

ображений размерности. Подобная модель годится, например, для приближенного описания взрыва в сильно трещиноватой скале с учетом постепенного превращения ее в щебень. Добавим, что для существования автомодельных режимов с расширением малой полости наличие скачка уплотнения не обязательно. Пример — расширение пузырька в несжимаемой жидкости (вторая стадия в задаче Рэлея).

Автор благодарит Е. И. Забабахина за полезные советы.

Поступила 21 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.
2. З е л ь д о в и ч Я. Б., Р а й з е р Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
3. К о м п а н е е (А. С. Ударные волны в пластической уплотняющейся среде. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 1.
4. А л е к с е е н к о В. Д., Г р и г о р я н С. С., Н о в г о р о д о в А. Ф., Р ы к о в Г. В. Некоторые экспериментальные исследования по динамике мягких грунтов. Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 6.
5. И ш л и н с к и й А. Ю. О плоском движении песка. Укр. матем. ж., 1954, т. 6, № 4.
6. Г р и г о р я н С. С. Об осесимметричных движениях сыпучей среды. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.
7. В а х р а м е е в Ю. С. О кумуляции ударных волн в неоднородной среде. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.

К ЗАДАЧЕ ГЛИССИРОВАНИЯ ПЛАСТИНКИ ПО ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

А. В. Белокопъ, Р. А. Грунтфест

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается двумерная задача об обтекании произвольного контура, плавающего на поверхности потока тяжелой идеальной жидкости конечной глубины. Указанная задача с использованием результатов [1-3] методами операционного исчисления сведена в § 1 к определению давления на контуре из интегрального уравнения первого рода с разностным нерегулярным ядром сложной структуры, зависящим от двух безразмерных параметров λ и δ .

В §§ 2—4 подробно изучен случай глиссирования наклонной пластинки. В § 2 на основе результатов [4] дано асимптотическое решение интегрального уравнения, полученного в § 1, при больших значениях безразмерного параметра λ и произвольных $\delta \neq 1$. В § 3 приведено решение интегрального уравнения при малых значениях λ и $\delta < 1$ методом, предложенным в [5]. Наконец, в § 4 для малых λ рассмотрен случай $\delta > 1$. Последний является особым в том смысле, что трансформанта Фурье ядра интегрального уравнения имеет два симметрично расположенных полюса на вещественной оси. Интегральные уравнения с ядрами такого сорта и более общими исследовались в работе [6], в которой дано асимптотическое решение интегрального уравнения при малых значениях параметра λ и проведено обоснование применяемого в ней метода. Однако формулы, приведенные в работе, имеют сложный для практического применения вид. Здесь для данного частного вида ядра интегрального уравнения дано приближенное решение в форме, удобной для проведения численных расчетов.

В § 5 рассмотрены примеры; приведены графики, иллюстрирующие эффективность предложенных формул для всего диапазона изменения параметров $\lambda \in (0, \infty)$ и $\delta \neq 1$.

§ 1. Рассмотрим двумерную задачу об обтекании произвольного контура, плавающего на поверхности потока тяжелой идеальной жидкости конечной глубины (фигура).

Как известно [1,2], в линейной постановке приходим к следующей смешанной краевой задаче:

