

О ПЛОТНОСТИ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ

А. Л. Гольденвейзер

(Москва)

Рассматриваются вопросы, относящиеся к плотности частот свободных линейных колебаний тонкой оболочки. Основное внимание уделяется сгущению частот у некоторых критических точек, на которое указал В. В. Болотин в [1-5]. Попутно обсуждается область применимости асимптотического метода определения свободных колебаний оболочки [6-11].

В работах [1-5] плотность частот исследуется при помощи формулы

$$\omega^2 = \frac{D}{\rho h} \left[(k_1^2 + k_2^2)^2 + \frac{Eh}{DR_1^2} \frac{(k_1^2 \chi + k_2^2)^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \right] = \frac{D}{\rho h} \left[r^4 + \frac{Eh}{DR_1^2} (\chi \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2 \right] \quad (1)$$

$$\chi = \frac{R_1}{R_2}, \quad \left(r^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad \varphi = \arctg \frac{k_2}{k_1} \right) \quad (2)$$

Здесь ω — частота свободных колебаний оболочки, D — цилиндрическая жесткость, ρ — плотность материала, h — толщина, E — модуль Юнга, k_1, k_2 — волновые числа, R_1, R_2 — главные радиусы кривизны поверхности.

В (1) надо, конечно, рассматривать R_1 и R_2 как константы. Поэтому примем, что в (2) величина χ удовлетворяет неравенствам

$$-1 \leq \chi \leq 1 \quad (3)$$

(для этого надо соответствующим образом пронумеровать константы)

Положим, как и в [1-5]

$$\omega_1 = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \frac{1}{R_2}, \quad \omega_2 = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \frac{1}{R_1} \quad (\omega_1 \leq \omega_2) \quad (4)$$

и представим (1) в виде

$$\omega^2 = \omega'^2 + \omega''^2, \quad \omega' = \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/2} (k_1^2 + k_2^2), \quad \omega'' = \omega_2 \frac{k_1^2 \chi + k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} \quad (5)$$

Физический смысл введенных обозначений очевиден: ω' — частота колебаний эквивалентной пластинки, т. е. пластинки с теми же размерами, цилиндрической жесткостью и массой единицы площади, что и оболочка, а ω'' — частота колебаний безмоментной оболочки. Влияние искривленности оболочки отражено только в ω'' , а относительный вклад этой величины уменьшается с возрастанием ω . Поэтому спектр частот, задаваемый формулой (1), можно разделить на две части: в одной из них (при малых ω)

влияние искривленности относительно велико, а в другой (при больших ω) оно проявляется мало.

