НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПОДОБИЯ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ СЫПУЧЕЙ УПЛОТНЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЫ

Ю. С. Вахрамеев

(Москва)

Приводится решение одномерных автомодельных задач о схождении ударных волн и расширении полости с газом. Рассматриваются следствия, связанные с автомодельностью. Получено условие неограниченной кумуляции, обнаружено два типа режимов расширения полости, установлено соотношение подобия взрывов на выброс в равноуплотняющейся сыпучей среде и сильно трещиноватой скальной породе.

Для сильных ударных волн в газе существует класс одномерных автомодельных задач: сосредоточенный взрыв, кумуляция, кратковременный удар и др. (решения и подробные ссылки имеются в [1,2]). По соображениям размерности аналогичный класс движений должен существовать и для пористого, но уплотняющегося при любых давлениях в k раз вещества, состоящего из несжимаемых частиц с «сухим» трением. К подобной модели сводится, например, среда в [3] при больших нагрузках. Сухим трением фактически обладают мягкие грунты [4] и раздробленные скальные породы. Некоторые результаты частично вытекают из более общих (не автомодельных) решений [5, 6, 3].

1. Исходные уравнения. За фронтом ударной волны, ограничивающей область движения в задачах о взрыве и кумуляции, вещество несжимаемо, для одномерных течений справедливы уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\nu(p-p_\varphi)}{\rho r}=0 \tag{1.1}$$

$$vr^\nu=v_1R^\nu \tag{1.2}$$

На фронте

$$\rho=k\rho_0,\qquad p_1=\frac{\rho}{k-1}v_1^2,\qquad \frac{dR}{dt}=\frac{k}{k-1}v_1 \tag{1.3}$$

Здесь t — время, r — расстояние от центра (оси, плоскости) симметрии, R — координата фронта, ρ и ρ_0 — конечная и начальная плотность, v — массовая скорость, $p\equiv p_r$ и p_φ — давления в радиальном и угловом направлениях; $\nu=2, 1, 0$ для сферы, цилиндра и плоскости. Индекс единица относится к фронту.

Согласно [5, 6], в сыпучей среде (с предельным напряженным состоянием) $p_r = ap_\varphi$ при движении к центру (оси) симметрии, $p_\varphi = ap_r$ при обратном движении (для сферы $p_\theta=p_\varphi$); при этом $a=(1-\sin\chi)(1+\sin\chi)^{-1}$, где χ — угол внутреннего трения.

Введем безразмерные переменные

$$y=r/R,\qquad P(y)=p/p_1,\qquad V(y)=v/v_1 \tag{1.4}$$

Назовем показателем автомодельности число n в соотношениях

$$p_1\sim R^{-(n+\nu+1)},\qquad v_1\sim R^{-(n+\nu+1)/2},\ E\sim R^{-n} \tag{1.5}$$

Здесь E — характерная энергия движения (кинетическая энергия области размером R).

2. Кумуляция ударных волн. После перехода к безразмерным переменным (1.4) и исключения v при помощи (1.2) и (1.3) при $p_\varphi=a^{-1}p$ (движение к центру) уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{dP}{dy}+\nu\left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{P}{y}=\frac{k(n+1-\nu)}{2y^\nu}+\frac{\nu(k-1)}{y^{2\nu+1}} \tag{2.1}$$

При $P(1)=1$ его интеграл

$$P=\left[\frac{k+a^{-1}}{1+a^{-1}}+\frac{k(n+1-\nu)}{2(\nu a^{-1}-1)}\right]y^{\nu(a^{-1}-1)}+\frac{k(n+1-\nu)}{2(1-\nu a^{-1})}y^{1-\nu}-\frac{k-1}{1+a^{-1}}y^{-2\nu} \tag{2.2}$$

Значение показателя автомодельности найдем из условия ограниченности p при больших y. Приравняв нулю коэффициент при первом члене, получим

$$n = -\frac{2(\nu - a) + ka(1-a)(\nu+1)}{ka(1+a)} \tag{2.3}$$

Полное решение запишется в виде

$$p = \frac{A}{1+a} R^{-(n+\nu+1)}\left[(1+ka)\left(\frac{R}{r}\right)^{\nu-1} - a(k-1)\left(\frac{R}{r}\right)^{2\nu}\right] \tag{2.4}$$

$$|v| = \left((k-1)\frac{A}{\rho}\right)^{1/2}\left(\frac{R}{r}\right)^{\nu} R^{-(n+\nu+1)/2} \tag{2.5}$$

Величина A определяет масштаб явления ($A = p$ при $r = R = 1$). Время до фокусировки связано с R равенством

$$|t - t_0| = \frac{2}{k(n+\nu+3)}\left(\frac{(k-1)\rho}{A}\right)^{1/2} R^{(n+\nu+3)/2} \tag{2.6}$$

При всех $1 < k < \infty$ и $0 < a < 1$ движение сопровождается потерей энергии. Диссипация происходит в объеме из-за трения (для сферы и цилиндра) и на фронте волны.

