В СЛУЧАЕ РЕЗОНАНСА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ф. Х. Цельман

(Москва)

По-видимому, впервые задача о колебаниях двух нелинейно-связанных осцилляторов в случае резонанса была рассмотрена А. Виттом и Г. Гореликом в работе [1], в которой изучались плоские колебания упругого маятника (точка на пружине) [1].

Эту систему при малых колебаниях можно рассматривать как две линейные подсистемы (два осциллятора), связанные нелинейной связью (см. подробнее п. 3). А. Витт и Г. Горелик разобрали случай резонанса (2 : 1) между частотами «вертикальных» и «горизонтальных» колебаний упругого маятника.

При этом они применили один из вариантов теории возмущений — «метод секулярных возмущений» [2]. В этом методе переменные разделяются на «быстро» и «медленно» изменяющиеся, и происходит усреднение по быстро меняющимся переменным. Применение этого метода недостаточно обосновано в резонансном случае.

Заметим, что сравнительно недавно был достигнут определенный прогресс в рассмотрении резонансных случаев в гамильтоновых системах (см. [3]).

Приведение нелинейных гамильтоновых систем в резонансном случае k, в некотором смысле, простейшей, так называемой «нормальной форме» [3], дает возможность продвинуть некоторые вопросы изучения нелинейных систем, рассматривая их нормальные формы. Таким путем был получен ряд результатов в вопросах устойчивости гамильтоновых систем при резонансах [3–7]. Ниже при помощи этого приведения к нормальной форме изучаются колебания гамильтоновой системы, описывающей нелинейно-связанные осцилляторы, в случае резонанса третьего порядка.

1. Постановка задачи. Рассмотрим гамильтонову систему, описывающую n нелинейно-связанных осцилляторов, т. е. предположим, что гамильтониан системы имеет вид

$$H(p, q) = H_2(p, q) + H_3(p, q) + \ldots + H_i(p, q) + \ldots \tag{1.1}$$

где $H_i(p, q)$ — однородные многочлены степени i; при этом

$$H_2(p, q) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (p_i^2 + q_i^2), \qquad \beta_i > 0, \qquad \begin{pmatrix} p = (p_1, \ldots, p_n) \\ q = (q_1, \ldots, q_n) \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Здесь $\pm i\beta_\nu$ — собственные значения линеаризованной системы [2].

Предположим также, что среди собственных значений нет кратных, т. е. $\beta_i \neq \beta_j$, если $i \neq j$. Пусть выполняется соотношение

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \ldots + k_n\beta_n = 0 \tag{1.3}$$

где k_i — целые числа. Будем предполагать в дальнейшем наличие лишь одного (разумеется, с точностью до постоянного множителя) соотношения вида (1.3).

Вектор $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ называется резонансным вектором. Число $k = |k_1| + \ldots + |k_n|$ называется порядком резонанса.

При наличии резонанса, т. е. соотношения вида (1.3), систему (1.1) можно привести k, в некотором смысле, простейшей, так называемой нормальной форме [3].

Рассмотрим множество целочисленных векторов $\mathbf{k}$, для которых выполняется (1.3). Обозначим через L линейную оболочку этих векторов. Рассмотрим гамильтониан $\Gamma(\xi, \eta)$. Введем комплексные переменные

$$\zeta_\nu = \xi_\nu + i\eta_\nu, \qquad \bar{\zeta}_\nu = \xi_\nu - i\eta_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

[1] Интересно, что эта модельная задача возникла в связи с разбором колебаний в молекуле CO_2 (углекислота) и качественные результаты, полученные по этой модели, дают объяснение «расщеплению линий комбинационного рассеяния в углекислоте» [1].

[2] Ясно, что к такому виду всегда можно привести $H_2(p, q)$ в случае ее положительной определенности.

и разложим $\Gamma(\xi, \eta)$ в ряд по ζ_ν, $\bar\zeta_\nu$. Общий член этого разложения имеет вид

$$\zeta^a\bar\zeta^b = \prod_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu^{a_\nu}\bar\zeta_\nu^{b_\nu},$$

где $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — целочисленные вектора.

Говорят, что гамильтониан Γ имеет нормальную форму, если его разложение в ряд содержит только «резонансные» члены $\zeta^a\bar\zeta^b$, где $a - b \in L$.

