Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ВИХРЯ ВДАЛИ ОТ ТЕЛА ПРИ ОБТЕКАНИИ ЕГО ПЛОСКИМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

К. И. Бабенко

(Москва)

Рассматривается обтекание тела плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости. Изучается поле скоростей вдали от тела. Выводятся асимптотические формулы для вихря и для поля скоростей.

Задача об асимптотике течения вязкой жидкости известна давно и привлекала внимание многих исследователей. Известны многочисленные работы Финна и его учеников. Плоский случай исследовался Файлоном [1,2] при помощи аппроксимации Осеена. Известен «парадокс» Файлона, состоящий в том, что для момента, действующего на тело, Файлон получил расходящийся интеграл. Затем последовали работы Гольдштейна [3,4], Имаи [5], Смита [6], Финна и Смита [7]. Предлагаемая работа возникла в процессе разработки численного алгоритма решения задачи обтекания кругового цилиндра вязкой жидкостью. Автор благодарит Н. Д. Введенскую за обсуждение вопросов, затрагиваемых в работе.

§ 1. Пусть S — поперечное сечение тела, C — граница S; C — гладкая жорданова кривая; дополнение к S до всей плоскости обозначим через G. Пусть (x, y) — прямоугольные координаты с началом внутри S. Пусть $1 + u$, v — безразмерные компоненты скорости, p — безразмерное давление, ρ — плотность, $\rho = 1$. Через w обозначим комплексную скорость, $w = v + iu$, ω — вихрь, $\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$, R — число Рейнольдса, $\lambda = R/2$. Будем рассматривать те решения задачи обтекания, которые удовлетворяют условиям

$$w \in C^3(G) \cap C^1(\overline{G}), \quad \int_G \omega^2 \, dx\, dy < \infty \tag{1.1}$$

$$|w| = O(r^{-1/4-\varepsilon}) \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2}) \tag{1.2}$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое количество. Положим

$$z = x + iy, \qquad \zeta = \xi + i\eta, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Пусть

$$l_0(z) = e^{\lambda x} K_0(\lambda r), \quad m_0(z) = (\bar z / r) e^{\lambda x} K_1(\lambda r), \quad l_0^*(z) = m_0(z) - 1/\lambda z$$

где K_j $(j = 0,1)$ — функция Макдональда. При помощи выше приведенных условий нетрудно показать, что имеет место соотношение

$$\omega(\zeta) = j_0 + \frac{\lambda}{\pi} \int\limits_G \omega \left[u \frac{\partial l_0(\zeta - z)}{\partial x} + v \frac{\partial l_0(\zeta - z)}{\partial y} \right] dx\,dy \tag{1.3}$$

$$j_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_C \left[\omega \frac{\partial l_0(\zeta - z)}{\partial n} + 2\lambda p \frac{\partial l_0(\zeta - z)}{\partial s} \right] ds \tag{1.4}$$

где n — внешняя нормаль к $\partial S = C$, а s — длина дуги на C.

Введем следующее обозначение для свертки двух функций f и l

$$(f*l)(\zeta) = f*l = \frac{1}{\pi} \int\limits_G f(z)\, l(\zeta - z)\, dx\,dy$$

В этих обозначениях

$$w(\zeta) = f(\zeta) + {}^1/_2 \lambda i\,(w^2 * k + w^2 * k^*) \tag{1.5}$$

где

$$k(z) = \frac{\partial}{\partial \bar z} l_0(z), \quad k^*(z) = \frac{\partial}{\partial z} l_0^*(z), \quad f(\zeta) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_C \{ l_0(\zeta - z) \times$$

$$\times [(2\lambda p + i\omega)\, dz + d\bar z] - l_0^*(\zeta - z)\, [(2\lambda p - i\omega)\, dz + d\bar z] \} + g(\zeta) \tag{1.6}$$

причем $g(\zeta)$ регулярна в области G.

§ 2. Пусть

$$L(z) = \begin{cases} r^{-\alpha} \exp[\mu(x - r)] + \delta r^{-2}, & r \geqslant 1 \\ r^{-\alpha_0}, \quad 0 \leqslant \alpha_0 < 2, & r < 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\delta = 1$ либо 0. Положим

$$\varphi(z) = (|\log r| + 1)^{\beta_0} (r + 1)^{-\beta}, \ \beta_0 \geqslant 0, \qquad \beta > 0, \qquad J(\zeta) = (\varphi * L)(\zeta)$$

Следующие леммы дают оценку свертке $J(\zeta)$ и приводятся без доказательства ввиду ограничений на объем работы.