Перед фокусировкой давление и скорость неограниченно возрастают, если

$$k > k_0, \qquad k_0 = \frac{\nu - a}{a^2(\nu+1)} \tag{2.7}$$

Для $k < k_0$ решение описывает замедленное движение с полной остановкой к $t = t_0$. Здесь необходимым условием существования автомодельных режимов является $p = 0$ при $r \gg R$ (а не просто ограниченность).

В плоском случае (2.7) не выполняется, но есть тривиальное решение (2.2) с незатухающим движением: $n = -1$, $P(y) \equiv 1$ и постоянная скорость схлопывания.

3. Вытеснение среды газом. Пусть среда уплотняется поршнем, который в момент $t - t_0 = 0$ находится на $r = 0$, а далее движется так, что давление на нем зависит от его координаты r_2 степенным образом. Таким поршнем может служить, например, адиабатически расширяющийся газ. При показателе адиабаты γ давление на поршне

$$p_2 \sim r_2^{-\gamma(\nu+1)} \tag{3.1}$$

Из сравнения (3.1) и (1.5) и требования $p_2 / p_1 = \mathrm{const}$ получаем

$$n = (\nu+1)(\gamma-1) \tag{3.2}$$

Вычислим $P_2 = p_2 / p_1$. На поршне

$$y_2 = \frac{r}{R} = \left(\frac{k-1}{k}\right)^{1/(\nu+1)}$$

Подставив $y = y_2$ в (2.2) и заменив a^{-1} на a (движение от центра), после несложных преобразований получим

$$P_2(1+a)\left(\frac{k-1}{k}\right)^{\frac{\nu(1-a)}{\nu+1}} = a + k\left[1 - \left(\frac{k-1}{k}\right)^{\frac{1-\nu a}{\nu+1}}\right]\left[1 - \frac{(n+1-\nu)(1+a)}{2(1-\nu a)}\right] \tag{3.3}$$

Видно, что при заданных k, a и ν значение P_2 тем меньше, чем больше n (т. е. чем больше γ). Положив $P_2 = 0$, найдем предельную величину показателя

$$n_0 = \frac{(\nu+1)(1-a)}{1+a} + \frac{2a(\nu a - 1)}{(1+a)k}\left[\left(\frac{k}{k-1}\right)^{\frac{\nu a - 1}{\nu+1}} - 1\right]^{-1} \tag{3.4}$$

Показателем n_0 будет определяться затухание энергии тогда, когда $\gamma \geqslant \gamma_0$, где

$$\gamma_0 = 1 + \frac{n_0}{\nu+1} \tag{3.5}$$

Таким образом, при $\gamma < \gamma_0$ величина n зависит только от ν и γ, а при $\gamma \geqslant \gamma_0$ — от ν, a и k (от γ не зависит).

Заметим, что предельный показатель автомодельности имеется и в задачах с ударными волнами в газе. Там, при быстром замедлении поршня предельными режимами являются случаи с постоянной энергией или режим кратковременного удара, если газ заполняет полупространство.

При любых $1 < k < \infty$ и $0 < a < 1$ значение n_0 лежит в пределах $0 < n_0 < \nu + 1$. Максимум достигается при $k \to \infty$ для любых a и при $a = 0$ для любых k. В плоском случае трение отсутствует и $n_0 = 1$ при любых k.

Случай $n_0 = \nu + 1$ соответствует затуханию энергии с сохранением импульса (в секторах с малым углом). При $k \to \infty$ взаимодействия секторов нет из-за нулевой толщины собранного вещества, а при $a = 0$ благодаря $p_ф = 0$.