Возможность приведения гамильтониана (1.1) к нормальной форме обеспечивается теоремой (см. например, [3,6]) о том, что существует формальное каноническое преобразование $(q, p \to \xi, \eta)$, такое, что гамильтониан (1.1) преобразуется в гамильтониан $\Gamma(\xi, \eta)$ в нормальной форме.

В дальнейшем ограничимся изучением поведения системы в порядке, равном наименьшему порядку резонанса, удовлетворяющему (1.3); при этом удобно пользоваться следующим вариантом этой теоремы [6].

Теорема 1.1. Пусть наименьший порядок резонанса, определяемого соотношением (1.3), равен m. Тогда существует действительная полиномиальная каноническая замена переменных $(q, p \to \xi, \eta)$ степени $m - 1$, такая, что гамильтониан (1.1) переходит в гамильтониан

$$\Gamma^* = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu\rho_\nu + \ldots + H_i(\rho) + \ldots + H_\mu(\rho) + \Gamma_m(\rho, \psi) + R(\rho, \varphi)$$

$$\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \qquad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \qquad \psi = \sum_{\alpha=1}^{n} k_\alpha\varphi_\alpha, \qquad \mu = \left[\frac{m}{2} - 1\right]$$

Здесь ρ_α, φ_α — канонические полярные координаты, задаваемые соотношениями

$$\xi_\alpha = \sqrt{\rho_\alpha}\sin\varphi_\alpha, \qquad \eta_\alpha = \sqrt{\rho_\alpha}\cos\varphi_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

ψ — «резонансная фаза», $H_i(\rho)$ — однородный полином степени i переменных ρ_α. Далее

$$\Gamma_m(\rho, \psi) = \begin{cases} 2A\sqrt{\rho^{|k|}}\cos\psi & \text{если } m = 2d + 1, \quad d \geqslant 1 \\ 2A\sqrt{\rho^{|k|}}\cos\psi + A_l\rho^{|l|}, & \text{если } m = 2d, \quad d \geqslant 2 \end{cases}$$

$$k = \sum_{\alpha=1}^{n} |k_\alpha| = m, \qquad l = \sum_{\alpha=1}^{n} |l_\alpha| = d, \qquad \rho^{|k|} = \rho_1^{|k_1|}\rho_2^{|k_2|}\ldots\rho_n^{|k_n|}$$

$$A_l\rho^{|l|} = \sum_{l=d} A_{l_1l_2\ldots l_n}\rho_1^{|l_1|}\rho_2^{|l_2|}\ldots\rho_n^{|l_n|}$$

Здесь $R(\rho, \varphi)$ имеет по переменным ρ_α степень большую, чем $m/2$; $l = (l_1, \ldots, l_n)$ — целочисленный вектор.

Гамильтониан

$$\Gamma = \Gamma^* - R(\rho, \varphi) \tag{1.4}$$

совпадает с точностью до членов порядка выше $m/2$ по переменным ρ_α с нормальной формой гамильтониана Γ^*.

Систему, описываемую Гамильтонианом (1.4), называют m-модельной системой. Всюду в дальнейшем рассматриваются только трехмодельные системы. (Для резонансов третьего порядка это означает, что в нормальной форме гамильтониана отброшены члены порядка выше $^3/_2$ по переменным ρ_α).

Известно [3,6], что

$$J_\alpha = \rho_\alpha - \frac{k_\alpha}{k_1}\rho_1 \quad (\alpha = 2, \ldots, n), \qquad F = \Gamma - \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu\rho_\nu \tag{1.5}$$

будет независимыми интегралами системы с гамильтонианом (1.4).

Здесь $k_1, \ldots, k_n$ — компоненты резонансного вектора $\mathbf{k}$ $(k_1 \neq 0)$.