Лемма 2.1. Если $\beta \leqslant 1$, $\alpha + \beta > {}^3/_2$, то

$$J(\zeta) < C\varphi(\zeta)\, [\rho^{3/2 - \alpha} \Delta_{1,\beta}(\zeta) + \delta \log \rho + \Delta_{3/2,\alpha}(\zeta)] \tag{2.2}$$

$$\rho = |\zeta| \quad \Delta_{\alpha,\beta}(\zeta) = (\log \rho)^{\delta_{\alpha\beta}}, \quad \delta_{\alpha\beta} \text{ — символ Кронекера.}$$

Положим

$$\sigma(z) = r - x + 1$$

Лемма 2.2. Если $1 < \beta \leqslant 2$, $\alpha + \beta > {}^3/_2$, то

$$J(\zeta) < C\varphi(\zeta)\, [\rho^{3/2 - \alpha} + \Delta_{3/2,\alpha}(\rho) + \rho^{1-\alpha-\beta/2} \sigma^{1/2(1-\beta)}(\zeta)\, \Delta_{2\beta}(\rho) + \delta \log \rho] \tag{2.3}$$

Константа C зависит от μ и α, β.

Пусть

$$\psi(z) = (\log r + 1)^{\beta_0} \begin{cases} r^{-\beta} e^{\mu(x - r)}, & r > 1 \\ r^{-\beta_1}, \quad 0 < \beta_1 < 2, & r < 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

Рассмотрим свертку

$$J_1(\zeta) = (\psi * L)(\zeta)$$

Лемма 2.3. Имеет место неравенство

$$J_1(\zeta) < C\{\exp[\mu(\xi-\rho)]\,[\rho^{3/2-\alpha-\beta}+\rho^{-\alpha}\Delta_{3/2,\beta}(\zeta)+\rho^{-\beta}\Delta_{3/2,\alpha}(\zeta)]+$$
$$+\delta\rho^{-\beta}\sigma^{-1/2}(\zeta)\log\rho+\delta\rho^{-2}\Delta_{3/2,\beta}(\rho)\}\,(\log\rho)^{\beta_0} \tag{2.5}$$

§ 3. Пусть $f(z)$ — непрерывна при $|z| \geqslant R$ и $\lim f(z)=0$ при $|z|\to\infty$. При $|z|\geqslant R$ определена функция $\Phi(r)=\max|f(z)|$ при $|z|\geqslant r$. Будем называть степенным порядком убывания функции $f(z)$ величину

$$\varliminf_{r\to\infty}\left(\frac{1}{\log r}\log\frac{1}{\Phi(r)}\right)$$

и обозначать ее через $\delta=\delta(f)$. Предположение (1.2) запишется в виде $\delta(w)>{}^1/_4$. Положим

$$k(z)-k^*(z) = -L_{11}(z)-iL_{12}(z)$$
$$k(z)+k^*(z) = -iL_{12}(z)+L_{22}(z)$$

Используя асимптотические формулы для бесселевых функций, получим оценку

$$|L_{lm}(z)| \leqslant C\lambda\begin{cases}(\lambda r)^{-\alpha_{lm}}e^{\mu(x-r)}+(\lambda r)^{-2}, & \text{если } \lambda r\geqslant 1\\ (\lambda r)^{-1}, & \text{если } \lambda r<1\end{cases} \tag{3.1}$$

где $\mu/\lambda \geqslant \vartheta_0>0$, а константа ϑ_0 — абсолютная, C — константа, зависящая только от ϑ_0. Величины α_{lm} суть

$$\alpha_{11}=\alpha_{22}={}^3/_2,\qquad \alpha_{21}=1,\qquad \alpha_{12}=2 \tag{3.2}$$

Предложение 3.1 Если $\delta(w)\leqslant{}^1/_2$, то $\delta(v)\geqslant 2\delta(w)$.