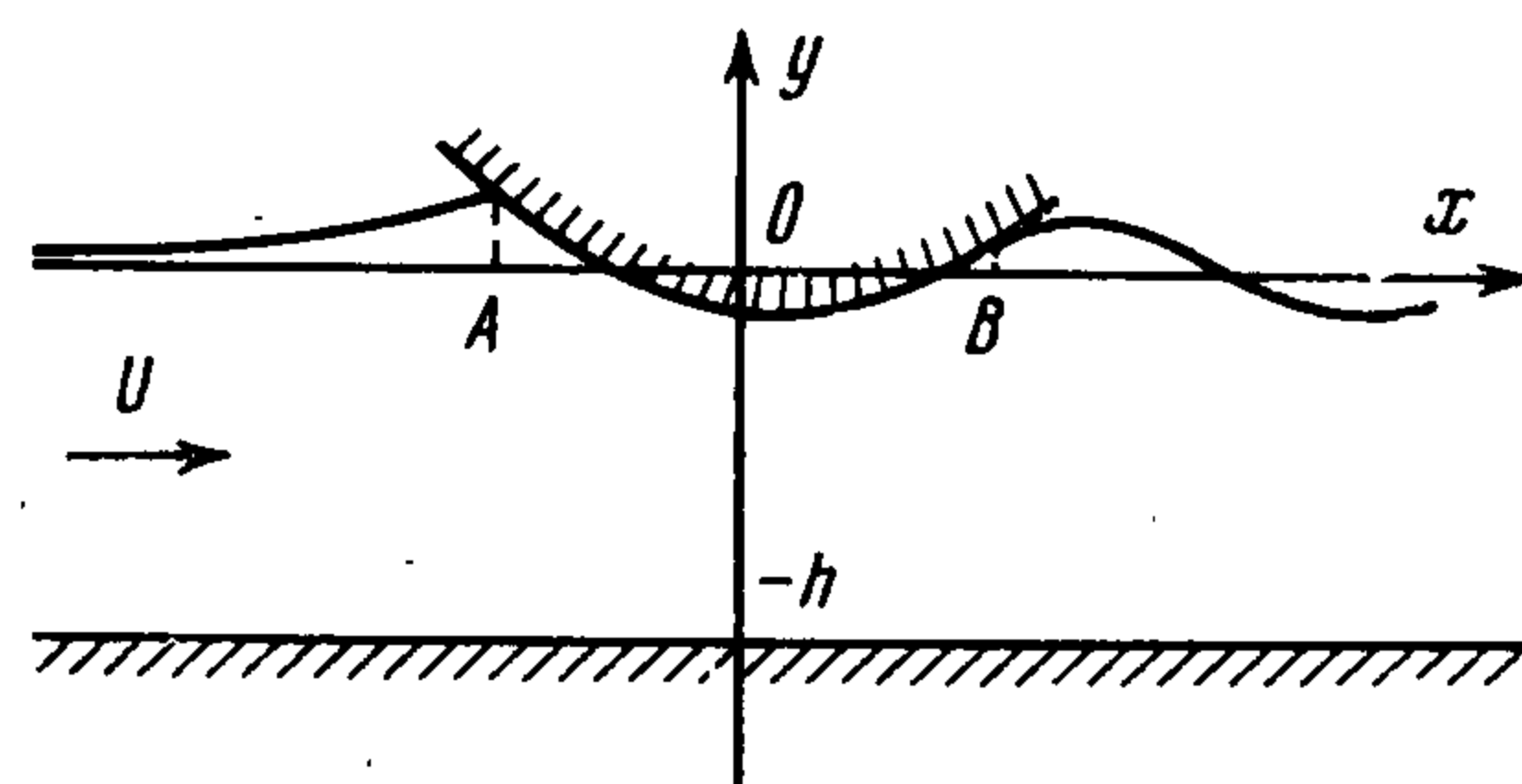
$$\Delta \Psi_1(x', y') = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1(x', -h)}{\partial x'} = 0 \quad (1.1)$$

$$p_1 - p_0 = -\rho g \eta_1(x') - \rho U \frac{\partial \Psi_1(x', y')}{\partial y'} = 0$$

при $y' = 0, x' \in \Omega$

$$\Psi_1(x', y') + U \eta_1(x') = 0 \quad \text{при } y' = 0, x' \in \Omega$$

$$\Psi_1(x', y') + U f_1(x') = 0 \quad \text{при } y' = 0, x' \in \Omega'$$



Здесь $\Psi_1(x', y')$ — функция тока для возмущенного движения, $\eta_1(x')$ — уравнение свободной поверхности, $f_1(x')$ — уравнение обтекаемого контура, p_1 — гидродинамическое давление, p_0 — атмосферное давление, U — скорость потока, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести.

В дальнейшем удобно начало координат поместить в середину проекции смачиваемой части контура на невозмущенную поверхность потока и перейти к безразмерным переменным

$$(x', y') = l(x, y), \quad \Psi_1(x', y') = Ul\Psi(x, y) \quad (1.2)$$

$$p_1 - p_0 = \rho U^2 p, \quad [\eta_1(x'), f_1(x')] = l[\eta(x), f(x)]$$

Здесь $l = AB$ — полудлина смачиваемой зоны пластинки (фигура).

Соотношения (1.1) в отвлеченных величинах (1.2) можно привести к виду

$$\Delta \Psi(x, y) = 0, \quad \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} = 0 \quad \text{при } y = -\frac{h}{l}$$

$$p = \frac{\Psi(x, y)}{\lambda} - \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} = 0, \quad \text{при } y = 0, |x| > 1 \quad (1.3)$$

$$\Psi(x, 0) = -f(x) \quad \text{при } |x| \leq 1, \quad \lambda = U^2(gl)^{-1}$$

При помощи преобразования Фурье поставленная задача может быть сведена к определению давления в зоне смачивания $p(x)$ из следующего интегрального уравнения:

$$A \sin \frac{cx}{\lambda} + B \cos \frac{cx}{\lambda} + \int_{-1}^1 p(u) du \int_0^{\infty} \frac{\cos \tau(x-u)\lambda^{-1}}{\tau \operatorname{cth} \delta \tau - 1} d\tau = \pi f(x) \quad (1.4)$$

Здесь c — положительный корень уравнения $\tau \operatorname{cth} \delta \tau = 1$, который всегда существует при $\delta > 1$; A и B — произвольные постоянные, $\delta = ghU^{-2}$.

Внеинтегральный член в левой части выражения (1.4) существует только при $\delta > 1$ и представляет собой ненулевой вид свободной поверхности жидкости в соответствующей однородной задаче, когда давление на всей поверхности равно нулю. В этом случае произвольные постоянные A и B для рассматриваемой задачи можно выбрать так [3], чтобы возмущение свободной поверхности исчезало вверх по течению ($x \rightarrow -\infty$).

