Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

О РАСШИРЕНИИ ГАЗОВОГО ОБЛАКА В ВАКУУМ

С. И. Анисимов, Ю. И. Лысиков

(Москва)

Изучается разлет в вакуум газового облака, поверхности уровня которого представляют собой эллипсоиды. Система уравнений газодинамики для этого случая приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений классической механики. Для этой системы найден точный интеграл, при помощи которого построены замкнутые решения задач о разлете сфероида и вращающегося эллиптического цилиндра.

При решении задачи о разлете газового облака существенно используются результаты работ [1,3], в которых изучались движения невязкого газа, описываемые аффинным преобразованием

$$r_i = F_{ik}a_k \qquad (i,\ k = 1, 2, 3) \tag{1}$$

Здесь r_i — координаты газовой частицы, a_i — ее лагранжевы координаты; по повторяющимся индексам производится суммирование.

Такие движения можно рассматривать как обобщение исследованных ранее Л. И. Седовым [2] неустановившихся адиабатических движений газа, для которых скорость пропорциональна расстоянию до центра симметрии.

В работе [1] впервые было показано, что для движений вида (1) система уравнений газодинамики сводится к системе девяти (в трехмерном случае) обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для элементов матрицы F. Позже этот же результат был получен в статье [3] в связи с изучением динамики вращающегося газового облака. В [3] проведено изящное исследование групповых свойств движений вида (1) и кратко сообщается о численном интегрировании системы обыкновенных дифференциальных уравнений для частного случая разлета первоначально покоившегося газового сфероида. Подробное изложение численного интегрирования уравнений, полученных в работе [1], для случая, когда отсутствует вращение, содержится в работе [4].

Принятый в настоящей статье подход к задаче о разлете газового облака основан на полученной в [1,3] системе уравнений для элементов матрицы F_{ik}. Эта система формально имеет вид уравнений движения частицы в потенциальном поле в девятимерном евклидовом пространстве. Ниже будет показано, что в случае, когда потенциальная энергия является однородной функцией координат степени минус два, уравнения механики, кроме хорошо известных первых интегралов, имеют еще некоторый дополнительный интеграл. В газодинамической задаче такая функция потенциальной энергии соответствует идеальному газу без внутренних степеней свободы, т.е. практически интересной для рассматриваемой задачи среде. Использование дополнительного интеграла позволяет получить для ряда начальных условий точное решение задачи о разлете газового облака в вакуум. В частности, найдено замкнутое решение, описывающее расширение сфероида в отсутствие вращения (только для этого случая имеются численные решения) и вращающегося эллиптического цилиндра.

Будем использовать те же обозначения, что и в работе [3]. Массу облака примем равной единице. Систему уравнений для матричных элементов F_{ik} запишем в виде

$$F_{ik}^{\cdot\cdot} + \partial U / \partial F_{ik} = 0 \tag{2}$$

где роль потенциальной энергии $U(F)$ играет внутренняя энергия газа, зависящая в рассматриваемом случае от детерминанта матрицы F_{ik}. Система (2) имеет следующие семь первых интегралов [3]:

$$^1/_2\, F^{\bullet}_{ik} F^{\bullet}_{ik} + U = E, \quad F\overline{F}^{\bullet} - F^{\bullet}\overline{F} = J, \quad \overline{F}F^{\bullet} - \overline{F}^{\bullet}F = K \tag{3}$$

где J и K — постоянные антисимметричные матрицы и $\overline{F}$ — транспонированная матрица F.

Обратимся к случаю идеального газа без внутренних степеней свободы. В этом случае, как нетрудно видеть, внутренняя энергия является однородной функцией минус второй степени от элементов матрицы F

$$U = U_0\, (\det F_{ik})^{-2/3} \tag{4}$$

Для функции U вида (4) система (2) имеет дополнительный интеграл. Чтобы получить его, преобразуем выражение $F_{ik}\ddot{F}_{ik}$, используя (2), теорему Эйлера об однородных функциях и интеграл энергии (первое соотношение из (3)). После простых преобразований и интегрирования получающегося уравнения находим

$$F_{ik}F_{ik} = 2Et^2 + At + B \tag{5}$$

где A и B — постоянные интегрирования.