Доказательство. Из (1.5) следует, что

$$v(\zeta)=\operatorname{Re}f(\zeta)+\lambda(vu)*L_{11}+{}^1/_2\lambda(v^2-u^2)*L_{12} \tag{3.3}$$

Принимая во внимание оценки (3.1) и соотношения (3.2), имеем по лемме 2.1

$$v(\zeta)=\operatorname{Re}f(\zeta)+O(\rho^{-2\delta(w)+\varepsilon}) \tag{3.4}$$

где $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое количество. Так как $\operatorname{Re}f(\zeta)=O(\rho^{-1})$, то из последнего неравенства выходит $\delta(v)\geqslant 2\delta(w)$, что и требовалось доказать.

Предложение 3.2. Имеет место оценка $\delta(u)\geqslant{}^1/_2$.

Доказательство. По формуле (1.5)

$$u(\zeta)=\operatorname{Im}f(\zeta)+\lambda(vu)*L_{21}+{}^1/_2\lambda(v^2-u^2)*L_{22} \tag{3.5}$$

Если $\delta(w)+\delta(v)=\delta(u)+\delta(v)\leqslant 1$, то по лемме 2.1

$$u(\zeta)=\operatorname{Im}f(\zeta)+O(\rho^{1/2-\delta(u)-\delta(v)+\varepsilon}+\rho^{-2\delta(u)+\varepsilon})$$

где $\varepsilon>0$ — сколь угодно мало. Отсюда, поскольку $\delta(v)\geqslant 2\delta(w)>{}^1/_2$, следует, что $\delta(u)=\delta(\operatorname{Im}f)$. Таким образом, $\delta(u)\geqslant{}^1/_2$, что противоречит нашему предположению $\delta(w)+\delta(v)\leqslant 1$. Таким образом, $\delta(u)+\delta(v)>1$, и, стало быть, по лемме 2.2

$$u(\zeta)=\operatorname{Im}f(\zeta)+O[\rho^{-1/2[\delta(u)+\delta(v)]+\varepsilon}+\rho^{-2\delta(u)+\varepsilon}+\rho^{-1/2-\delta(u)+\varepsilon}] \tag{3.6}$$

Отсюда вытекает неравенство $\delta(u)\geqslant{}^1/_2$, что и требовалось доказать.

Используя асимптотические формулы для бесселевых функций, получим

$$f(\zeta) = i a_{1/2} \rho^{-1/2} e^{\lambda(\xi-\rho)} + O(\rho^{-1}),\ a_{1/2} = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} \int\limits_C \left(p dy - \frac{\omega}{2\lambda} dx\right) \tag{3.7}$$

Полученный интеграл лишь множителем отличается от силы лобового сопротивления и поэтому будет отличен от нуля. Строгое доказательство этого факта дано Смитом в работе [8].

Таким образом, $\delta(u) = \delta(w) = 1/2$ и, полагая

$$w_{1/2}(\zeta) = i a_{1/2} \rho^{-1/2} e^{\lambda(\xi-\rho)}$$

получим на основании (3.4) и (3.6)

$$v(\zeta) = O(\rho^{-1+\varepsilon}), \qquad u(\zeta) = \operatorname{Im} w_{1/2}(\zeta) + O(\rho^{-3/4+\varepsilon}) \tag{3.8}$$

Дальнейшее усовершенствование соотношений (3.8) сделаем, применяя рациональным образом процесс итераций к нелинейному уравнению (1.5). В результате получим первые несколько членов асимптотики w; эти члены будут отличаться порядком убывания. Порядки убывания образуют ряд чисел $1/2$, 1, $3/2$, 2, ... и при продвижении вдоль этого ряда в асимптотике будут проявляться в обилии члены, содержащие логарифмические множители.

Сумму членов, порядок убывания которых не превосходит величины α, будем обозначать через w_α и полагать

$$w = w_\alpha + w^{(\alpha+1/2)}$$

Предложение 3.3. Имеет место оценка $\delta(w^{(1)}) \geqslant 1$.