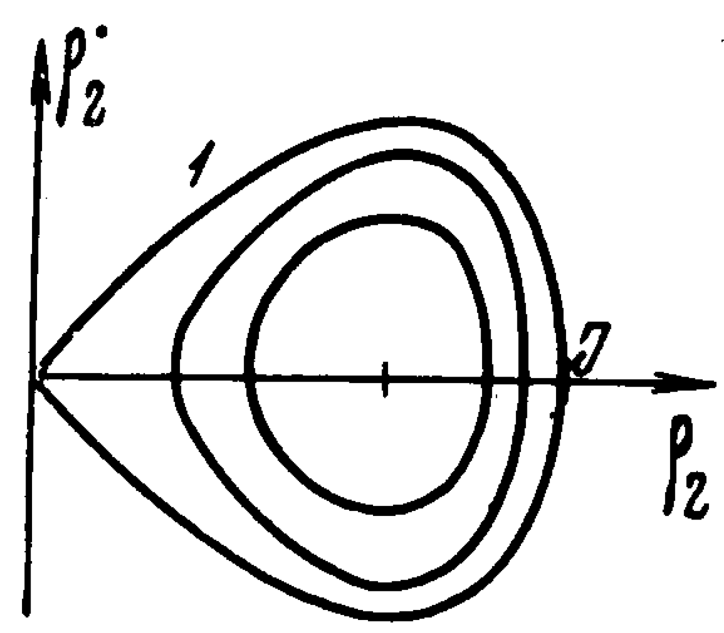
Заметим, что гамильтониан (1.4) по существу зависит от $(n+1)$ переменной: ρ_i $(i = 1, \ldots, n)$ и резонансной фазы ψ. Система с гамильтонианом (1.4) при наличии интегралов (1.5) будет интегрируемой (теорема Лиувилля).

Для качественного исследования поведения системы (1.4) в зависимости от начальных условий удобно при помощи интегралов (1.5) исключить n переменных и получить автономное дифференциальное уравнение первого порядка для одной(любой)из переменных ρ_i. После определения одного из ρ_i остальные можно получить из интегралов J_α, величины фаз φ_i получаются затем квадратурами из соответствующих уравнений для φ_i, определяемых гамильтонианом (1.4).

Для некоторых задач достаточно изучения поведения только переменных ρ_i, ибо как будет видно дальше, в первом приближении они соответствуют энергии i-го осциллятора.

2. О резонансе третьего порядка. Резонансы третьего порядка соответствуют одному из следующих соотношений между частотами (при соответствующей нумерации осцилляторов):

$$\beta_1 = 2\beta_2 \text{ или } \beta_1 + \beta_2 = \beta_3.$$



Ниже рассматривается резонанс $\beta_1 = 2\beta_2$. Для системы с двумя степенями свободы такой резонанс был рассмотрен в [1] на примере колебаний упругого маятника, т. е. для гамильтониана специального вида (3.2)

Покажем, что и в общем случае гамильтониана (1.1), (1.2) (если ограничиться в гамильтониане членами не выше третьей степени, по переменным p, q) качественная картина движения при рассматриваемом резонансе имеет тот же характер, что и в задаче, рассмотренной А. Виттом и Г. Гореликом[1] [1].

Рассмотрим для простоты[2] систему с двумя степенями свободы. В этом случае трехмодельная система, т. е. система, определяемая гамильтонианом вида (1.4), $(m = 3)$, имеет следующий вид:

$$\Gamma(\rho, \psi) = \beta_2 (2\rho_1 + \rho_2) + 2A \sqrt{\rho_1 \rho_2^2} \cos\psi, \qquad \psi = \varphi_1 - 2\varphi_2 \tag{2.1}$$

Будем предполагать, что константа $A \neq 0$.

Согласно (1.5) система (2.1) имеет следующие интегралы:

$$J = 2\rho_1 + \rho_2, \qquad F = 2A\sqrt{\rho_1 \rho_2^2} \cos\psi \tag{2.2}$$

Уравнение для ρ_2 при помощи интегралов (2.2) легко приводится к виду

$$\frac{d\rho_2}{dt} = \pm 2A \sqrt{2\rho_2^2 (J - \rho_2) - F_1^2}, \qquad F_1 = F / A \tag{2.3}$$

Подобное уравнение, правда у несколько других переменных, было исследовано в [1]. На фигуре приведен «фазовый портрет» (интегральные кривые) уравнения (2.3) при различных значениях интеграла F и фиксированном значении J.

Имеются две особые точки: седло $(\rho_2^\cdot = \rho_2 = 0)$ и центр $(\rho_2^\cdot = 0,\ \rho_2 = {}^2/_3 J)$. Все интегральные кривые, не проходящие через эти особые точки, будут замкнутыми кривыми (циклами), пересекающими ось ρ_2 под прямым углом. Действительно

$$\frac{d(\rho_2^\cdot)}{d\rho_2} = \pm \frac{2A(2J - 3\rho_2)\rho_2}{\sqrt{2\rho_2^2 (J - \rho_2) - F_1^2}}$$

обращается в ∞ при $\rho_2^\cdot = 0$, т. е. в случае равенства нулю знаменателя, если при этом $\rho_2 (2J - 3\rho_2) \neq 0$.

