СООТНОШЕНИЯ РАСШИРЕННОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. В. Костарев, В. К. Прокопов

(Ленинград)

Выводятся соотношения ортогональности расширенных собственных векторов задач о деформации полосы, кругового прямоугольника и осесимметричной деформации цилиндра при однородных краевых условиях в перемещениях.

Проблема одновременных разложений заданных на части поверхности упругого тела граничных условий в ряды по неортогональным однородным решениям решена лишь для некоторых классических задач при определенных комбинациях граничных условий. В случае плоской задачи теории упругости о полосе такие разложения осуществимы благодаря соотношению обобщенной ортогональности П. Ф. Папковича [1–4]. П. А. Шифф [5] получил подобное соотношение для осесимметричной задачи о цилиндре, обобщенное в работе [6] Б. М. Нуллером. Однако указанные соотношения ортогональности не позволяют удовлетворить точно произвольным граничным условиям на всех поверхностях упругого тела конечных размеров.

Интерес в этом отношении представляют соотношения ортогональности расширенных собственных векторов краевых задач. Уравнения теории упругости допускают построение таких векторов не единственным образом. Так, Литл и Чайлд [7,8] строят системы расширенных собственных векторов, ортогональных с векторами сопряженных задач. Такие соотношения ортогональности авторы назвали биортогональностью.

Более естественным и общим представляется метод Флюгге и Келькара [9], позволяющий строить системы расширенных собственных векторов, которые удовлетворяют самосопряженным дифференциальным уравнениям и обладают поэтому свойством ортогональности. Этот метод дает тоже не единственное решение (авторы метода воспользовались не лучшим), однако практический интерес представляют лишь системы таких векторов, проекции которых соответствуют комбинациям задаваемых на границе величин (перемещений, нормальных и касательных напряжений).

Ниже методом Флюгге и Келькара строятся именно такие системы расширенных векторов для трех двумерных задач теории упругости. Так как указанный метод исходит из уравнений в перемещениях, то наиболее простым является случай однородных граничных условий в перемещениях, который и рассматривается. Однако метод может быть распространен и на случай силовых однородных условий.

1. Полоса. Рассмотрим полосу, продольные края которой заделаны

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 1 \tag{1.1}$$

Исходные уравнения в перемещениях для плоского напряженного состояния запишем в виде

$$2m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (m-1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (m+1)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = 0, \quad 2m\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (m-1)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (m+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь u, v — проекции перемещений на оси x, y соответственно, m — число Пуассона. Решение уравнений (1.2) ищем в виде

$$\mathbf{u} = \left\| \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\| = \xi(y)\, e^{-\lambda x}, \qquad \xi(y) = \left\| \begin{matrix} f(y) \\ h(y) \end{matrix} \right\| \tag{1.3}$$

Подстановка выражения (1.3) в уравнения (1.2) дает соотношение для нахождения векторов $\xi(y)$

$$\xi'' = \lambda \mathbf{L}_1 \xi' + \lambda^2 \mathbf{L}_2 \xi \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ — матрицы

$$\mathbf{L}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & l_{12}^{(1)} \\ l_{21}^{(1)} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{L}_2 = \begin{Vmatrix} l_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & l_{22}^{(2)} \end{Vmatrix}$$

$$l_{12}^{(1)} = \frac{m+1}{m-1}, \quad l_{21}^{(1)} = \frac{m+1}{2m}, \quad l_{11}^{(2)} = \frac{-2m}{m-1}, \quad l_{22}^{(2)} = \frac{1-m}{2m}$$

и штрихами обозначено дифференцирование по y. Вектор $\xi\,(y)$ должен удовлетворять днородным краевым условиям (1.1). Краевая задача (1.4), (1.1) порождает бесконечную систему собственных векторов[1]

$$\xi_k\,(y, \lambda_k) = \begin{Vmatrix} f_k\,(y, \lambda_k) \\ h_k\,(y, \lambda_k) \end{Vmatrix} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

соответствующих собственным значениям λ_k параметра λ — корням уравнений

$$\frac{3m-1}{m+1}\sin 2\lambda \pm 2\lambda = 0$$

Система собственных векторов $\xi_k(y, \lambda_k)$ не обладает свойством ортогональности на промежутке $(-1,1)$.