Нетрудно показать, что для этого достаточно положить

$$A = -\pi a \int_{-1}^1 p(u) \cos \frac{uc}{\lambda} du, \quad B = \pi a \int_{-1}^1 p(u) \sin \frac{uc}{\lambda} du \quad (1.5)$$

$$a = \lim_{\tau \rightarrow c} \frac{\tau - c}{\tau \operatorname{cth} \delta \tau - 1} = \frac{c}{1 - \delta(1 - c^2)}$$

после чего приходим к интегральному уравнению для определения давления

$$\int_{-1}^1 p(u) \left[\int_0^{\infty} \frac{\cos \tau(x-u)\lambda^{-1}}{\tau \operatorname{cth} \delta \tau - 1} d\tau - \pi a \sin \frac{c(x-u)}{\lambda} \right] du = \pi f(x), \quad |x| \leq 1$$

причем внутренний интеграл здесь понимается в смысле главного значения. Полученное интегральное уравнение можно записать несколько в иной форме, удобной для дальнейшего

$$\int_{-1}^1 p(u) N\left(\frac{x-u}{\lambda}\right) du = \pi f(x), \quad |x| \leq 1 \quad (1.6)$$

$$N(t) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\tau \operatorname{cth} \delta \tau - 1} - \frac{2ac}{\tau^2 - c^2} \right) \cos \tau t d\tau - \pi a (\sin ct + \sin c|t|)$$

При получении этой формы использован интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \tau t}{\tau^2 - c^2} d\tau = -\frac{\pi}{2c} \sin |t|$$

Для построения эффективных асимптотических решений интегрального уравнения (1.6) при больших и малых значениях параметра λ будем применять методы, предложенные в работах [4,5], уделяя основное внимание тем изменениям, которые связаны с особенностями полученного интегрального уравнения.

§ 2. Рассмотрим случай больших λ . Следуя работе [4], разложим ядро интегрального уравнения (1.6) при больших значениях λ в ряд

$$N(t) = -\ln |t| + a_{30} + a_{31}t + a_{32}t^2 + a_{20}|t| + a_{22}|t|^3 + a_{33}t^3 + a_{12}t^2 \ln |t| + O(t^4 \ln |t|), \quad t = (x-u)\lambda^{-1} \quad (2.1)$$

$$a_{30} = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\tau \operatorname{cth} \delta \tau - 1} - \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} - \frac{2ac}{\tau^2 - c^2} \right) d\tau, \quad a_{31} = -\pi ac$$

$$a_{32} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[1 + \tau - 2ac + \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} - \tau^2 \left(\frac{1}{\tau \operatorname{cth} \delta \tau - 1} - \frac{2ac}{\tau^2 - c^2} \right) \right] d\tau$$

$$a_{20} = -\pi/2, \quad a_{12} = 0.5, \quad a_{22} = \pi/12, \quad a_{33} = \pi ac^3/6$$

Разложение (2.1) ядра интегрального уравнения (1.6) отличается от соответствующего разложения ядра, рассмотренного в работе [4], наличием нечетных членов $a_{31}t$ и $a_{33}t^3$, что не оказывает существенного влияния на построение решения, а приводит лишь к дополнительным вычислениям, рассматривать которые здесь нет надобности. Окончательно получим для случая $f(x) = \gamma + \beta x$

$$\omega(x) = p(x) \sqrt{1-x^2}, \quad \omega(x) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{[i/2]} \omega_{ij}(x) \lambda^{-i} \ln^j \lambda$$

$$\omega_{00} = \pi^{-1}P + \beta x, \quad \omega_{10} = \pi^{-1}P [4a_{20}\pi^{-2}S_1(x) - a_{31}x] + 2\beta a_{20}\pi^{-2} [2x - \Lambda(x)]$$

$$\omega_{20} = \pi^{-1}P \{ (0.8069a_{12} + a_{32})(1 - 2x^2) + 32a_{20}^2\pi^{-4} [S_2(x) - 0.1508] - 2\pi^{-2}a_{20}a_{31} [2x - \Lambda(x)] \} + \beta \{ a_{12}x^3 + (a_{32} - 0.1931a_{12})x - 16a_{20}^2\pi^{-4}S_7(x) \}$$

$$\omega_{21} = -P\pi^{-1}a_{12}(1 - 2x^2) - a_{12}\beta x$$

$$\omega_{31} = \pi^{-1}P [a_{12}a_{31}x - 2a_{12}a_{20}\pi^{-2}S_4(x)] - 2\beta\pi^{-2}a_{20}a_{12} [14x/3 - \Lambda(x)]$$