---

[1] Хочется отметить, что этот результат дает некоторый ответ на один из вопросов, поставленных М. Г. Крейном во время V Международной конференции по нелинейным колебаниям в Киеве, 1969 г.

[2] См. замечание 2.1.

Центр соответствует таким движениям, когда ρ_2 и, следовательно (см. (2.2)), ρ_1 остаются постоянными. Например, в задаче об упругом маятнике [1] это соответствует определенным периодическим движениям осцилляторов. Так как в первом приближении ρ_i соответствуют энергии i-го осциллятора (выражения значений ρ_i через исходные переменные задачи об упругом маятнике см. ниже (3.8)), то интерпретацию фигуры удобно давать в терминах «перекачки энергии» [1].

При всех возможных начальных значениях ρ_2, кроме значений, соответствующих особым точкам, имеет место периодическая перекачка энергии из одного осциллятора в другой. Перекачка эта происходит с периодом

$$\tau = \oint \frac{d\rho_2}{2A\sqrt{2\rho_2^2(J-\rho_2)-F_1^2}} \tag{2.4}$$

где интеграл взят вдоль соответствующего цикла (эти периоды могут быть выражены через эллиптические функции).

Седло ($\rho_2^{\cdot} = \rho_2 = 0$) также соответствует периодическому решению, но оно не интересно.

Когда начальные условия соответствуют сепаратрисе, то имеется лимитационное движение. Изображающая точка придет в начало координат за бесконечное время (интеграл (2.4) расходится). При начальных значениях, близких к тем, которые соответствуют сепаратрисе, происходит почти полная перкачка энергии из одного осциллятора в другой, причем процесс длится «очень долго» [1].

Таким образом, картина «перекачки энергии», описанная в [1], имеет место и в общем случае резонанса $\beta_1 = 2\beta_2$.

Замечание 2.1. Подобная картина перекачки энергии между резонирующими осцилляторами в случае рассматриваемого резонанса сохраняется и тогда, когда они входят в систему n нелинейно-связанных осцилляторов. В этих случаях, выражения для ρ_1 и ρ_2 (пусть резонируют 1-й и 2-й осциллятор) будут зависить от переменных, относящихся к остальным осцилляторам.

3. «Задача А. Витта и Г. Горелика» (Колебание упругого маятника при резонансе (2.1)). Рассмотрим задачу о колебании упругого маятника в случае резонанса (2 : 1) между частотами вертикальных и горизонтальных колебаний при помощи теоремы о приведении к нормальной форме.

Следуя А. Витту и Г. Горелику [1], рассмотрим упругий маятник, т. е. груз, висящий на пружине, верхний конец которой закреплен. Будем считать, что движение происходит в определенной вертикальной плоскости. Обозначим через r мгновенное значение длины пружины, l_0 — длину пружины в отсутствии нагрузки, θ — угол отклонения от вертикали (будем всюду его считать малой величиной), m — массу груза, k — постоянную упругости пружины, g — ускорение тяжести. Тогда кинетическая и потенциальная энергии системы равны соответственно

$$T = \frac{m}{2}(r^{\cdot 2} + r^2\theta^{\cdot 2}), \qquad V = \frac{k}{2}(r-l_0)^2 - mgr\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \cdots$$

Введем вместо r координату x, равную относительному удлинению пружины по сравнению с ее статической длиной $l = l_0 + mg / k$, т. е. положим $x = (r - l) / l$.

Так как рассматривается случай малых колебаний, то будем считать, что x очень мало по сравнению с 1. Пренебрегая членами порядка выше третьего относительно малых величин x и θ и их производных, получаем для кинетической и потенциальной энергии новые выражения:

$$T = \frac{ml^2}{2}(x^{\cdot 2} + \theta^{\cdot 2} + 2x\theta^{\cdot 2}), \quad V = \frac{ml^2}{2}\left(\frac{k}{m}x^2 + \frac{g}{l}\theta^2 + \frac{g}{l}x\theta^2\right)$$

Введем импульсы $p_x = \partial T / \partial x^{\cdot}$, $p_\theta = \partial T / \partial \theta^{\cdot}$, сопряженные координатам x и θ. Тогда гамильтониан

$$H = T + V = \frac{1}{2m'}(p_x^2 + p_\theta^2) + \frac{m'}{2}(\alpha^2x^2 + \beta^2\theta^2) - \frac{1}{m'}xp_\theta^2 + \frac{m'}{2}\beta^2x\theta^2$$

$$m' = ml^2, \quad \alpha^2 = k / m, \quad \beta^2 = g / l, \quad \alpha, \beta > 0$$