Доказательство. Положим

$$w^{(1)} = v^{(1)} + i u^{(1)} = v + i u^{(1)}, \qquad f = f_{1/2} + f^{(1)}, \qquad f_{1/2} = w_{1/2}$$

Тогда соотношение (1.15) даст

$$w^{(1)} = f^{(1)} + {}^1/_2 \lambda i\, [w_{1/2}^2 * (k + k^*) + 2(w_{1/2} w^{(1)}) * k - 2(w_{1/2} \overline{w}^{(1)}) * k^* +$$
$$+ (w^{(1)})^2 * k + (w^{(1)})^2 * k^*] \tag{3.9}$$

Обозначим через $h^{(1)}$ сумму двух первых слагаемых, через j_1 — сумму двух последующих слагаемых и через j_2 — сумму двух последних слагаемых правой части (3.9). К величине j_1 применим лемму 2.3. Имеем

$$j_1 = -\lambda (w_{1/2} u) * (k + k^*) + \lambda i (w_{1/2} v) * (k - k^*)$$

В силу (3.1), (3.2) и первого соотношения (3.8)

$$j_1 = i\lambda (u_{1/2} v) * L_{21} + O\left[(\rho^{-3/2+\varepsilon} + \rho^{-1/2-\gamma+\varepsilon})\, \sigma^{-1/2}(\zeta)\right] \qquad (\delta(u^{(1)}) = \gamma) \tag{3.10}$$

Предположим, что $\gamma < 1$. Аналогично

$$\lambda (u_{1/2} v) * L_{21} = O\left[\rho^{-1+\varepsilon} e^{\mu(\xi-\rho)} + \rho^{-3/2+\varepsilon} \sigma^{-1/2}(\zeta)\right] \tag{3.11}$$

где в качестве μ можно взять количество $\vartheta\lambda$, $\vartheta < 1$. Имеем

$$j_2 = -\lambda (v u^{(1)}) * (k - k^*) + {}^1/_2 \lambda i\, [v^2 - (u^{(1)})^2] * (k + k^*)$$

Применяя лемму 2.2, получим

$$j_2 = i\lambda\,(vu^{(1)}) * L_{21} + O\,[(\rho^{-(1+{}^1/_2\gamma)+\varepsilon} + \rho^{-({}^1/_2+\gamma)+\varepsilon})\,\sigma^{{}^1/_2(1-2\gamma+\varepsilon)}(\zeta) + \rho^{-2\gamma+\varepsilon}] \qquad (3.12)$$

Подобным образом

$$\lambda\,(vu^{(1)}) * L_{21} = O\,[\rho^{-({}^1/_2+\gamma)+\varepsilon} + \rho^{-{}^1/_2(1+\gamma)+\varepsilon}\,\sigma^{{}^1/_2\gamma+\varepsilon}(\zeta)] \qquad (3.13)$$

По лемме 2.3

$$w^2_{{}^1/_2} * (k + k^*) = O\,(\rho^{-1}\sigma^{-{}^1/_2}(\zeta)) \qquad (3.14)$$

Так как $\delta(f^{(1)}) \geqslant 1$, то из приведенных оценок вытекает неравенство $\gamma \geqslant \min[1, {}^1/_2(1+\gamma)]$, которое противоречит предположению $\gamma < 1$. Таким образом, $\gamma \geqslant 1$, что и требовалось доказать.

Результаты, сформулированные как предложения (3.1)—(3.3), имеются в работе Смита [6], но доказательство его отлично от приведенного здесь.

Из (3.10) и (3.12) имеем

$$v = \operatorname{Re} h^{(1)} + O\,[\rho^{-{}^3/_2+\varepsilon}\sigma^{-{}^1/_2+\varepsilon}(\zeta)] \qquad (3.15)$$

Следовательно, можно определить главный член асимптотики функции v, если найти асимптотику свертки (3.14). Вычисление асимптотики подобного рода интегралов — дело довольно сложное и тонкое. Здесь приводится окончательный результат. В силу определения функций k и k^*

$$w^2_{{}^1/_2}*(k + k^*) = w^2_{{}^1/_2}(z)*\left(\frac{\partial l_0(\zeta - z)}{\partial\bar\zeta} + \frac{\partial m_0(\zeta - z)}{\partial\zeta}\right) + \lambda^{-1}w^2_{{}^1/_2}(z)*(\zeta - z)^{-2}$$