$$\begin{aligned} \omega_{30} = & \pi^{-1}P [0.8889\pi^{-2}a_{12}a_{20}S_3(x) + 8a_{22}(3\pi^2)^{-1} + 64\pi^{-6}a_{20}^3S_5(x) + \\ & + \pi^{-2} [6a_{22}(1 + 2x^2) - 0.19a_{20}^3] S_1(x) + \pi^{-2} [9a_{22} + 2(a_{32} + 0.8069a_{20}a_{12})] S_4(x) - \\ & - a_{31}a_{32}x + 16\pi^{-4}a_{31}a_{20}^2S_7(x) - a_{31}a_{12}(x^3 - 0.1931x) - 3a_{33}x^3] + \\ & + \beta \{ a_{12}a_{20}\pi^{-2}S_8(x) + 2a_{32}a_{20}\pi^{-2} [14x/3 - \Lambda(x)] + \\ & + 3a_{33}(x^2 - 0.5) - 16a_{20}^3\pi^{-6}S_9(x) + 2a_{22}\pi^{-2}S_{10}(x) \}, \quad \omega_{ij}(x) = \omega_{ji} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S_7(x) = & -2x(0.8125 - 0.1067x^2 - 0.06x^4) + (0.7067 - 0.1467x^2 - \\ & - 0.06x^4) \Lambda(x), S_8(x) = -0,025x + 2.667x^3 - 4xS_1(x) - (2.280 + \\ & + 1.333x^2) \Lambda(x), S_9(x) = -9,309x + 1.860x^3 + 0.4354x^5 + \\ & + (3.893 - 1.092x^2 - 0.2177x^4) \Lambda(x), S_{10}(x) = 2.667x + 2x^3 - \\ & - 6xS_1(x) - (2 + x^2) \Lambda(x), \Lambda(x) = (1 - x^2) \ln(1 - x) (1 + x)^{-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

а функции $S_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, 5$ приведены и затабулированы в работе [4].

Постоянная P , входящая в формулы (2.2), имеет смысл подъемной силы пластинки и определяется из условия удовлетворения полученного решения исходному интегральному уравнению (1.6). Это условие имеет вид

$$\begin{aligned} \pi^{-1}P\psi_1(\lambda) + \beta\psi_2(\lambda) &= \gamma \quad (2.4) \\ \psi_1(\lambda) &= a_{30} + 0.8106a_{20}\lambda^{-1} + (a_{32} + a_{12} - 0.03287a_{20}^2 + 0.5a_{31}^2)\lambda^{-2} + \\ &+ (1.442a_{22} - 0.2702a_{12}a_{20} - 0.1807a_{20}a_{32} - 0.0245a_{20}^3 + 0.2702a_{31}^2a_{20})\lambda^{-3} + \\ &+ \ln 2\lambda(1 - a_{12}\lambda^{-2} + 0.1801a_{12}a_{20}\lambda^{-3}) + O(\lambda^{-4}\ln^2\lambda) \\ \psi_2(\lambda) &= -0.5a_{31}\lambda^{-1} - 0.2702a_{20}a_{31}\lambda^{-2} - (1.125a_{33} + 0.2784a_{12}a_{31} + 0.5a_{32}a_{31} + \\ &+ 0.1279a_{20}^2a_{31})\lambda^{-3} + 0.5a_{12}a_{31}\lambda^{-3} \ln \lambda + O(\lambda^{-4}\ln^2\lambda) \end{aligned}$$

Формулы (2.2) и (2.3) дают решение неограниченное в конечных точках $x = \pm 1$. Если потребовать ограниченность давления в точке $x = 1$ (по физическим соображениям особенность на задней кромке пластинки должна отсутствовать), то придем к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}P\psi_3(\lambda) + \beta\psi_4(\lambda) &= 0 \quad (2.5) \\ \psi_3(\lambda) &= 1 - (0.4053a_{20} + a_{31})\lambda^{-1} + [a_{12} + (a_{12}a_{31} + 0.1351a_{12}a_{20})\lambda^{-1}] \times \\ &\times \lambda^{-2} \ln \lambda - (a_{32} + 0.8069a_{12} + 0.04954a_{20}^2 + 0.4053a_{20}a_{31})\lambda^{-2} - \\ &- (3a_{33} + 0.8069a_{12}a_{31} + a_{31}a_{32} + 0.2122a_{31}a_{20}^2 + 2.161a_{22} + 0.01895a_{12}a_{20} + \\ &+ 0.1351a_{32}a_{20} + 0.01a_{20}^3)\lambda^{-3} + O(\lambda^{-4}\ln^2\lambda) \\ \psi_4(\lambda) &= 1 + 0.4053a_{20}\lambda^{-1} + (a_{32} + 0.8069a_{12} + 0.2122a_{20}^2)\lambda^{-2} + (1.5a_{33} + \\ &+ 2.161a_{22} + 0.1167a_{20}^3 + 0.9456a_{20}a_{32} + 0.6729a_{12}a_{20})\lambda^{-3} - (a_{12} + \\ &+ 0.9456a_{20}a_{12}\lambda^{-1})\lambda^{-2} \ln \lambda + O(\lambda^{-4}\ln^2\lambda) \end{aligned}$$

Определим еще момент сил давления относительно начала координат

$$\begin{aligned} M &= P\psi_2(\lambda) + \beta\psi_5(\lambda) \quad (2.6) \\ \psi_5(\lambda) &= 1.571 + 0.8488a_{20}\lambda^{-1} + (0.8748a_{12} + 1.571a_{32} + 0.4017a_{20}^2)\lambda^{-2} + \\ &+ (2.716a_{22} + 1.698a_{20}a_{32} + 0.9231a_{12}a_{20} + 0.2752a_{20}^3)\lambda^{-3} - (1.571a_{12} + \\ &+ 1.698a_{12}a_{20}\lambda^{-1})\lambda^{-2} \ln \lambda + O(\lambda^{-4}\ln^2\lambda) \end{aligned}$$

К этим соотношениям необходимо добавить условия равновесия пластинки, согласно которым величину P можно считать известной и равной весу пластинки, а

$$M = P(1 - \lambda l_1 g U^{-2}) \quad (2.7)$$

где l_1 — координата центра тяжести пластинки относительно задней кромки, которую также можно считать известной.