Здесь α и β — частоты линейных осцилляторов (в отсутствии нелинейной связи). Линейной канонической заменой переменных

$$p_1 = \frac{p_x}{\sqrt{m'\alpha}}, \quad z_1 = \sqrt{m'\alpha}x, \quad p_2 = \frac{p_\theta}{\sqrt{m'\beta}}, \quad z_2 = \sqrt{m'\beta}\,\theta \tag{3.1}$$

приводим гамильтониан к виду

$$H = {}^1/_2 [\alpha (p_1^2 + z_1^2) + \beta (p_2^2 + z_2^2)] - \gamma z_1 (2p_2^2 - z_2^2), \qquad \gamma = \frac{\beta}{2\sqrt{m'\alpha}} \tag{3.2}$$

Не уменьшая общности, положим для простоты $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Чтобы привести гамильтониан (3.2) к нормальной форме, будем искать производящую функцию $W(z, \eta)$ для канонического преобразования переменных $z, p \to \xi, \eta$, $(z = (z_1, z_2), p = (p_1, p_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2))$. При этом

$$\xi_i = \frac{\partial W}{\partial \eta_i}, \qquad p_i = \frac{\partial W}{\partial z_i} \qquad (i = 1, 2) \tag{3.3}$$

Так как ограничиваемся рассмотрением членов в H не выше третьего порядка малости, то функцию $W(z, \eta)$ будем искать в виде $W = W_2 + W_3$, где W_2, W_3 — однородны многочлены второго и третьего порядка соответственно.

Заметим, что H_2 (члены второй степени в H) уже имеет нормальную форму, поэтому W_2 имеет смысл взять в виде $W_2 = z_1\eta_1 + z_2\eta_2$, что соответствует тождественному преобразованию ($\xi_i = z_i$, $p_i = \eta_i$ $(i = 1, 2)$). Приведение $H = H_2 + H_3$ к нормальной форме $\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3$, согласно технике приведения к нормальной форме [3], связано с решением определенного уравнения в частных производных. В рассматриваемом случае это уравнение имеет вид

$$2\left(\eta_1 \frac{\partial W_3}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial W_3}{\partial \eta_1}\right) + \left(\eta_2 \frac{\partial W_3}{\partial z_2} - z_2 \frac{\partial W_3}{\partial \eta_2}\right) = -{}^1/_4\gamma\,(z_1 z_2^2 - 5z_1\eta_2^2 - 6z_2\eta_1\eta_2)$$

Решение этого уравнения можно искать, например, методом неопределенных коэффициентов (напомним, что W_3 — однородный многочлен степени три).

Решением этого уравнения является функция

$$W_3 = {}^1/_4\gamma\,[3z_1z_2\eta_2 - \eta_1 (z_2^2 + \eta_2^2)]$$

Таким образом

$$W = W_2 + W_3 = z_1\eta_1 + z_2\eta_2 + {}^1/_4\,\gamma\,[3z_1z_2\eta_2 - \eta_1 (z_2^2 + \eta_2^2)] \tag{3.4}$$

Преобразование, задаваемое этой функцией, имеет вид:

$$\begin{aligned} z_1 &= \xi_1 + {}^1/_4\gamma\,(\xi_2^2 + \eta_2^2), & p_1 &= \eta_1 + {}^3/_4\gamma\xi_2\eta_2 \\ z_2 &= \xi_2 - {}^1/_4\gamma\,(3\xi_1\xi_2 - 2\eta_1\eta_2), & p_2 &= \eta_2 + {}^1/_4\gamma\,(3\xi_1\eta_2 - 2\eta_1\xi_2) \end{aligned} \tag{3.5}$$

В новых переменных гамильтониан имеет следующий вид:

$$H = {}^1/_2[2\,(\xi_1^2 + \eta_1^2) + (\xi_1^2 + \eta_2^2)] + {}^3/_4\gamma\,(2\xi_2\eta_1\eta_2 + \xi_1\xi_2^2 - \xi_1\eta_2^2) \tag{3.6}$$

Если перейти к каноническим полярным координатам по формулам

$$\xi_i = \sqrt{\rho_i}\sin\varphi_i, \qquad \eta_i = \sqrt{\rho_i}\cos\varphi_i \; (i = 1, 2)$$

то гамильтониан примет знакомый (2.1) вид

$$\Gamma = (2\rho_1 + \rho_2) + {}^3/_2\gamma\sqrt{\rho_1\rho_2^2}\cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) \tag{3.7}$$

Таким образом, каноническое преобразование (3.5) приводит гамильтониан задачи А. Витта и Г. Горелика об упругом маятнике к обычной, для резонансов третьего порядка в системах с двумя степенями свободы, нормальной форме, исследованной в п. 2.