Приводим асимптотические выражения для n_0 в случае уплотняющейся жидкости ($a = 1$) соответственно для сферы и цилиндра

$$n_0 = \frac{(k-1)^{1/3}}{k^{4/3} - k(k-1)^{1/3}}, \qquad n_0 = \frac{2}{k \ln [k / (k-1)]}$$

Соответствующие выражения $n_0\,(a)$ в пределе $k \to 1$ имеют вид

$$n_0 = \begin{cases} 3 - 4a & (0 < a < 1/2) \\ 3(1-a)/(1+a) & (1/2 < a < 1) \end{cases} \qquad n_0 = 2(1-a)$$

Приводим значения n_0 для ряда значений k при некоторых значениях a в сферическом случае

$k_0 = 1.2$	1.1	1.05	1.02	1.0	—
$n_0 = 2.55$	2.48	2.42	2.36	2.0	$(a = 1/5)$
$n_0 = 2.27$	2.15	2.05	1.96	1.5	$(a = 1/3)$
$n_0 = 1.93$	1.70	1.55	1.43	1.0	$(a = 1/2)$
$n_0 = 1.02$	0.74	0.54	0.36	0	$(a = 1)$

заметим, что $n_0 \to 3$ при $k \to \infty$ и $n_0 = 3$ при $a = 0$.

Полное решение задачи составляют уравнения (2.5), (2.6) и $p = p_1 P(y)$, причем $P(y)$ берется из (2.2), где a^{-1} заменяется на a.

Отметим, что класс автомодельных задач можно расширить, если рассматривать движение поршня или кумуляцию в неоднородном веществе с $\rho_0 \sim r^\varkappa$, как это сделано в [7] для газа.

4. Преобразование подобия для взрывов на выброс. В задачах с поршнем показатель автомодельности положителен. При $R \to 0$ энергия расходится, так как

$$E = BR^{-n} \tag{4.1}$$

Здесь B — параметр, определяющий масштаб явления. Применимость (4.1) практически ограничена размером начального пузыря и сжимаемостью среды при больших давлениях.

Рассмотрим движение среды под действием взрыва ВВ. Вблизи ПВ среда может быть сжимаемой, но при меньших нагрузках удовлетворяет принятой модели. Пусть продукты взрыва при большом расширении являются газом с постоянным значением γ. Установим связь между энергией взрыва E_0 и величиной B в (4.1). В силу закона газодинамического подобия (теплопроводностью пренебрегаем) на всех стадиях движения

$$E = E_0 \left(\frac{E_0^{1/(\nu+1)}}{GR} \right) \tag{4.2}$$

Здесь G — некий размерный параметр, зависящий от свойств среды и сорта ВВ. Для осесимметричного взрыва E и E_0 — энергия на единицу длины.

В стадии автомодельного движения справедливо (4.1) и на этом этапе (C — число)

$$F\left(\frac{E_0^{1/(\nu+1)}}{GR}\right)=\frac{CE_0^{n/(\nu+1)}}{G^nR^n} \tag{4.3}$$

Отсюда

$$B=\frac{CE_0^{1+n/(\nu+1)}}{G^n} \tag{4.4}$$

До сих пор рассматривалось движение в неограниченной среде. Пусть среда граничит с пустотой, поверхность раздела задана функцией $r / h = f_1$ (θ, φ), где h — расстояние от центра взрыва до поверхности в заданном направлении (например, по вертикали). Движение происходит в поле тяжести с ускорением g. После выхода волны на поверхность произойдет выброс вещества с последующим падением и образованием нового профиля. Упавшее вещество считаем уплотненным.

Движение в автомодельном режиме зависит от двух величин с независимой размерностью [1]. Таким образом, в задачу с выбросом входят четыре размерных определяющих параметра: g, h, ρ_0 и, например, $\varepsilon = Bh^{-n}$ (величина размерности E_0). Составим из них безразмерную комбинацию

$$\mu=\frac{\varepsilon}{\rho_0 g h^{\nu+2}} \tag{4.5}$$

Учитывая (4.4), получим

$$\mu=\frac{CG^n}{\rho_0 g}\left(\frac{E_0}{h^\alpha}\right)^\beta, \qquad \beta=1+\frac{n}{\nu+1}, \qquad \alpha=\frac{(\nu+1)(n+\nu+2)}{n+\nu+1} \tag{4.6}$$

Конечный профиль поверхности, если его представить в виде $r / h = f_2$ (θ, φ), должен зависеть только от безразмерных параметров задачи μ, k, a (или χ) и безразмерной функции f_1.

Отсюда видно, что при подобных начальных профилях профили воронок после взрыва будут подобны, если энергия взрыва пропорциональна глубине заложения заряда в степени α. Результат остается в силе и тогда, когда плотность, пористость и коэффициент внутреннего трения вдали от очага взрыва меняются, но при разных масштабах взрыва сохраняется подобие в их распределении.