Условия (2.4), (2.5) позволяют найти неизвестные величины β и γ , определяющие положение пластинки, а также длину зоны контакта λ , которая, как нетрудно показать, удовлетворяет уравнению

$$\lambda_1 = l_1 g U^{-2} = \lambda^{-1} [1 - \psi_2(\lambda) + \psi_3(\lambda)\psi_5(\lambda) (\pi\psi_4(\lambda))^{-1}] \quad (2.8)$$

Как видно, длина смачиваемой зоны не зависит от веса пластинки и полностью определяется положением центра тяжести. Найдем еще полное сопротивление пластинки в идеальной жидкости [1]

$$W = \beta P = -P^2\psi_3(\lambda) (\pi\psi_4(\lambda))^{-1} \quad (2.9)$$

Отметим, что сопротивление пропорционально квадрату веса пластинки и уменьшается с удалением центра тяжести от задней кромки.

§ 3. Рассмотрим случай малых λ . При малых значениях параметра λ приближенное решение интегрального уравнения (1.6) будем искать, используя метод работы [5]. Для этого давление $p(x)$ берем в форме

$$p(x) = p_1 \left(\frac{1+x}{\lambda} \right) + p_2 \left(\frac{1-x}{\lambda} \right) - q(x) \quad (3.1)$$

где $p_i(t)$, $i = 1, 2$ — решения интегральных уравнений Винера — Хопфа

$$\int_0^{\infty} p_j(u) N_j(t-u) du = \pi \lambda^{-1} f_j(t), \quad j = 1, 2; \quad 0 \leq t < \infty \quad (3.2)$$

$$N_j(t) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\tau \operatorname{cth} \delta \tau - 1} - \frac{2ac}{\tau^2 - c^2} \right) \cos \tau t d\tau - \pi a \sin c |t| + (-1)^j \pi a \sin c |t|$$

$$f_j(t) = \gamma + (-1)^j \beta (1 - \lambda t) \quad (3.3)$$

а $q(x)$ — вырожденное решение интегрального уравнения при $\lambda \rightarrow 0$.

Как показано в работе [7], а позднее в [8], решение, выбранное в форме (3.1) — (3.3), дает нулевой член асимптотики решения интегрального уравнения (1.6) при $\lambda \rightarrow 0$ и $\delta < 1$. Следующие члены имеют экспоненциальный характер убывания вида $\exp(-\kappa \lambda^{-1})$, $\kappa > \varepsilon > 0$.

В случае $\delta < 1$ для решения интегрального уравнения (1.6), в котором можно положить $a = 0$, можно использовать результаты работы [5], поэтому приведем окончательные формулы

$$q(x) = (A\lambda)^{-1} (\gamma + \beta x), \quad p_i(t) = (A\lambda)^{-1} \gamma (\operatorname{erf} \sqrt{Bt} + e^{-Bt} \sqrt{A/\pi t}) - (-1)^i \beta (A\lambda)^{-1} [(\lambda t - 1) \operatorname{erf} \sqrt{Bt} + e^{-Bt} (\pi B t)^{-1/2} (\lambda t - \sqrt{AB} + 0.5 \lambda \sqrt{A/B} - \lambda A)] \quad (i = 1, 2) \quad (3.4)$$

При получении этих формул для трансформанты Фурье ядра интегрального уравнения (1.6) была использована аппроксимация вида

$$(\tau^2 + C)^{-1} \sqrt{\tau^2 + B^2}, \quad A = BC^{-1} = \delta (1 - \delta)^{-1}$$

Заметим, что в работе [9] была предложена более сложная аппроксимация, полнее отражающая характер трансформанты Фурье ядра интегрального уравнения (1.6) на бесконечности и приводящая к более точному результату для распределения давления. Ниже исследуются лишь интегральные характеристики, поэтому используется простейшая аппроксимация, которая для рассмотренных в работе примеров дает вполне удовлетворительные результаты.

Потребовав ограниченности давления в точке $x = 1$, приходим к условию

$$\gamma = -\beta z_1(\lambda), \quad z_1(\lambda) = 1 + \lambda [C^{-1} - (2B)^{-1}] \quad (3.5)$$

Исходя из выражений (3.4) после несложных выкладок получаем подъемную силу пластинки и момент сил давления относительно начала координат

$$P = \gamma z_2(\lambda), \quad M = \beta z_3(\lambda) \quad (3.6)$$

где

$$z_2(\lambda) = A^{-1} (2\lambda^{-1} + \sqrt{4/C - B^{-1}}) + (1 - \sqrt{C/B})^2 \exp(-2B\lambda^{-1})$$

$$z_3(\lambda) = A^{-1} (2/3\lambda + \sqrt{4/C - B^{-1}}) + 2\lambda b^3 + 2\lambda^3 \sqrt{A} [b^3 + (1 - \sqrt{C/B})^2 / \sqrt{B^3}] - [1 + \lambda (B^{-1} - b \sqrt{A})]^2 \exp(-2B\lambda^{-1}), \quad b = (2B \sqrt{A})^{-1} - B^{-1/2} \quad (3.7)$$

