К РАСЧЕТУ ПРЕДЕЛА ПЛАСТИЧНОСТИ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. В. Дудукаленко, В. А. Минаев

(Воронеж)

Рассматривается задача об определении предела пластичности композитной среды. Используя вариационные принципы теории идеальной пластичности [1], приближенно находится диссипативная функция макросреды, содержащей жестко-пластические компоненты. В случае упругой среды задачи этого типа исследовались в работах [2,3].

1. Пусть неограниченное евклидово пространство в каждой точке x_i заполнено компонентами из идеального жестко-пластического материала с разными пределами пластичности. Компоненты среды прочно связаны и удовлетворяют условию пластичности Мизеса

$$s_{ij}s_{ij} = (k^\circ + k')^2 \qquad (1.1)$$

где s_{ij} — девиатор напряжений, k° — средний по объему предел пластичности, k' — флуктуации предела пластичности, которые предполагаются однородными случайными функциями.

Применим вариационные принципы теории пластичности для вычисления диссипативной функции макросреды. Пусть на границе некоторого объема V задано поле скоростей v_i°, которое соответствует однородному деформированному состоянию ε_{ij}°. Действительное поле скоростей деформаций, удовлетворяющих заданным краевым условиям, соответствует минимуму функционала [1]

$$D = \frac{1}{V}\int\limits_V (k^\circ + k')\sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}\, dV \qquad (1.2)$$

Для достаточно большего объема V интеграл (1.2) можно считать плотностью диссипации, которая соответствует диссипативной функции макросреды $D(\varepsilon_{ij}^\circ)$. В соотношении (1.2) примем $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^\circ$ (в случае упругой среды это соответствует осреднению по Фойхту), тогда из (1.2) получим верхнюю границу для диссипативной функции

$$D(\varepsilon_{ij}^\circ) < k^\circ \sqrt{\varepsilon_{ij}^\circ\varepsilon_{ij}^\circ} \qquad (1.3)$$

Как следствие второй теоремы предельного равновесия получим [1], что поверхность текучести макросреды, соответствующая диссипативной функции $D(\varepsilon_{ij}^\circ)$, будет лежать внутри поверхности текучести Мизеса $s_{ij}^\circ s_{ij}^\circ = k^{\circ 2}$.

Рассмотрим осреднение при постоянном поле напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^\circ$ (в случае упругой среды это соответствует осреднению по Рейссу), тогда из первой теоремы предельного равновесия получим, что статически безопасное поле σ_{ij}° должно удовлетворять условию $s_{ij}^\circ s_{ij}^\circ = k^*$, где k^* — наименьший предел пластичности компонентов среды.

Таким образом, поверхность текучести макросреды будет лежать между цилиндрами Мизеса радиусами k° и k^*.

Для приближенного вычисления диссипативной функции $D(\varepsilon_{ij}^\circ)$ воспользуемся условием минимальности функционала (1.2).

Подынтегральное выражение в (1.2) представим в виде ряда Тейлора по флуктуациям k', ε_{ij}° ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^\circ + \varepsilon_{ij}'$) и интегрирование распространим по неограниченному пространству.

В силу однородности случайных функций и краевых условий осреднение по объему и математическое ожидание будут совпадать.

Теперь соотношение (1.2) можно представить в виде ряда

$$D(\varepsilon_{ij}^\circ) = k^\circ J_0 + \langle k'\varepsilon_{ij}'\rangle \frac{\varepsilon_{ij}^\circ}{J_0} + \frac{k^\circ}{2J_0}\left(\delta_{im}\delta_{jn} - \frac{\varepsilon_{ij}^\circ\varepsilon_{mn}^\circ}{J_0^2}\right)\langle\varepsilon_{ij}'\varepsilon_{mn}'\rangle + \cdots$$

$$J_0 = \sqrt{\varepsilon_{ij}^\circ\varepsilon_{ij}^\circ} \qquad (1.4)$$

где угловыми скобками обозначено осреднение.

В соотношении (1.4) выписаны все моменты случайных флуктуаций не выше второго порядка. Флуктуации предполагаются достаточно малыми, чтобы обеспечить сходимость ряда (1.4).

2. Предположим, что флуктуации девиатора напряжений приближенно можно представить в виде

$$s_{ij}' = \eta_0 \varepsilon_{ij}' + \eta_{ij} k' \tag{2.1}$$

где величины η_0, η_{ij} в силу однородности рассматриваемых случайных функций, должны быть постоянными. Эти постоянные будут определяться из условия минимальности функционала (1.4).