Вектору перемещений (1.3), принимающему теперь вид

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi_k\,(y)\, e^{-\lambda_k x} \tag{1.5}$$

соответствуют напряжения

$$\frac{1}{\mu}\sigma_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sigma_k\,(y)\, e^{-\lambda_k x}, \qquad \frac{1}{\mu}\tau_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \tau_k\,(y)\, e^{-\lambda_k x}$$

Здесь

$$\sigma_k = \frac{2}{m-1}\,(h_k' - m\lambda_k f_k), \qquad \tau_k = f_k' - \lambda_k h_k \tag{1.6}$$

Построим систему расширенных векторов

$$\mathbf{z} = \begin{Vmatrix} \xi\,(y) \\ \eta\,(y) \end{Vmatrix}, \qquad \eta\,(y) = \begin{Vmatrix} p\,(y) \\ q\,(y) \end{Vmatrix} \tag{1.7}$$

(индекс k опущен). Дополнительный вектор $\eta\,(y)$ найдем из условий

$$\xi' = \mathbf{P}\xi + \mathbf{Q}\eta, \qquad \eta' = \mathbf{S}\eta \tag{1.8}$$

Здесь $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{S}$ — 2×2 матрицы, линейно зависящие от λ.

Заметим, что, согласно условиям (1.8), можно записать

$$\eta = \mathbf{Q}^{-1}\xi' - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}\xi \tag{1.9}$$

Индекс -1 обозначает обращение матрицы.

Потребуем, чтобы элементы вектора $\eta\,(y)$ — функции $p\,(y)$, $q\,(y)$ соответствовали комбинациям задаваемых на границах $x = \mathrm{const}$ полосы условий (перемещений, их производных по y, нормальных и касательных напряжений). Тогда из соотношения (1.9) с необходимостью вытекает

$$\mathbf{P} = \lambda\mathbf{P}_1, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0, \qquad \mathbf{S} = \lambda\mathbf{S}_1$$

Матрицы $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{S}_1$ не зависят от λ. Подстановка выражений (1.8), (1.9) в уравнение (1.4) дает систему уравнений для нахождения матриц $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{S}_1$. Имеем

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}_0\mathbf{S}_1\mathbf{Q}_0^{-1} - \mathbf{L}_1 = 0, \qquad \mathbf{Q}_0\mathbf{S}_1\mathbf{Q}_0^{-1}\mathbf{P}_1 + \mathbf{L}_2 = 0 \tag{1.10}$$

---

[1] Вид собственных векторов рассмотренных здесь задач можно найти в работах [7, 9, 10].

Решением уравнений (1.10) являются матрицы

$$P_1 = S_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad Q_0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & q_{22}^{(0)} \end{Vmatrix}, \qquad q_{22}^{(0)} = \frac{m-1}{2m}$$

Теперь, согласно формулам (1.6), (1.7), (1.9), имеем

$$\begin{aligned} p_k(y) &= -f_k' - \lambda_k h_k = \tau_k - 2f_k' \\ q_k(y) &= \frac{2m}{m-1}(h_k' - \lambda_k f_k) = \sigma_k + 2h_k' \end{aligned} \tag{1.11}$$

Как следует из соотношений (1.8), расширенные векторы (1.7) удовлетворяют уравнениям следующей краевой задачи:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z} + \lambda \mathbf{B}\mathbf{z}, \qquad \mathbf{M}\mathbf{z}(\pm 1) = 0 \tag{1.12}$$

Здесь A, B, M — матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0 & Q_0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.13}$$

Покажем, что задача (1.12) является самосопряженной. Для этого необходимо [11], чтобы существовало невырожденное преобразование

$$\mathbf{w} = \mathbf{T}\mathbf{z} \tag{1.14}$$

переводящее сопряженную краевую задачу

$$\mathbf{w}' = -\mathbf{A}^*\mathbf{w} - \lambda \mathbf{B}^*\mathbf{w}, \qquad \mathbf{N}\mathbf{w}(\pm 1) = 0 \tag{1.15}$$

в исследуемую (1.12). Индекс * обозначает транспонирование матрицы.