Соотношение (5) есть интеграл уравнений механики для произвольного потенциала, являющегося однородной функцией координат степени минус два. В механике соответствующий центральный потенциал, $U = \alpha/r^2$, обычно рассматривается в связи с задачей о «падении» частицы на центр [5]. Известные условия «падения» непосредственно следуют из (5), но обычно выводятся иным путем. В квантовой механике, как указал И. Е. Дзялошинский, интегралу (5) соответствует инвариантность нестационарного уравнения Шредингера с потенциалом α/r^2 относительно группы преобразований независимых переменных $r' = \gamma r$; $t' = \gamma^2 t$. Учитывая это обстоятельство, легко построить автомодельные решения уравнения Шредингера с таким потенциалом.

Применим теперь интеграл (5) к решению задачи о расширении газового облака в вакуум. Рассмотрим сначала расширение сфероида в отсутствие вращения. В этом случае $J = K = 0$, и матрица F_{ik} становится диагональной с двумя независимыми элементами F_1 и $F_2 = F_3$. В качестве системы уравнений, определяющих F_1 и F_2, можно вместо (2) взять интеграл энергии (3) и соотношение (5). Запишем их в виде

$$\begin{gathered} ^1/_2\, (F_1^{\bullet 2} + 2F_2^{\bullet 2}) + U_0\, (F_1 F_2^2)^{-2/3} = E \\ F_1^2 + 2F_2^2 = 2Et^2 + At + B \end{gathered} \tag{6}$$

Перейдем в (6) к полярным координатам σ и ϑ по формулам

$$F_1 = \sigma \sin\vartheta, \qquad F_2\sqrt{2} = \sigma\cos\vartheta$$

и для простоты рассмотрим покоящийся при $t = 0$ сфероид. Преобразуя (6), получим равенство

$$\sigma^2 = 2Et^2 + B$$

и уравнение первого порядка для ϑ, интегрирование которого дает

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2E}{B}\right)^{1/2} t = \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \left[1 - \left(\frac{\sin\vartheta_0 \cos^2\vartheta_0}{\sin\vartheta \cos^2\vartheta}\right)^{2/3}\right]^{-1/2} d\vartheta \qquad (7)$$

$$(\vartheta_0 = \vartheta(0))$$

Значение $\vartheta_0 = \vartheta_* = \arcsin {}^1/_3 \sqrt{3}$ является критическим и соответствует разлету сферического облака (этот случай рассматривался в [2]).

Для произвольных начальных значений ϑ_0 переменная ϑ в интеграле (7) изменяется в интервале между нулями ϑ_0 и ϑ_1 подкоренного выражения. Нетрудно убедиться, что предельное при $t \to \infty$ значение ϑ заключено между ϑ_1 и ϑ_*, вследствие чего (как уже было замечено в [3, 4] на основании численного счета) сигарообразное облако преобразуется при разлете в дискообразное и наоборот. При малых отклонениях начальной формы облака от сферической легко получить следующее выражение для $\vartheta(t)$:

$$\frac{\vartheta(t) - \vartheta_*}{\vartheta_0 - \vartheta_*} = \frac{B - Et^2}{B + Et^2}$$

Из последней формулы ясно, что в этом случае предельная форма облака при $t \to \infty$ оказывается сопряженной начальной и получается заменой ϑ_0 на $\vartheta_1 = 2\vartheta_* - \vartheta_0$.

При произвольном значении ϑ_0 интеграл в (7) можно выразить через эллиптические интегралы третьего рода, для которых имеются таблицы. Формулы имеют вид

$$\operatorname{arctg} t \left(\frac{2E}{B}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{u_0(u_0 - u_2)}}\left[\frac{1}{1 + u_0}\Pi(\lambda, \mu, p) + \right.$$

$$\left. + 2\operatorname{Re}\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + 2u_0 - i\sqrt{3}}\Pi(\lambda, \mu_1, p)\right)\right]$$

$$\lambda = \arcsin\left(\frac{u_0 - u}{u_0 + 1}\right)^{1/2}, \quad p = \left(\frac{u_0 - u_1}{u_0 - u_2}\right)^{1/2}, \quad \mu = \frac{u_0 - u_1}{u_0 + 1}$$

$$\mu_1 = \frac{u_0 - u_1}{u_0 - {}^1/_2 + {}^1/_2 i\sqrt{3}}, \qquad u_{1,2} = -\frac{u_0}{2} \pm \left(\frac{u_0^2}{4} - \frac{1}{u_0}\right)^{1/2}$$

$$\Pi(\lambda, \mu, p) = \int\limits_0^{\sin\lambda} \frac{dx}{(1 + \mu x^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - px^2)}}, \qquad u_0 = \operatorname{tg}^{2/3}\vartheta_0, \quad u = \operatorname{tg}^{2/3}\vartheta$$