Используя теперь условия статики (2.7) и учитывая формулы (3.5) — (3.7), получим уравнение для определения λ

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{z_3(\lambda)}{z_1(\lambda) z_2(\lambda)} \right), \quad \lambda_1 = \frac{l_1 g}{U^2} \quad (3.8)$$

Отметим, что, как и аналогичное уравнение (2.8), полученное со стороны больших λ , уравнение (3.8) удобнее решать, построив график зависимости λ_1 от λ . Определив λ по первой формуле (3.6), находим γ при заданном P . Затем по формуле (3.5) находим угол наклона пластинки, а также сопротивление $W = \beta P$.

§ 4. Рассматривается по-прежнему случай малых λ , но значения $\delta > 1$. Последнее обстоятельство существенно влияет на получение приближенного решения, так как при этом трансформанта Фурье ядра (3.2) имеет два симметричных полюса на вещественной оси, а само ядро не исчезает на бесконечности ($t \rightarrow \infty$). Интегральные уравнения первого рода с ядрами такого сорта уже исследовались в работе [6], где дается решение в сложном виде. Здесь приводится приближенное решение, основанное на представлении решения в форме (3.1).

Преобразуем интегральное уравнение (3.2) к виду

$$\int_0^{\infty} p_j(u) K(t-u) du = \begin{cases} L_j(t), & t \geq 0, j = 1, 2 \\ l_j(t), & t < 0, j = 1, 2 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$K(\alpha) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\tau \operatorname{cth} \delta \tau - 1} - \frac{2ac}{\tau^2 - c^2} \right) \cos \alpha \tau d\tau \quad (4.2)$$

$$L_1(t) = \pi \lambda^{-1} f_1(t) + 2\pi a \int_0^t p_1(u) \sin c(t-u) du$$

$$L_2(t) = \pi \lambda^{-1} f_2(t) - 2\pi a \int_t^{\infty} p_2(u) \sin c(t-u) du \quad (4.3)$$

причем подынтегральная функция в (4.2) не имеет особенностей на действительной оси. Из (4.1) — (4.3) непосредственно следует, что введенные неизвестные функции $l_j(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow -\infty$.

Применяя к (4.1), (4.2) преобразование Фурье с комплексным параметром α , приходим к следующим функциональным уравнениям:

$$P_1^+(\alpha) \frac{k(\alpha)}{\alpha^2 - c^2} = F_1(\alpha) + E_1^-(\alpha) \quad (4.4)$$

$$P_2^+(\alpha) \frac{k(\alpha)}{\alpha^2 - c^2} = F_2(\alpha) + \frac{2a}{\alpha^2 - c^2} [i\alpha \operatorname{Im} P_2^+(c) + c \operatorname{Re} P_2^+(c)] + E_2^-(\alpha) \quad (4.5)$$

где

$$P_j^+(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} p_j(t) e^{i\alpha t} dt, \quad F_j(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f_j(t) e^{i\alpha t} dt$$

$$E_j^-(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 l_j(t) e^{i\alpha t} dt, \quad j = 1, 2, \quad k(\alpha) = \frac{\alpha^2 - c^2}{\alpha \operatorname{cth} \delta \alpha - 1}$$

причем $P_j^+(\alpha)$ — функции аналитические в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \alpha > 0$ и убывающие на бесконечности как $\alpha^{-1/2}$, а $E_j^-(\alpha)$ — функции аналитические в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} \alpha < \alpha_1$, $\alpha_1 > 0$. Функция $k(\alpha)$ не имеет полюсов на действительной оси. Пусть ее факторизация имеет вид

$$k(\alpha) = k^+(\alpha) [k^-(\alpha)]^{-1} \quad (4.6)$$

где $k^+(\alpha)$ и $k^-(\alpha)$ — функции аналитические, не имеющие нулей соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} \alpha > 0$ и $\operatorname{Im} \alpha < \alpha_1$. Отметим, что $k^+(\alpha)$ растет на бесконечности как $\sqrt{\alpha}$, а $k^-(\alpha)$ убывает на бесконечности как $\alpha^{-1/2}$. Подставим (4.6) в (4.4), (4.5) и запишем функциональные уравнения в виде

$$P_1^+(\alpha) k^+(\alpha) = (\alpha^2 - c^2) k^-(\alpha) F_1(\alpha) + (\alpha^2 - c^2) k^-(\alpha) E_1^-(\alpha) \quad (4.7)$$

$$P_2^+(\alpha) k^+(\alpha) = (\alpha^2 - c^2) k^-(\alpha) F_2(\alpha) + 2ak^-(\alpha) [i\alpha \operatorname{Im} P_2^+(c) + c \operatorname{Re} P_2^+(c)] + (\alpha^2 - c^2) k^-(\alpha) E_2^-(\alpha) \quad (4.8)$$