Это требование дает три уравнения

$$\mathbf{T}\mathbf{A} + \mathbf{A}^*\mathbf{T} = 0, \qquad \mathbf{T}\mathbf{B} + \mathbf{B}^*\mathbf{T} = 0, \qquad \mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}^* = 0 \tag{1.16}$$

Наиболее простым решением системы (1.16) будет матрица

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Найдем соотношение ортогональности векторов $\mathbf{z}_k(y)$. Умножив уравнение (1.12) для вектора $\mathbf{z}_n$ на вектор $\mathbf{w}_m^*$ слева и транспонированное уравнение (1.15) для $\mathbf{w}_m$ на $\mathbf{z}_n$ справа, сложив и проинтегрировав результат от -1 до 1, подставим преобразование (1.14). Получим

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_{-1}^{1} \mathbf{z}_m^* \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{z}_n \, dy = [\mathbf{z}_m^* \mathbf{T}\mathbf{z}_n]_{-1}^{1}$$

Учитывая формулы (1.7), (1.11) и краевые условия (1.1), имеем соотношение ортогональности векторов $\mathbf{z}_k(y)$

$$\int_{-1}^{1} \mathbf{z}_m^* \mathbf{R}\mathbf{z}_n \, dy = 0, \qquad n \neq m \tag{1.17}$$

Здесь R — весовая матрица

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Раскрывая соотношение (1.17) с помощью формул (1.3), (1.11), запишем его в другой форме

$$\int_{-1}^{1} (f_m\sigma_n - \tau_m h_n + f_n\sigma_m - \tau_n h_m)\, dy = 0, \qquad n \neq m \tag{1.18}$$

Соотношение ортогональности (1.17), (1.18) позволяет найти коэффициенты разложения произвольного вектора $\bar{\mathbf{z}}_0$

$$\bar{\mathbf{z}}_0^* = \| \bar{f}_0(y),\ \bar{h}_0(y),\ \bar{p}_0(y),\ \bar{q}_0(y) \|$$

в ряд по расширенным векторам

$$\bar{\mathbf{z}}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \mathbf{z}_k(y)$$

$$C_k = \frac{1}{G_k} \int_{-1}^{1} (\bar{f}_0\sigma_k - \bar{\tau}_0 h_k + f_k\bar{\sigma}_0 - \tau_k\bar{h}_0)\, dy, \qquad G_k = 2\int_{-1}^{1} (f_k\sigma_k - \tau_k h_k)\, dy$$

Здесь G_k — нормирующие множители.

2. Круговой прямоугольник. Рассмотрим деформацию кругового прямоугольника, дуговые края которого заделаны

$$u = v = 0 \quad \text{при } \rho = a, \quad \rho = b \tag{2.1}$$

Здесь u, v — проекции вектора перемещений на оси полярных координат ρ, φ соответственно.