Рассмотрим теперь двухмерную задачу о разлете бесконечного вращающегося эллиптического цилиндра. Потенциальная энергия «двухмерного» идеального газа без внутренних степеней свободы в принятых обозначениях имеет вид

$$U = U_0(\det F_{ik})^{-1} \qquad (i, k = 1, 2)$$

В качестве уравнений для матрицы F_{ik} возьмем интегралы (3) и (5); запишем систему уравнений в виде

$$^1/_2(\dot F_{11}^2 + \dot F_{12}^2 + \dot F_{21}^2 + \dot F_{22}^2) + U_0(F_{11}F_{22} - F_{21}F_{12})^{-1} = E$$

$$F_{11}\dot F_{21} + F_{12}\dot F_{22} - \dot F_{11}F_{21} - \dot F_{12}F_{22} = J$$

$$F_{11}\dot F_{12} + F_{21}\dot F_{22} - \dot F_{11}F_{12} - \dot F_{21}F_{22} = K$$

$$F_{11}^2 + F_{12}^2 + F_{21}^2 + F_{22}^2 = 2Et^2 + A_1 t + B_1$$

Постоянные J и K связаны с начальными значениями углового момента и завихренности. Введем новые переменные σ, ϑ, ξ и η по соотношениям

$$F_{11} = \sigma(\cos\vartheta\cos\xi + \sin\vartheta\cos\eta), \quad F_{21} = \sigma(\cos\vartheta\sin\xi + \sin\vartheta\sin\eta)$$
$$F_{12} = \sigma(\cos\vartheta\sin\xi - \sin\vartheta\sin\eta), \quad F_{22} = \sigma(\cos\vartheta\cos\xi - \sin\vartheta\cos\eta)$$

После преобразований получим

$$\sigma^2 = Et^2 + 2At + B, \quad \sigma^2\dot{\xi}\cos^2\vartheta = C, \quad \sigma^2\dot{\eta}\sin^2\vartheta = D$$

$$\beta\,[\operatorname{arctg}\beta(Et - A) - \operatorname{arctg}\beta A] = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\left[\beta^2 - \frac{C^2}{\cos^2\vartheta} - \frac{D^2}{\sin^2\vartheta} - \frac{U_0}{\cos 2\vartheta}\right]^{-1/2} d\vartheta \quad (8)$$

$$\beta^2 = BE - A^2, \quad C = {}^1/_4(J - K), \quad D = {}^1/_4(J + K)$$

Интеграл в (8) снова можно выразить через эллиптические интегралы; однако соответствующие формулы здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

В качестве весьма простого частного случая последней задачи рассмотрим разлет кругового цилиндра, в начальный момент вращающегося как твердое тело с угловой скоростью ω. Вычисления с помощью формул (8) приводят к результату

$$F_{11} = F_{22} = (1 + Et^2)^{1/2}\cos[E^{-1/2}\omega\operatorname{arctg}(E^{1/2}t)]$$
$$F_{21} = F_{12} = (1 + Et^2)^{1/2}\sin[E^{-1/2}\omega\operatorname{arctg}(E^{1/2}t)]$$

Нетрудно вычислить, как изменяется в процессе расширения плотность момента количества движения облака. Для гауссовского начального распределения плотности газа, $\rho(r, 0) = (2\pi)^{-1}\exp(-{}^1/_2 r^2)$, получаем

$$(xv_y - yv_x)\rho(r, t)\,2\pi r\,dr = \omega\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{r^2}{1 + Et^2}\right)\frac{r^3\,dr}{(1 + Et^2)^2}$$

Полный момент $J_{xy} = 2\omega$, очевидно, сохраняется. Радиус слоя, несущего максимальный момент количества движения, изменяется со временем по закону

$$r_m = [3(1 + Et^2)]^{1/2}$$

Поступила 4 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Новое решение уравнений гидродинамики. Докл. АН СССР, 1965, т. 111, № 1, стр. 47—49.
2. Седов Л. И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа. Докл. АН СССР, 1953, т. 40, № 5, стр. 753—755.
3. Dyson F. Dynamics of a spinning gas cloud, J. Math. Mech., 1968, vol. 18, No. 1, pp. 91—101.
4. Немчинов И. В. Разлет трехосного газового эллипсоида в регулярном режиме. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика. М., Физматгиз, 1958, стр. 47.