Легко установить, что для оболочки положительной кривизны

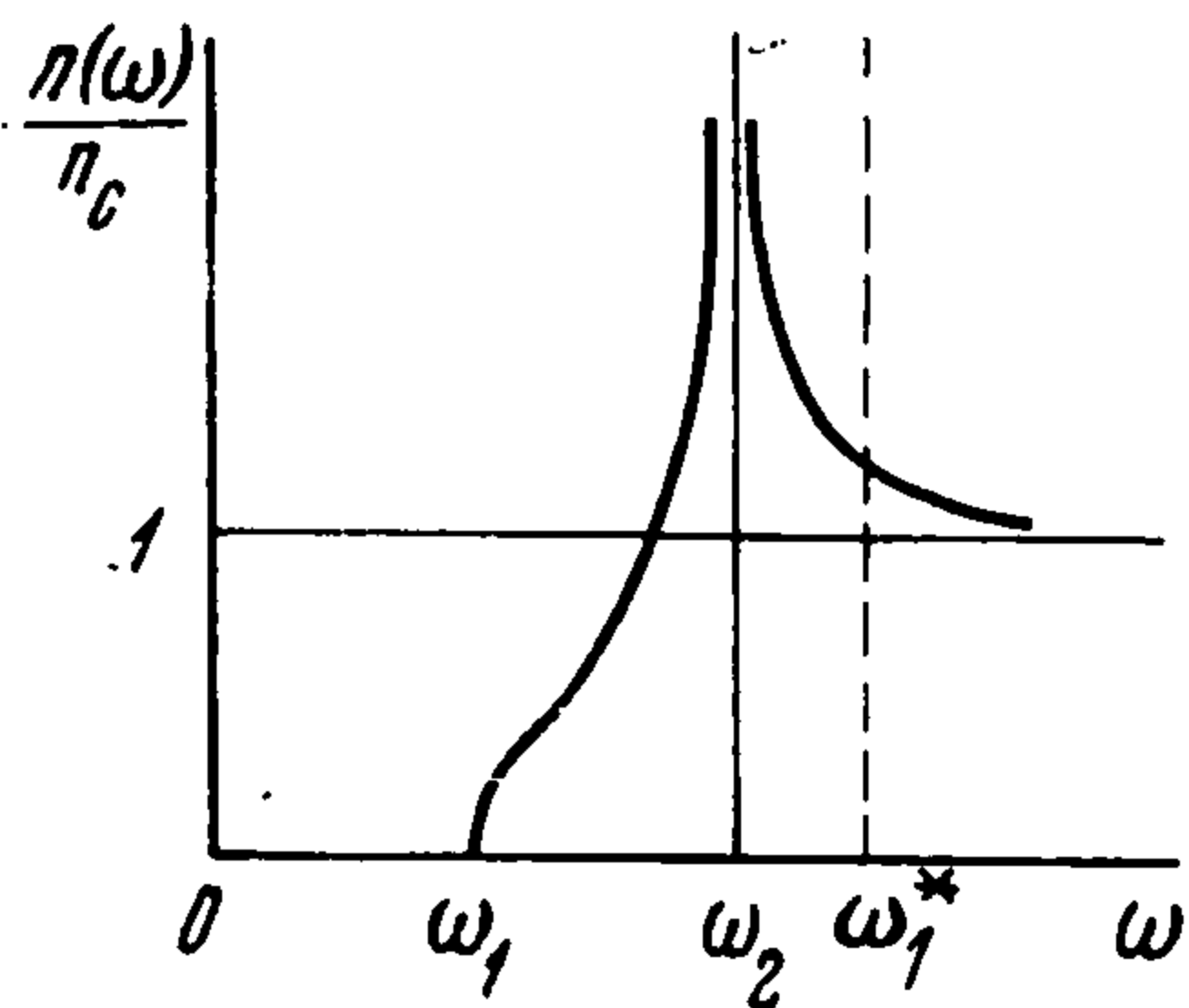
$$\omega_1 \leq \omega'' \leq \omega_2 \quad (6)$$