Перейдем к новой координате

$$t = \ln\frac{\rho}{\sqrt{ab}} \qquad (-h \leqslant t \leqslant h) \qquad \left(h = \frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}\right)$$

Уравнения в перемещениях для плоского напряженного состояния примут вид

$$\begin{gathered} 2m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (m-1)\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - 2mu + (m+1)\frac{\partial^2 v}{\partial t\, \partial\varphi} - (3m-1)\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \\ 2m\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + (m-1)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (m-1)v + (m+1)\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial\varphi} + (3m-1)\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Решение уравнений (2.2) ищем в виде

$$\mathbf{u} = \left\| \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\| = \boldsymbol{\xi}(t)\, e^{-\lambda\varphi}, \qquad \boldsymbol{\xi}(t) = \left\| \begin{matrix} f(t) \\ h(t) \end{matrix} \right\| \tag{2.3}$$

Подстановка решения (2.3) в уравнения (2.2) дает соотношение для нахождения вектора $\boldsymbol{\xi}(t)$

$$\boldsymbol{\xi}'' = \lambda \mathbf{L}_1\boldsymbol{\xi}' + \lambda^2\mathbf{L}_2\boldsymbol{\xi} + \lambda\mathbf{L}_3\boldsymbol{\xi} + \mathbf{L}_4\boldsymbol{\xi} \tag{2.4}$$

$$\mathbf{L}_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & l_{12}^{(1)} \\ l_{21}^{(1)} & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad \mathbf{L}_2 = \left\| \begin{matrix} l_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & l_{22}^{(2)} \end{matrix} \right\|, \qquad \mathbf{L}_3 = \left\| \begin{matrix} 0 & l_{12}^{(3)} \\ l_{21}^{(3)} & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$\mathbf{L}_4 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \qquad \begin{matrix} l_{12}^{(1)} = \dfrac{m+1}{2m}, & l_{21}^{(1)} = \dfrac{m+1}{m-1}, & l_{11}^{(2)} = \dfrac{1-m}{2m} \\ l_{22}^{(2)} = \dfrac{-2m}{m-1}, & l_{12}^{(3)} = \dfrac{1-3m}{2m}, & l_{21}^{(3)} = \dfrac{3m-1}{m-1} \end{matrix}$$

Штрихами обозначено дифференцирование по t.

Вектор $\boldsymbol{\xi}(t)$ должен кроме уравнения (2.4) удовлетворять краевым условиям (2.1). Краевая задача (2.1), (2.4) имеет бесконечную систему неортогональных собственных векторов

$$\boldsymbol{\xi}_k(t, \lambda_k) = \left\| \begin{matrix} f_k(t, \lambda_k) \\ h_k(t, \lambda_k) \end{matrix} \right\| \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

соответствующих собственным значениям λ_k параметра λ-корням уравнения

$$(m+1)^2(\lambda^2+1)\operatorname{sh}^2 2h+(3m-1)^2 \operatorname{sh}2(\lambda i+1)h \operatorname{sh}2(\lambda i-1)h=0 \tag{2.5}$$

Вектору перемещений (2.3), принимающему теперь вид

$$\mathbf{u}=\sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi_k(t)\, e^{-\lambda_k \varphi}$$

соответствуют напряжения

$$\frac{1}{\mu}\rho\sigma_\varphi=\sum_{k=0}^{\infty} C_k\sigma_k(t)\,e^{-\lambda_k\varphi}, \qquad \frac{1}{\mu}\rho\tau_{\rho\varphi}=\sum_{k=0}^{\infty} C_k\tau_k(t)\,e^{-\lambda_k\varphi} \tag{2.6}$$

Построим систему расширенных векторов задачи. Опуская выкладки, аналогичные приведенным в задаче о полосе, запишем результат

$$\mathbf{z}_k{}^*=\|f_k,\ h_k,\ p_k,\ q_k\| \qquad (k=0,1,2\ldots) \tag{2.7}$$

где в обозначениях (2.6)

$$\begin{gathered} p_k=\frac{2m}{m-1}(f_k'+f_k-\lambda_k h_k)=\sigma_k+2f_k' \\ q_k=-h_k'-h_k-\lambda_k f_k=\tau_k-2h_k' \end{gathered} \tag{2.8}$$