Так как средние напряжения постоянны, флуктуации s'_{ij} должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\sigma'_{,i} + \eta_0 \varepsilon'_{ij,j} + \eta_{ij} k'_{,j} = 0 \tag{2.2}$$

Присоединим уравнения совместности и несжимаемости

$$\varepsilon'_{ij} = {}^1/_2 (v'_{i,j} + v'_{j,i}) \qquad \varepsilon'_{ii} = 0 \tag{2.3}$$

где σ', v'_i — флуктуации гидростатического давления и поля скоростей.

Решение системы уравнений (2.2), (2.3) получим при помощи преобразования Фурье, параметры преобразования по трем переменным x_i обозначим через k_i. Решение уравнений (2.3), (2.2) будет иметь вид

$$\eta_0 \varepsilon_{ij}' = \int_{-\infty}^{\infty} [2k_i k_j k_k k_m \eta_{km} - m (k_i k_k \eta_{jk} + k_j k_k \eta_{ik}] \frac{\varkappa}{m^2} e^{ik_n x_n} dk \qquad (m = k_i k_i) \tag{2.4}$$

где $\varkappa'$ — функция переменных k_i, определяющая спектральное разложение случайной функции

$$k' = \int_{-\infty}^{\infty} \varkappa' e^{ik_n x_n} dk \tag{2.5}$$

Интегрирование производится по всему пространству переменных k_i.

Будем предполагать, что случайная функция k' изотропна, тогда [4]

$$\langle \varkappa'(k) \varkappa'(k') \rangle = \Lambda(m) \delta(k_i - k_i') \tag{2.6}$$

где $\Lambda(m)$ — спектральная плотность функции k'.

Так как в соотношение (2.6) входит δ-функция из (2.4) и (2.5) получим

$$\langle k' \varepsilon_{ij}' \rangle = \frac{1}{\eta_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2 \frac{k_i k_j k_k k_m}{m} \eta_{km} - k_i k_k \eta_{jk} - k_j k_k \eta_{ik} \right) \frac{\Lambda(m)}{m} dk \tag{2.7}$$

В дальнейшем потребуется вычисление интегралов вида

$$A_{ijkmnpqr} = \int_{-\infty}^{\infty} k_i k_j k_k k_m k_n k_p k_q k_r \frac{\Lambda(m)}{m^4} dk \tag{2.8}$$

Так как $\Lambda(m)$ — изотропная функция, рассматриваемый интеграл будет изотропным тензором, симметричным по всем индексам.

Изотропный тензор с постоянными компонентами можно представить как линейную комбинацию произведений тензоров δ_{ij}. После симметризации по всем индексам получим, что рассматриваемые тензоры пропорциональны следующим:

$$\begin{gathered}
\delta_{ijkm} = \delta_{ij}\delta_{km} + \delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk} \\
\delta_{ijkmnp} = \delta_{ij}\delta_{kmnp} + \delta_{ik}\delta_{jmnp} + \delta_{in}\delta_{jknp} + \delta_{in}\delta_{jkmp} + \delta_{ip}\delta_{jkmn} \\
\delta_{ijkmnpqr} = \delta_{ij}\delta_{kmnpqr} + \delta_{ik}\delta_{jmnpqr}
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Теперь интеграл (2.8) можно представить в виде

$$A_{ijkmnpqr} = A\delta_{ijkmnpqr} \tag{2.10}$$

Интегралы вида (2.8), содержащие меньшее число попарных произведений векторов k_i / m, можно вычислить путем свертки соответствующих индексов в соотношении (2.10). При этом следует использовать соотношения

$$\delta_{ijkmnpqq} = 9\delta_{ijkmnp}, \qquad \delta_{ijkmnn} = 7\delta_{ijkm}, \qquad \delta_{ijkk} = 5\delta_{ij} \tag{2.11}$$

Учитывая, что [4]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(m)\, dk = d^2$$