а для оболочки нулевой и отрицательной кривизны

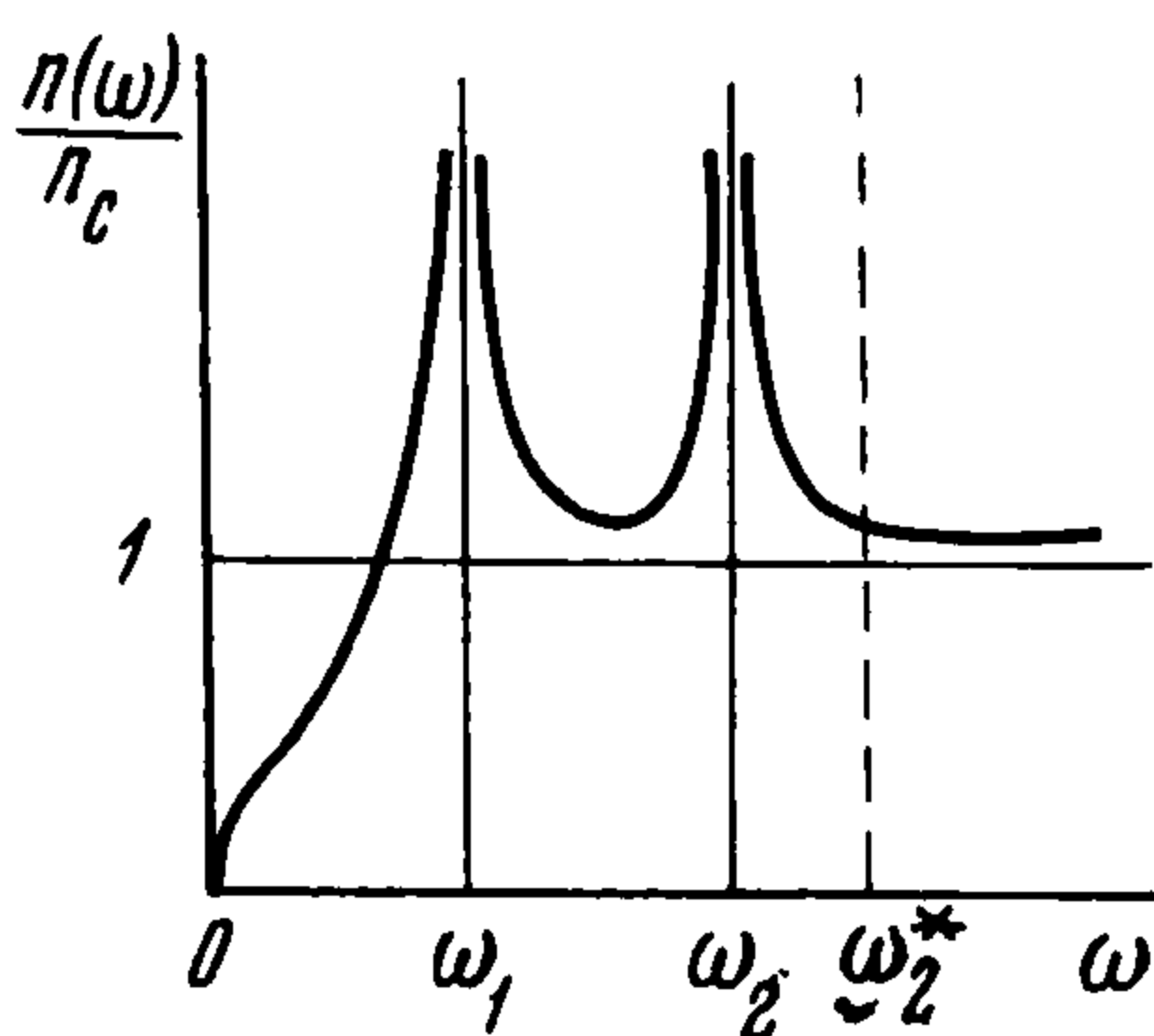
$$0 \leq \omega'' \leq \omega_2$$

Поэтому можно принять, что упомянутое разделение спектра происходит при $\omega = \omega_2^*$, где ω_2^* несколько больше ω_2 . Такое предположение подтверждают полученные в [1-5] графики плотности частот колебаний оболочки (фиг. 1, 2), на которых горизонтальные прямые соответствуют эквивалентной пластинке.

Формула (1) получена при помощи так называемого асимптотического метода [6-11], основанного на ряде предположений. Среди них пока отметим два: 1) края оболочки проходят вдоль линий кривизны $x_1 = \text{const}$ и $x_2 = \text{const}$, образуя криволинейный прямоугольник, 2) динамический краевой эффект не вырождается.



Фиг. 1



Фиг. 2

Динамическим (не вырожденным) краевым эффектом в [5-11] названо напряженно-деформированное состояние, возникающее при колебаниях у края оболочки и быстро затухающее при удалении от него. Вырожденным динамический краевой эффект называется тогда, когда он не затухает, а осциллирует.