Произведем еще одну факторизацию

$$(\alpha^2 - c^2) k^-(\alpha) F_j(\alpha) = F_j^+(\alpha) + F_j^-(\alpha) \quad (j = 1, 2)$$

где $F_j^+(\alpha)$ и $F_j^-(\alpha)$ — функции аналитические соответственно в полуплоскостях $\text{Im} \alpha > 0$ и $\text{Im} \alpha < \alpha_1$. Теперь функциональное уравнение можно переписать так

$$P_1^+(\alpha) k^+(\alpha) - F_1^+(\alpha) = F_1^-(\alpha) + (\alpha^2 - c^2) k^-(\alpha) E_1^-(\alpha) \quad (4.9)$$

$$P_2^+(\alpha) k^+(\alpha) - F_2^+(\alpha) = F_2^-(\alpha) + (\alpha^2 - c^2) k^-(\alpha) E_2^-(\alpha) + \\ + 2ak^-(\alpha) [i\alpha \text{Im} P_2^+(c) + c \text{Re} P_2^+(c)] \quad (4.10)$$

Правые и левые части уравнений (4.9), (4.10) являются аналитическими функциями соответственно в полуплоскостях $\text{Im} \alpha > 0$ и $\text{Im} \alpha < \alpha_1$. Применяя теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля и учитывая характер поведения $k^+(\alpha)$ и $P_j^+(\alpha)$ на бесконечности, получим, что функции тождественно равны постоянным C_1 и C_2 . Имеем далее

$$P_j^+(\alpha) = \frac{C_j + F_j^+(\alpha)}{k^+(\alpha)} \quad (j = 1, 2), \quad E_1^-(\alpha) = \frac{C_1 - F_1^-(\alpha)}{(\alpha^2 - c^2) k^-(\alpha)} \quad (4.11)$$

$$E_2^-(\alpha) = \frac{C_2 - F_2^-(\alpha) - 2ak^-(\alpha) [i\alpha \text{Im} P_2^+(c) + c \text{Re} P_2^+(c)]}{(\alpha^2 - c^2) k^-(\alpha)}$$

Исходя из сказанного выше о поведении функций $l_j(t)$ при $t \rightarrow -\infty$ заключаем, что функции $E_j^-(t)$ не должны иметь полюсов на действительной оси. Это приводит к условиям

$$C_1 - F_1^-(\pm c) = 0, \quad C_2 - F_2^-(\pm c) - 2ack^-(\pm c) P_2^+(\pm c) = 0 \quad (4.12)$$

Второе из условий (4.12) выполняется тождественно в силу (4.11), что позволяет положить $C_2 = 0$ (ограниченность давления в точке схода $x = 1$). Первое условие (4.12) определяет C_1 и, кроме того, налагает определенные требования на функцию $f(x)$.

В рассматриваемом случае задания функций $f_j(t)$ выражениями (3.3) будем иметь:

$$P_j^+(\alpha) = \frac{\lambda i \alpha^2 C_j - c^2 [(-1)^j (\lambda i - \alpha) \beta k^-(0) - \gamma \alpha k^-(0) + \lambda (-1)^j [k^-(0)'] i \alpha]}{\sqrt{2\pi} k^+(\alpha) \alpha^2 i \lambda} \quad (4.13)$$

причем

$$C_1 = -\beta k^-(0), \quad C_2 = 0, \quad (\gamma - \beta) k^-(0) + i\beta [k^-(0)'] \lambda = 0 \quad (4.14)$$

Последнее условие (4.14) и является тем требованием, которому должна удовлетворять функция $f(x)$: оно определяет связь между γ и β .

Решения интегральных уравнений (3.2) $p_j(t)$ определяются из (4.13) путем обращения по Лапласу. При этом будем использовать аппроксимацию

$$k(\alpha) = \frac{\alpha^2 - c^2}{\alpha \text{cth} \delta \alpha - 1} = \frac{\alpha^2 + D^2}{\alpha^2 + C^2} \sqrt{\alpha^2 + B^2}, \quad A = \frac{D^2 B}{C^2} = \frac{\delta c^2}{\delta - 1} > 0$$

которая приводит к следующим выражениям:

$$p_j(t) = C_j \left[\frac{e^{-Bt}}{\sqrt{\pi t}} + \frac{C-D}{\sqrt{B-D}} e^{-Dt} \text{erf} \sqrt{(B-D)t} \right] + \quad (4.15)$$

$$+ \frac{c^2}{A} \left[(-1)^j \beta \varepsilon + \frac{\gamma + (-1)^j \beta}{\lambda} \right] \left[\frac{(C-D) \sqrt{A}}{D \sqrt{B-D}} e^{-Dt} \text{erf} \sqrt{(B-D)t} - \text{erf} \sqrt{Bt} \right] +$$

$$+ (-1)^j \frac{\beta c^2}{A} \left[(t + \varepsilon) \text{erf} \sqrt{Bt} + \sqrt{\frac{t}{\pi B}} e^{-Bt} + \frac{(C-D) \sqrt{A}}{D^2 \sqrt{B-D}} e^{-Dt} \text{erf} \sqrt{(B-D)t} \right]$$

$$\varepsilon = \frac{1}{C} - \frac{1}{D} - \frac{1}{2B}, \quad C_1 = -\frac{\beta}{\sqrt{A}}, \quad \gamma = \beta(1 + \varepsilon \lambda), \quad C_2 = 0$$