Из выражений переменных

$$\begin{aligned} \rho_1 &= z_1^2 + p_1^2 - {}^1/_2\gamma\,[z_1 (z_2^2 + p_2^2) + 3z_2p_1p_2] \\ \rho_2 &= z_2^2 + p_2^2 + {}^1/_2\gamma\,[3z_1 (z_1z_2 - p_2^2) + 2p_1p_2 (z_1 + z_2)] \end{aligned} \tag{3.8}$$

видно, что в первом приближении ρ_i соответствуют энергии i-го осциллятора; члены третьего порядка возникают из-за взаимодействия.

Замечание 3.1. Пусть в рассмотренной выше задаче об упругом маятнике соотношение частот вертикальных и горизонтальных колебаний будет (1 : 2) (а не (2 : 1), как в [1]). Специфика гамильтониана (3.2) такова, что при приведении к нормальной форме (с точностью до членов выше третьего порядка малости) коэффициент A в выражении (2.1) будет равен нулю. Таким образом, нормальная форма (2.1) в этом случае будет иметь вырожденный характер. Поэтому по сравнению с обычной картиной перекачки энергии при резонансе третьего порядка в системе с двумя степенями свободы, для анализа эффектов нелинейной связи с этом случае следует привлечь более старшие члены в исходном гамильтониане (и в нормальной форме). Подробнее эту картину рассмотрим в одной из последующих заметок.

Автор благодарит В. В. Румянцева и Л. Г. Хазина за интерес к работе и полезные обсуждения.

Поступила 27 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Витт А., Горелик Г. Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем. Ж. техн. физ., 1933, т. 3, вып. 2—3.
2. Борн М. Лекции по атомной механике, т.1. Харьков—Киев, Гос. научн-техн. изд-во, 1934.
3. Moser J. Lectures on hamiltonian systems. Rigorons and formal Stability of orbits about an oblate planer. Mem. Amer. Math. Soc., 1968, No. 81.
4. Glimm J. Formal stability of hamiltonian systems. Communs Pure and Appl. Math., 1964, vol. 17, No. 4.
5. Брюно А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона. Матем. заметки, 1967, т. 1, вып. 3.
6. Хазин Л. Г. Вопросы устойчивости систем Гамильтона и резонансы, № 1—2 Препринты, М., Ин-т прикл. матем., 1969, № 20, 33.
7. Маркеев А. П. Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.

ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ-УГОЛ В ЗАДАЧЕ ЭЙЛЕРА—ПУАНСО

Ю. А. Садов

(Москва)

Использование переменных действие-угол (см., например, [1]) позволяет в ряде случаев значительно упростить применение метода возмущений для исследования динамики возмущенного движения, особенно при вычислении высших приближений. Ниже определяются переменные такого типа для задачи о свободном вращении твердого тела вокруг неподвижной точки (случай Эйлера — Пуансо).

Свободное движение твердого тела с неподвижной точкой описывается системой канонических уравнений с гамильтонианом [2]

$$H = \frac{G^2 - G_\zeta^2}{2}\left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right) + \frac{G_\zeta^2}{2C} \tag{1}$$

где A, B, C — главные моменты инерции тела относительно закрепленной точки; G — величина кинетического момента; G_ζ — проекция этого момента на ось связанной системы координат, соответствующую моменту инерции C; ψ, ϑ, φ — эйлеровы углы (прецессия, нутация, собственное вращение), определяющие положение тела в неподвижной системе координат, одна из осей которой направлена по вектору кинетического момента. Положение этого вектора в исходной абсолютной системе координат задается двумя величинами: L — проекцией кинетического момента на ось исходной системы координат и углом h. Величины G, G_ζ, L, ψ, φ, h образуют полный набор канонических переменных в рассматриваемой задаче.

Переход к переменным действие-угол осуществляется при помощи канонического преобразования, в результате которого гамильтониан H оказывается функцией одних только импульсов и не зависит от углов.