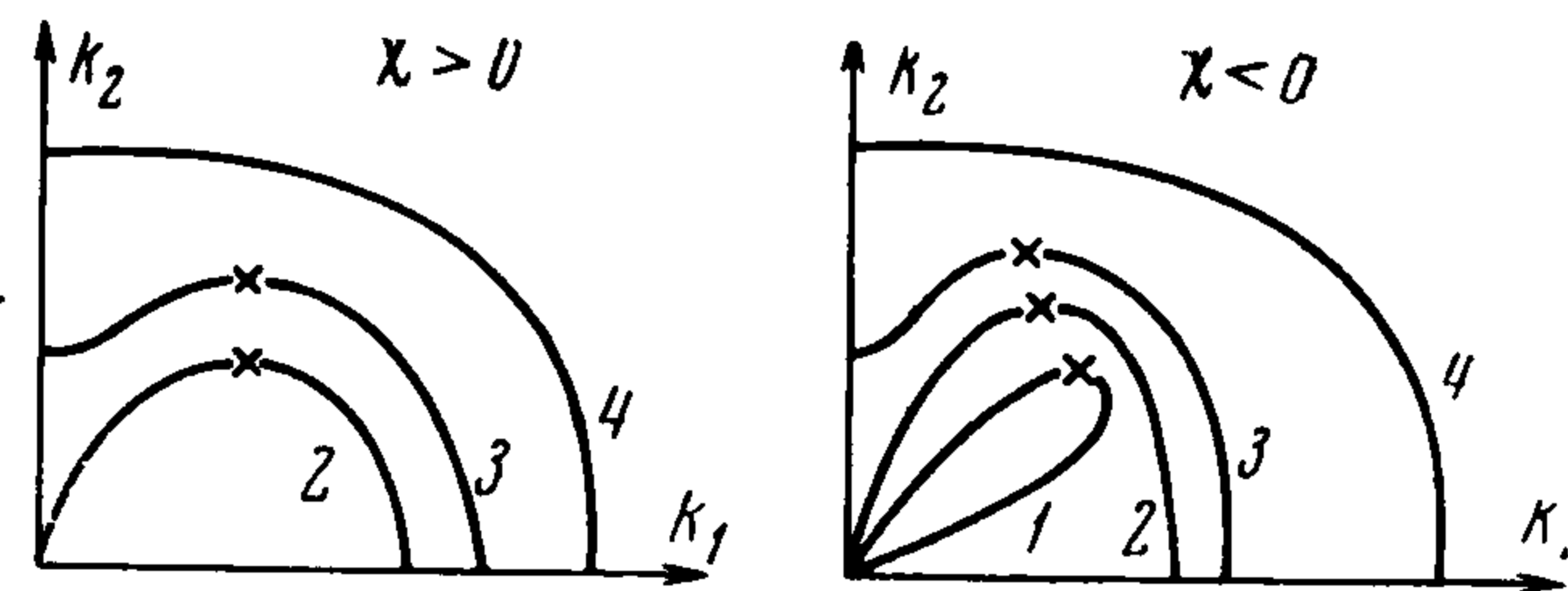
Будем искать условия вырождения.

Зафиксируем в (1) значение ω и рассмотрим это равенство как уравнение некоторой кривой γ_ω (линии уровня) на декартовой плоскости $k_1 k_2$. На фиг. 3 показано какой вид имеют кривые γ_ω в первом квадранте при $\chi > 0$ и $\chi < 0$, когда ω удовлетворяет следующим неравенствам

$$\begin{aligned} (1) \omega &\leq \omega_1, (2) \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ (3) \omega_2 < \omega < \Omega, (4) \Omega < \omega \end{aligned} \quad (7)$$

(в скобках указаны номера [кривых; при $\chi > 0$ кривая 1 — мнимая).

В этих неравенствах ω_1, ω_2 определяются формулами (4), а смысл числа Ω выяснится ниже.



Фиг. 3

Легко показать, что при заданном ω динамический краевой эффект вырождается у линии $x_1 = \text{const}$, если γ_ω в первом квадранте имеет две точки пересечения с какой-либо прямой $k_2 = \text{const}$ ¹. Заметив это, будем в неравенствах (7) под Ω подразумевать наименьшее из таких значений ω , при которых в первом квадранте γ_ω пересекается только в одной точке с любой прямой $k_2 = \text{const}$. Тогда условие вырождения можно записать в виде неравенства $\omega < \Omega$. Динамический краевой эффект отсутствует или существует в зависимости от того, выполняется или нарушается это неравенство, соответственно.

Обозначим через λ совокупность значений ω , при которых k_2 как функция k_1 , имеет локальный максимум в первом квадранте (точки, отмеченные крестиком на фиг. 3). Тогда Ω определится как верхний предел λ .