Легко проверить, что векторы $\mathbf{z}_k(t)$ удовлетворяют самосопряженному дифференциальному уравнению и краевым условиям

$$\mathbf{z}'=\mathbf{A}\mathbf{z}+\lambda\mathbf{B}\mathbf{z}, \qquad \mathbf{M}\mathbf{z}(\pm h)=0 \tag{2.9}$$

Здесь **A**, **B**, **M** — матрицы ($a_{13}={}^1/_2\,(m-1)/m$)

$$\mathbf{A}=\begin{Vmatrix} -1 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{M}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Соотношение ортогональности векторов $\mathbf{z}_k(t)$ имеет вид

$$\int_{-h}^{h} \mathbf{z}_m^*\mathbf{R}\mathbf{z}_n dt=0 \quad (n\neq m), \qquad \mathbf{R}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.10}$$

Раскрыв соотношение (2.10) с помощью формул (2.7), (2.8), получим

$$\int_{-h}^{h}(f_m\tau_n-\sigma_m h_n+f_n\tau_m-\sigma_n h_m)\,dt=0 \quad (n\neq m) \tag{2.11}$$

Используя соотношение ортогональности (2.11), можно найти коэффициенты разложения произвольного вектора

$$\bar{\mathbf{z}}^*{}_0=\|\bar f_0(t),\ \bar h_0(t),\ \bar p_0(t),\ \bar q_0(t)\|$$

в ряд по собственным векторам задачи (2.9)

$$\bar{\mathbf{z}}_0=\sum_{k=0}^{\infty} C_k\mathbf{z}_k(t), \qquad C_k=\frac{1}{G_k}\int_{-h}^{h}(\bar f_0\tau_k-\bar\sigma_0 h_k+f_k\bar\tau_0-\sigma_k\bar h_0)\,dt$$

Здесь G_k — нормирующие множители

$$G_k=2\int_{-h}^{h}(f_k\tau_k-\sigma_k h_k)\,dt$$

3. Цилиндр [9]. Рассмотрим осесимметричную деформацию кругового полого цилиндра с осью x, боковые поверхности которого $r = b$, $r = a$ $(a > b)$ заделаны

$$u = v = 0 \text{ при } r = a, \ r = b \tag{3.1}$$

Здесь u, v — проекции вектора перемещений $\mathbf{u}$ на оси цилиндрических координат x, r соответственно.

Уравнения в перемещениях в этом случае имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{m-2}{2m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{m-1}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0\\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial r}+\frac{m-1}{m}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v^2}{r^2}\right)+\frac{m-2}{2m}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0\end{gathered} \tag{3.2}$$

Положив

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\xi}(r)e^{-\lambda x}, \qquad \boldsymbol{\xi}(r) = \left\| \begin{matrix} f(r) \\ h(r) \end{matrix} \right\|$$

получим уравнение

$$(r\boldsymbol{\xi}')' = \lambda \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\xi}' + \lambda^2 \mathbf{L}_2 \boldsymbol{\xi} + \lambda \mathbf{L}_3 \boldsymbol{\xi} + \mathbf{L}_4 \boldsymbol{\xi} \tag{3.3}$$

$$\mathbf{L}_1 = r\left\| \begin{matrix} 0 & l_{12}^{(1)} \\ l_{21}^{(1)} & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{L}_2 = r\left\| \begin{matrix} l_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & l_{22}^{(2)} \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{L}_3 = \left\| \begin{matrix} 0 & l_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{L}_4 = \frac{1}{r}\left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$l_{12}^{(1)} = \frac{m}{m-2}, \quad l_{21}^{(1)} = \frac{m}{2(m-1)}, \quad l_{11}^{(2)} = -\frac{2(m-1)}{m-2}, \quad l_{22}^{(2)} = -\frac{m-2}{2(m-1)}$$

$$l_{12}^{(3)} = \frac{m}{m-2}$$

порождающее вместе с краевыми условиями (3.1) систему неортогональных на промежутке (b, a) собственных векторов $\boldsymbol{\xi}_k(r)$. Теперь