Зависимость α от k и a слабая. Так как $0 < n < \nu + 1$, то

$$\nu + {}^3/_2 < \alpha < \nu + 2$$

При сильной диссипации энергии значение α близко к нижнему пределу.

Во влажной мягкой среде $a \approx 0.5$ [4], в сухой мягкой, а также в раздробленной скальной породе трение больше. Если $^1/_5 < a < {}^1/_2$ и $1.02 < k < 1.2$ (чему соответствует $1.43 < n_0 < 2.55$), то для сферического взрыва с $\gamma \geqslant \gamma_0$ значение α лежит в пределах $3.54 < \alpha < 3.67$. При $n_0 = 2$ параметры $\alpha = 3.6$, $\gamma_0 = {}^5/_3$. Если $\gamma < \gamma_0$, то $\alpha = (3\gamma + 1) / \gamma$.

Заметим, что поскольку сухое трение характеризуется безразмерным коэффициентом, то вывод соотношения подобия оказался возможным без детального рассмотрения несимметричного движения при выбросе. Наличие сложных диссипативных процессов в этой стадии в полученных результатах учитывается.

В принятых предположениях об одинаковой уплотняемости среды при любых давлениях деформация профиля, строго говоря, будет продолжаться и после падения и осыпания грунта. При этом профили воронок подобны в соответствующие моменты времени (например, в момент «приземления» последней песчинки). Последующее движение отсутствует, если $k \to 1$.

Важно отметить, что все выводы о существовании автомодельных режимов при вытеснении среды газом и, как следствие, степенной закон подобия с $E_0 \sim h^\alpha_*$ для взрывов на выброс остаются в силе и тогда, когда ρ / ρ_0 и эффективное значение χ за фронтом волны не постоянны, а являются функциями относительных деформаций. Это следует из соображений размерности. Подобная модель годится, например, для приближенного описания взрыва в сильно трещиноватой скале с учетом постепенного превращения ее в щебень. Добавим, что для существования автомодельных режимов с расширением малой полости наличие скачка уплотнения не обязательно. Пример — расширение пузырька в несжимаемой жидкости (вторая стадия в задаче Рэлея).

Автор благодарит Е. И. Забабахина за полезные советы.

Поступила 21 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
3 Компанеец А. С. Ударные волны в пластической уплотняющейся среде. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 1.
4. Алексеенко В. Д., Григорян С. С., Новгородов А. Ф., Рыков Г. В. Некоторые экспериментальные исследования по динамике мягких грунтов. Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 6.
5 Ишлинский А. Ю. О плоском движении песка. Укр. матем ж., 1954, т. 6, № 4.
6. Григорян С. С. Об осесимметричных движениях сыпучей среды. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.
7. Вахрамеев Ю. С. О кумуляции ударных волн в неоднородной среде. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.

К ЗАДАЧЕ ГЛИССИРОВАНИЯ ПЛАСТИНКИ ПО ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

А. В. Белоконь, Р. А. Грунтфест

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается двумерная задача об обтекании произвольного контура, плавающего на поверхности потока тяжелой идеальной жидкости конечной глубины. Указанная задача с использованием результатов [1–3] методами операционного исчисления сведена в § 1 к определению давления на контуре из интегрального уравнения первого рода с разностным нерегулярным ядром сложной структуры, зависящим от двух безразмерных параметров λ и δ.

В §§ 2—4 подробно изучен случай глиссирования наклонной пластинки. В § 2 на основе результатов [4] дано асимптотическое решение интегрального уравнения, полученного в § 1, при больших значениях безразмерного параметра λ и призвольных $\delta \neq 1$. В § 3 приведено решение интегрального уравнения при малых значениях λ и $\delta < 1$ методом, предложенным в [5]. Наконец, в § 4 для малых λ рассмотрен случай $\delta > 1$. Последний является особым в том смысле, что трансформанта Фурье ядра интегрального уравнения имеет два симметрично расположенных полюса на вещественной оси. Интегральные уравнения с ядрами такого сорта и более общими исследовались в работе [6], в которой дано асимптотическое решение интегрального уравнения при малых значениях параметра λ и проведено обоснование применяемого в ней метода. Однако формулы, приведенные в работе, имеют сложный для практического применения вид. Здесь для данного частного вида ядра интегрального уравнения дано приближенное решение в форме, удобной для проведения численных расчетов.

В § 5 рассмотрены примеры; приведены графики, иллюстрирующие эффективность предложенных формул для всего диапазона изменения параметров $\lambda \in (0, \infty)$ и $\delta \neq 1$.