Обращаясь к подсчету Ω , будем исходить из формулы

$$\frac{dk_2}{dk_1} = - \frac{\partial \omega^2 / \partial k_1}{\partial \omega^2 / \partial k_2}$$

Знаменатель дроби в правой части этого равенства ограничен, поэтому максимум k_2 будет достигаться в точках, где

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial k_1} = \frac{1}{r^2} \frac{Dk_1}{\rho h} \left[r^4 - \frac{Eh}{DR_1^2} (1 - \chi) (\chi \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi \right] = 0$$

Отсюда можно выразить r через φ и подставить этот результат в (1). Получим равенство

$$\lambda = \omega_2 (\chi \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^{1/2} (2 \sin^2 \varphi + \chi \cos 2\varphi)^{1/2}$$

из которого легко выводится, что верхний предел λ достигается при $\varphi = \pi / 2$ и равен $\omega_2 \sqrt{2 - \chi}$. Таким образом, условие вырождения динамического краевого эффекта записывается при помощи неравенства

$$\omega < \omega_2 \sqrt{2 - \chi} \quad (8)$$

Оно означает, что начальная часть спектра, где выполняется (8), содержит частоты, для которых динамический краевой эффект не существует, т. е. асимптотический метод, как отмечается в [5-11], становится непригодным. Нарушение неравенства (8) означает существование динамического краевого эффекта и законность (с этой точки зрения) асимптотического метода для подсчета соответствующих частот. В правой части нера-

¹ В. В. Болотин, вероятно, не заметил этого, так как во всех работах, посвященных плотности частот, он изобразил на иллюстративных фигурах такие γ_ω , которые соответствуют вырождению краевого эффекта.

венства (8) стоит величина несколько большая, чем ω_2 . Ее можно ориентировочно отождествить с ω_2^* а это значит, что динамический краевой эффект существует только в той части спектра, которая мало зависит от искривленности оболочки.

Если $\chi = 1$ (сфера), то динамический краевой эффект не вырождается при $\omega < \omega_2$. Вместе с тем из (4) — (6) следует, что такому неравенству удовлетворяют все частоты сферической оболочки¹. Следовательно, в последней динамический краевой эффект всегда существует. Это следует также из того, что кривые γ_ω вырождаются при $\chi = 1$ в окружности $r = \text{const}$. Такой же вид имеют γ_ω и при $R_1 = R_2 = \infty$, откуда следует, что в пластинке также не будет вырождения. Вместе с тем можно показать, что для любых других оболочек в начальной части спектра динамический краевой эффект вырождается у одной из двух пар краев.

В работе [3] вырождение краевого эффекта исследовано неоправданно сложно. Невозможность вырождения в сферической оболочке и пластинке В. В. Болотин обнаружил, но не заметил, что других таких оболочек не существует.

При выводе (1) использованы также предположения, что на срединной поверхности можно установить постоянную метрику и что можно считать постоянным R_1, R_2 .

Постоянная метрика, как известно, осуществима только на поверхности нулевой кривизны, а постоянные кривизны R_1, R_2 имеют лишь сфера, круговой цилиндр и плоскость. Поэтому в область применимости формулы (1) кроме пластинок входят лишь пологие оболочки и круговые цилиндрические оболочки (если волновые числа достаточно велики, то подъемистость цилиндрической оболочки может быть любой).

Плотность является характеристикой поведения достаточно большого числа частот, а частот, соответствующих колебаниям с небольшой изменяемостью напряженно-деформированного состояния, существует относительно мало. Поэтому естественно предположить, что при подсчете плотности колебаний, можно пренебречь погрешностями, допущенными в частотах, соответствующих малой изменяемости. В связи с этим обсудим равенство (1) как формулу, которая должна давать удовлетворительную точность только при подсчете частот колебаний, соответствующих достаточно большой изменяемости.

Большая изменяемость напряженно-деформированного состояния означает появление густой сети узловых линий. Они разбивают оболочку на пологие части, но это не значит, что формула (1) становится пригодной для оболочки любого очертания и любого подъема.

Для оболочки в целом R_1, R_2 могут меняться в широких пределах, и необходимо знать способ подсчитывать в зависимости от условий задачи те средние постоянные значения R_1, R_2 , которые надо внести в (1). Пока такой способ не указан, равенство (1) будет приводить к погрешности, не зависящей от номера частоты. В то же время справедливы равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_{(n)}}{\omega_{(n+1)}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$$

Из них следует, что при достаточно большом номере частоты n любая относительная погрешность, не зависящая от n , приведет к абсолютному отклонению от $\omega_{(n)}$ на величину, большую чем $\omega_{(n+1)} - \omega_{(n)}$. Иными словами, с возрастанием n ценность формулы (1) не увеличивается, а уменьшается, а при достаточно больших n она не даст возможности даже отличить $\omega_{(n)}$ от соседних частот.