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \boldsymbol{\xi}_k(r) e^{-\lambda_k x} \tag{3.4}$$

Перемещениям (3.4) соответствуют напряжения

$$\frac{1}{\mu}\sigma_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sigma_k(r) e^{-\lambda_k x}, \qquad \frac{1}{\mu}\tau_{rx} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \tau_k(r) e^{-\lambda_k x}$$

$$\sigma_k = \frac{2}{m-2}\left[h_k' + \frac{1}{r}h_k - (m-1)\lambda_k f_k\right], \qquad \tau_k = f_k' - \lambda_k h_k$$

Методом, изложенным в п. 1, можно построить систему расширенных векторов

$$\mathbf{z}_k^*(r) = \| f_k, \ h_k, \ r(\tau_k - 2f_k'), \ r\sigma_k + 2(rh_k)' \| \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.5}$$

удовлетворяющих самосопряженному дифференциальному уравнению

$$r\mathbf{z}' = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & m_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \mathbf{z} + \lambda r \left\| \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \mathbf{z}, \quad m_{24} = \frac{m-2}{2(m-1)} \tag{3.6}$$

и краевому условию

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \mathbf{z}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \qquad \mathbf{E} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

Для векторов (3.5) соблюдается соотношение ортогональности

$$\int_b^a \mathbf{z}_n^* \mathbf{R} \mathbf{z}_m \, dr = 0 \qquad (n \neq m), \qquad \mathbf{R} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{3.7}$$

Раскрыв соотношение (3.7) с помощью выражения (3.5), получим

$$\int_b^a (f_m \sigma_n - \tau_m h_n + f_n \sigma_m - \tau_n h_m) \, r \, dr = 0, \qquad n \neq m \tag{3.8}$$

Коэффициенты разложения

$$\bar{\mathbf{z}}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \mathbf{z}_k (r)$$

произвольного вектора

$$\bar{\mathbf{z}}_0^* = \| \bar{f}_0 (r), \ \bar{h}_0 (r), \ \bar{p}_0 (r), \ \bar{q}_0 (r) \|$$

ввиду соотношения (3.8) находятся по формуле

$$C_k = \frac{1}{G_k} \int_b^a (\bar{f}_0 \sigma_k - \bar{\tau}_0 h_k + f_k \bar{\sigma}_0 - \tau_k \bar{h}_0) \, r \, dr$$

где G_k — нормирующие множители

$$G_k = 2 \int_b^a (f_k \sigma_k - \tau_k h_k) \, r \, dr$$

Поступила 27 X 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы. Докл. АН СССР, 1940, т. 27, № 4.
2. Гринберг Г. А. О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях. ПММ, 1953, т. 17, вып. 2.
3. Прокопов В. К. О соотношении обобщенной ортогональности П. Ф. Папковича для прямоугольной пластинки. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
4. Гуссейн-Заде М. И. О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
5. Schiff P. A.-Sur l'equilibre d'un cylindre d'elastique. J. Math. pures et appl., Ser. III, 1883, t. 9.
6. Нуллер Б. М. О соотношении обобщенной ортогональности П. А. Шиффа. ПММ, 1969, г. 33, вып. 2.
7. Little R. W., Childs S. B. Elastostatic boundary region problem in solid cylinders. Quart. Appl. Math., 1967, vol. 25, No. 3.
8. Little R. W. Semi-infinite strip problem with built-in edges. Trans. ASME, Ser. E, 1969, vol. 36, No. 2.
9. Flugge W., Kelkar V. S. The problem of an elastic circular cylinder. Internat. J. Solids and Struct., 1968, vol. 4, No. 4.
10. Рекач В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М., «Высшая школа», 1966.
11. Bliss G. A. Definitely self-adjoint boundary value problem. Trans. Amer. Math. Soc., 1938, vol. 44, pp. 413—428.