где d — дисперсия случайной функции k', из формул (2.8), (2.10), (2.11) получим

$$9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3A = d^2 \tag{2.12}$$

Используя свойства тензоров (2.9), получим следующие тождества:

$$\delta_{ikmp}\varepsilon_{ij}{}^\circ\varepsilon_{mn}^\circ\eta_{jk}\eta_{np} = (\varepsilon_{ij}{}^\circ\eta_{ij})^2 + \varepsilon_{ij}{}^\circ\varepsilon_{in}{}^\circ\eta_{kj}\eta_{kn} + \varepsilon_{ij}{}^\circ\varepsilon_{mn}^\circ\eta_{jm}\eta_{in}$$

$$\delta_{ijkmnp}\eta_{km}\eta_{rp}\varepsilon_{ij}{}^\circ\varepsilon_{nr}{}^\circ = 2(\varepsilon_{ij}{}^\circ\eta_{ij})^2 + 4\varepsilon_{ik}{}^\circ\varepsilon_{im}^\circ\eta_{jk}\eta_{jm} + 4\varepsilon_{ij}{}^\circ\varepsilon_{nr}{}^\circ\eta_{ir}\eta_{jn}$$

$$\delta_{ijkmnpqr}\varepsilon_{ij}{}^\circ\varepsilon_{pn}^\circ\eta_{km}\eta_{qr} = 4\varepsilon_{ij}{}^\circ\varepsilon_{ij}{}^\circ\varepsilon\eta_{km}\eta_{km} + 8(\varepsilon_{ij}{}^\circ\eta_{ij})^2 + 32\varepsilon_{ik}{}^\circ\varepsilon_{im}^\circ\eta_{nk}\eta_{nm} + \\ + 16\varepsilon_{ij}{}^\circ\varepsilon_{mn}^\circ\eta_{in}\eta_{jm} \tag{2.13}$$

3. Остановимся на вычислении моментов случайных флуктуаций, входящих в соотношение (1.4). Интеграл (2.7) вычисляется по формулам (2.8), (2.10) — (2.12)

$$\langle k'\varepsilon_{ij}{}'\rangle = -\frac{2d^2}{5\eta_0}\eta_{ij} \tag{3.1}$$

Используя тождества (2.13), аналогично вычисляются моменты $\langle\varepsilon'_{ij}\,\varepsilon'_{ij}\rangle$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{mn} <\langle\varepsilon'_{ij}\,\varepsilon'_{mn}\rangle$. Окончательно диссипативную функцию (1.4) получим в виде

$$D = k^\circ J_0 - \frac{2d^2\varepsilon_{ij}{}^\circ\nu_{ij}}{5J_0} + \frac{d^2k^\circ}{J_0}\{{}^1/_5\nu_{ij}\nu_{ij} - {}^1/_{945}[8\nu_{ij}\nu_{ij} + 70(c_{ij}\nu_{ij})^2 + 46c_{im}c_{ik}\nu_{jm}\nu_{jk} + \\ + 10\varepsilon_{ij}{}^\circ\varepsilon_{mn}^\circ\nu_{in}\nu_{jm}]\} + \cdots \tag{3.2}$$

$$(c_{ij} = \varepsilon_{ij}{}^\circ / J_0,\ \nu_{ij} = \eta_{ij} / \eta_0)$$

Будем предполагать флуктуации предела пластичности малыми. Тогда выражение (3.2) с точностью до слагаемых второго порядка будет квадратичной формой относительно переменных ν_{ij}. Так как $c_{ij} \leqslant 1$, а числовые коэффициенты слагаемых, входящих в квадратные скобки формулы (3.2), малы по сравнению с ${}^1/_5$, выражение в фигурных скобках приближенно равно положительно определенной квадратичной форме ${}^1/_5\,\nu_{ij}\nu_{ij}$.

С учетом этой оценки запишем

$$D = k^\circ J_0 + \frac{d^2(k^\circ\nu_{ij}\nu_{ij} - 2\varepsilon_{ij}\nu_{ij})}{5J_0} \tag{3.3}$$

Минимальное значение D будет иметь вид

$$D = \left(k^\circ - \frac{d^2}{5k^\circ}\right)\sqrt{\varepsilon_{ij}{}^\circ\varepsilon_{ij}{}^\circ} \tag{3.4}$$

Диссипативная функция (3.3) соответствует условию пластичности Мизеса. Предел пластичности можно выразить по заданным концентрациям и пределам пластичности каждой компоненты. В случае двухкомпонентной среды предел пластичности вычисляется по формуле

$$k = c_1k_1 + c_2k_2 - \frac{c_1c_2(k_1 - k_2)^2}{5(c_1k_1 + c_2k_2)} \tag{3.5}$$

где c_1, c_2, k_1, k_2 — концентрации и пределы пластичности соответствующих компонент.

Поступила 15 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.
2. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. J. Mech. and Phys. Solids, 1965, vol. 13, No. 4.
3. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach on the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. J. Mech. and Phys. Solids, 1963, vol. 11, No. 2.
4. Рытов. С. М. Введение в статистическую радиофизику. М., «Наука», 1966.