Таким образом, условия применимости асимптотического метода заключаются в следующем:

(1) характеристические длины волн у формулы колебаний должны быть достаточно малы;

¹ Конечно, речь идет о частотах, доступных исследованию асимптотическим методом, т. е. о частотах прямоугольной в плане сферической оболочки. Если, например, оболочка имеет форму сферического сегмента, то некоторые ее частоты расположатся левей ω_2 , и их будет тем больше, чем тоньше оболочка.

- (2) метрика срединной поверхности должна быть почти постоянной;
- (3) волновые числа k_1, k_2 не должны находиться в областях вырождения динамического краевого эффекта;
- (4) кривизны срединной поверхности должны быть почти постоянными.

Первые три из них В. В. Болотин привел в справочнике [5], (гл. 8), а четвертое вытекает из вышеприведенных соображений. Всем этим требованиям удовлетворяют только пологие оболочки и достаточно короткие круговые цилиндрические оболочки, причем и для них надо исключить из рассмотрения колебания, отражающие влияние их искривленности.

Обратимся к результатам исследования плотности частот. Они изображены на графиках (фиг. 1, 2), относящихся соответственно к оболочкам положительной и отрицательной кривизны. По оси ординат в обоих случаях отложено отношение плотности частот оболочки к плотности частот эквивалентной пластинки, вычисленной по методу Р. Куранта [12].

Интерес, конечно, представляют только те части графиков, для которых $\omega < \omega_2^*$, но именно там нарушается неравенство (8), т. е., динамический краевой эффект вырождается и формула (1) для произвольно закрепленной оболочки теряет силу.

Таким образом, не доказано, что графики (фиг. 1, 2) можно относить к произвольно закрепленным оболочкам, так как эти графики следуют из формулы (1), выведенной в [5—11] при помощи асимптотического метода, а последний не пригоден в наиболее интересных частях обсуждаемых графиков (сфера является исключением). Равенство (1) надо трактовать как давно известную формулу частот колебаний шарнирно опертой оболочки, для вывода которой асимптотический метод не нужен, и, строго говоря, только для этого случая имеют силу графики (фиг. 1, 2)

При $\omega = \omega_2$ графики имеют бесконечный разрыв, свидетельствующий о существенном сгущении частот. Обсудим это явление.

Пусть пологая оболочка, не превращаясь в пластинку, неограниченно приближается к ней. Тогда графики плотности частот оболочек станут приближаться к графику частот пластинки, но бесконечный разрыв при $\omega = \omega_2$ все время будет сохраняться. Получается физически несообразный результат (сгущение частот в сколь угодно мало искривленной пластинке), который объясняется тем, что чем более пологая оболочка, тем меньше частот попадет в интервал $\omega < \omega_2^*$ и курантовское понятие плотности потеряет смысл.

Таким образом, существует еще одно ограничение области применимости обсуждаемых графиков; при фиксированной толщине оболочка не должна быть слишком полой.

Оценим число частот, попадающих на отрезок $\omega < \omega_2^*$. Выше было показано, что оно ориентировочно равно числу частот, соответствующих вырожденному динамическому краевому эффекту. Последнее подсчитывалось в [6], где для квадратной цилиндрической панели получено неравенство

$$m^2 + n^2 < \frac{a^2}{\pi^2 h R} \sqrt{12(1 - \mu^2)} \quad (9)$$

Здесь a — сторона квадрата, R — радиус цилиндра, μ — число Пуассона, m, n — положительные целые числа, каждой паре которых соответствует некоторая частота колебаний оболочки.]

При $a/h = 100, R/a = 1, \mu = 0.25$ (тонкая, не очень пологая оболочка), правая часть (9) равна 34.1. Отсюда получаем, что искомое число частот равно 22. Его трудно признать достаточным для построения столь сложного графика, как, например, изображенный на фиг. 2.

С этой точки зрения обсуждаемые графики имеют реальную ценность только для очень тонких оболочек, или для достаточно подъемистых оболочек. Но в последнем случае в формулах (1) R_1, R_2 будут меняться в широких пределах, само понятие о критических частотах ω_1, ω_2 станет неопределенным, а бесконечные разрывы размажутся. Держась ближе к идеям Р. Куранта [12], можно обрисовать качественную картину такого размазывания.