Вырожденное решение нетрудно получить из (4.15) при $\lambda \rightarrow 0$. Имеем

$$q(x) = -c^2 (A\lambda)^{-1} (\gamma + \beta x) \quad (4.16)$$

Формулы (4.15), (4.16) совместно с (3.1) определяют искомое давление $p(x)$. Найдем подъемную силу P и момент относительно начала координат M , действующие на глассирующую пластинку

$$P = -\beta\varphi_1(\lambda), \quad M = \beta\varphi_2(\lambda) \quad (4.17)$$

$$\varphi_1(\lambda) = \lambda A^{-1} [\kappa_1(\lambda) - \kappa_2(\lambda)] + 2c^2(A\lambda)^{-1} (1 + \varepsilon\lambda) [-1 + (2 + \lambda\varepsilon)\kappa_1(\lambda) + \sqrt{2\lambda/\pi B} \exp(-2B\lambda^{-1}) + \lambda D^{-1}\kappa_2(\lambda)] \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\lambda) = & -2c^2 A^{-1} \{ \kappa_1(\lambda) [2/3\lambda + \varepsilon + \lambda(\varepsilon^2 - 1/2c^2) + \lambda^2(\sigma_2 - \varepsilon/2c^2)] - \\ & - 1/3\lambda - D^{-1}\kappa_2(\lambda) [1 + \lambda(\varepsilon + 2D^{-1} + D/2c^2) + \lambda^2(\varepsilon D^{-1} + D^{-2} + 1/2c^2)] + \\ & + \sqrt{2(\lambda\pi B)^{-1}} \exp(-2B\lambda^{-1}) [1/3 + \lambda(\varepsilon - 1/3B) + \lambda^2(\sigma_1 - 1/2c^2)] \}, \quad \kappa_1 = \operatorname{erf} \sqrt{2B\lambda^{-1}} \\ \kappa_2 = & \frac{(C-D)\sqrt{A}}{D\sqrt{B-D}} e^{-\frac{2D}{\lambda}} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{2(B-D)}{\lambda}}, \quad \sigma_1 = \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{2B} - \frac{C-D}{CD^2} - \frac{1}{4B^2} \\ \sigma_2 = & (C-D)D^{-2}C^{-2} - \varepsilon^2(2B)^{-1} - \varepsilon(4B^2)^{-1} + (8B^3)^{-1} \end{aligned}$$

Аналогично § 2 к соотношениям (4.17), (4.18) нужно добавить условия равновесия пластинки, тогда для определения величины λ получим уравнение

$$\lambda_1 = l_1 g U^{-2} = \lambda^{-1} [1 + \varphi_2(\lambda) / \varphi_1(\lambda)] \quad (4.19)$$

Найдем еще сопротивление, испытываемое пластинкой

$$W = -P^2 / \varphi_1(\lambda)$$

Случай $\delta = 1$ не может быть рассмотрен на основе линейной теории.

Для иллюстрации приводим некоторые результаты вычислений в случаях $\delta = 0.5$ и $\delta = 2$. Оказалось, что значение момента относительно начала координат и коэффициента подъемной силы, полученные обоими методами, для $\delta = 0.5$ различаются при $\lambda = 3.5$ соответственно на 6 и 2%, а для $\delta = 2$ при $\lambda = 2.5$ соответственно на 4 и 3%.

Отметим, что расстояние центра сил давления от задней кромки пластинки в случае $\delta < 1$ стремится к $1/3l$ при $\lambda \rightarrow 0$, а в случае $\delta > 1$ стремится к $2/3l$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Заметим, что хотя авторам и не удалось пока провести строгое обоснование метода, предложенного в § 4, как это сделано, например, в фундаментальной работе В. А. Бабешко [6], численные результаты показывают, что нулевой член асимптотики при малых λ , полученный в § 4, достаточно эффективен.

В заключение авторы благодарят В. М. Александрова, И. И. Воровича, В. А. Бабешко за постоянное внимание к работе.

Поступила 3 VI 1969]

ЛИТЕРАТУРА

1. С е д о в Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.— Л. Гостехиздат, 1950.
2. Х а с к и н д М. Д., Плоская задача о глассировании по поверхности тяжелой жидкости конечной глубины. Изв. АН СССР. ОТН, 1943, №№ 1—2.
3. С т о к е р Дж. Дл. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
4. А л е к с а н д р о в В. М., Б е л о к о н ь А. В. Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
5. А л е к с а н д р о в В. М., Б а б е ш к о В. А. Контактные задачи для упругой полосы малой толщины. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.
6. Б а б е ш к о В. А. Об интегральном уравнении некоторых динамических контактных задач теории упругости и математической физики. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
7. Б а б е ш к о В. А. Об одном асимптотическом методе при решении интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
8. А л е к с а н д р о в В. М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
9. А л е к с а н д р о в В. М., Б е л о к о н ь А. В. Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений, встречающихся при изучении смешанных задач математической физики для областей с цилиндрическими границами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.