Разобьем оболочку на элементарные оболочки, каждая из которых будет в плане представлять собой сколь угодно малый квадрат и примем, что элементарные оболочки шарнирно оперты по краям. Тогда формулой (1) определятся частоты элементарных оболочек. Переменность R_1, R_2 уже не будет играть роли и, если принять, что граничные условия не оказывают существенного влияния на плотность частот, то, следуя Р. Куранту, можно подсчитать плотность частот произвольной элементарной оболочки, а затем выполнить интегрирование по всей срединной поверхности. Результат такой модификации сведется к тому, что ординаты обсуждаемых графиков станут функциями x_1, x_2 , и надо будет выполнить интегрирование по области, занятой оболочкой. Легко убедиться, что бесконечные разрывы интегрируемы, а значит они будут исчезать всегда, когда R_1, R_2 отличны от констант.

Замечание. Изложенная выше схема рассуждения Р. Куранта существенно опирается на утверждение, что плотность частот не зависит (в первом приближении) от граничных условий. Его справедливость доказана для широкого класса уравнений, который, однако, не охватывает уравнений теории колебаний оболочек.

Вырождение динамического краевого эффекта означает повышение роли граничных условий. Поэтому в области вырождения метод Р. Куранта подлежит дополнительному обсуждению (в связи с этим выше и говорилось только о качественной стороне явления размазывания).

Можно предполагать, что существенное сгущение частот] в чистом виде свойственно только оболочкам с постоянными кривизнами. Чем шире область изменения R_1, R_2 , тем сильнее размажутся точки сгущения. Это интересно было бы исследовать, так как в общем случае, вероятно, надо говорить об областях сгущения, а точку (или точки) рассматривать как результат вырождения, вызванного уменьшением области изменения R_1, R_2 . Использование асимптотического метода [5-11] здесь требует большой осторожности, так как выше было показано, что он не приспособлен к учету переменности R_1, R_2 .

В полой оболочке кривизны меняются мало. В ней могут иметь место точки сгущения, но для этого оболочка должна быть очень тонкой.

Поступила 15 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Б о л о т и н В. В. О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек. ПММ, 1963, т. 27, выг. 2.
2. B o l o t i n V. V. On the broadband random vibration of elastic systems. Appl. Mech. Proc. of the eleventh Internat. Congr. of appl. mech. Munich (Germany). Berlin/Heidelberg/ New York, Springer — Verlag, 1964.
3. B o l o t i n V. V. The density of eigenvalues in vibration problems of elastic plates and shells. Proc. vibration problems, 1965, vol. 6, № 4.
4. Б о л о т и н В. В. Плотность собственных значений в задачах о колебаниях упругих пластин и оболочек. Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. Баку, 1966, М., «Наука», 1966.
5. Б о л о т и н В. В., М о с к а л е н к о В. Н. Колебания оболочек. Прочность, устойчивость, колебания, т. 3 (справочник), М., «Машиностроение», 1968.
6. Б о л о т и н В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
7. Б о л о т и н В. В., М а к а р о в Б. П., М и ш е н к о в Г. В., Ш в е й к о Ю. Ю. Асимптотический метод исследования спектра собственных частот упругих пластинок. Сб. «Расчеты на прочность», М., Машгиз, 1960, вып. 6.
8. Б о л о т и н В. В. Динамический краевой эффект при колебаниях упругих пластинок. Инж. сб., 1961, т. 31.
9. Б о л о т и н В. В. Асимптотический метод исследования задач о собственных значениях для прямоугольных областей. Сб. «Проблемы механики сплошной среды», М., Изд-во АН СССР, 1961.
10. Б о л о т и н В. В. Асимптотический метод в теории колебаний упругих пластин и оболочек. Тр. Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Казань, Казанск. филиал АН СССР, 1961.
11. Б о л о т и н В. В. Обобщение асимптотического метода решения задач о собственных значениях для прямоугольных областей. Инж. ж. 1961, т. 1, № 3.
12. К у р а н т Р., Г и л ь б е р т Д. Методы математической физики, М., Гостехиздат 1951, т. 1.