При этом интегралы берутся в смысле главного значения по Коши. Первое слагаемое правой части обозначим через $I_{{}^1/_2}$, а второе — через $J_{{}^1/_2}$. Имеем

$$I_{{}^1/_2}(z) = \frac{2ia^2_{{}^1/_2}}{\lambda r}e^{\lambda(x-z)}\left\{\left[2i\lambda(r - x) + \frac{y}{r}\left(\lambda(r - x) - \frac{1}{2}\right)\right]\int_0^1 e^{-\lambda(r-x)v^2}dv - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(i + \frac{y}{r}\right)e^{\lambda(x-r)}\right\} + r^{-{}^3/_2}[C_1 y + C_2 + C_3(r - x)]\,e^{\lambda(x-r)} + O\,(r^{-2}e^{\mu(x-r)})$$

где C_1, C_2, C_3 — некоторые константы, точное значение которых для данного рассмотрения не существенно. Прежде чем приводить формулу для $J_{{}^1/_2}$, условимся в следующем. В плоскости z проведем разрез вдоль полуоси $x > 0$ (внутри следа!).

В разрезанной плоскости однозначна функция $(-z)^{{}^1/_2}$, причем берем ту ветвь корня, которая положительна при $z < 0$. Имеем

$$J_{{}^1/_2}(z) = -\lambda^{-1}a^2_{{}^1/_2}\left[\frac{\bar z}{r^2}e^{2\lambda(x-r)} + \frac{(-z)^{-{}^3/_2}}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^\tau e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}}\right] + \sum_{k=1}^{\infty}C_k' z^{-k} \qquad (\tau = 2\lambda(r - x))$$

причем ряд сходится в окрестности точки $z = \infty$. Легко видеть, что функция

$$(-z)^{-{}^3/_2}\int_0^\tau e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

со всеми своими производными не терпит разрыва на разрезе, коль скоро $z \neq 0$.

Из приведенных выражений выходит, что

$$w_{1/2}^{2} * (k+k^*) = \frac{a_{1/2}^2}{\lambda}\left\{\frac{2i}{r}\left[2i\lambda(r-x) + \frac{y}{r}\left(\lambda(r-x) - \frac{1}{2}\right)\right] \times \right.$$
$$\times e^{\lambda(x-r)}\int_0^1 e^{-\lambda(r-x)v^2}dv - \left.\frac{(-z)^{3/2}}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^\tau e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}}\right\} + (C_1 y + C_2 + C_3(r-x)) \times$$
$$\times \frac{e^{\lambda(x-r)}}{r^{3/2}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C'_k}{z^k} + O(r^{-2}e^{\mu(x-r)}) \qquad (3.16)$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} h^{(1)}(z) = \operatorname{Re}\left(a_1\frac{y}{r^{3/2}}e^{\lambda(x-r)} + \frac{b_1}{z}\right) + O(r^{-3/2})$$
$$\operatorname{Im} h^{(1)}(z) = \operatorname{Im}\left(a_1\frac{y}{r^{3/2}}e^{\lambda(x-r)} + \frac{b_1}{z}\right) -$$
$$-\frac{2\lambda a_{1/2}^2}{r}(r-x)\,e^{\lambda(x-r)}\int_0^1 e^{-\lambda(r-x)v^2}dv + O(r^{-3/2}) \qquad (3.17)$$

Полагая

$$V_1(z) = \operatorname{Re}\left(a_1\frac{y}{r^{3/2}}e^{\lambda(x-r)} + \frac{b_1}{z}\right) \qquad (3.18)$$

получим на основании (3.15) и (3.17)

$$v = V_1(z) + O\left[r^{-3/2} + r^{-3/2+\varepsilon}\sigma^{-1/2+\varepsilon}(z)\right] \qquad (3.19)$$

§ 4. Пусть $L(z) = L^{(1)}(z) + L^{(2)}(z)$ — одна из функций L_{lm}, причем $L^{(1)}(z)$ — та из компонент $L(z)$, которая вне следа экспоненциально убывает. Пусть $\varphi(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(z)| < (|\log r| + 1)^{\beta_0} r^{-\beta}\sigma^{-\gamma}(z)$$

Положим $\gamma_1 = \min(\gamma, 1/2)$, $\gamma_2 = \min(\gamma, 1)$, через $\varkappa$ будем обозначать количество, которое можно взять любым из интервала $(0, \infty)$. Введем функции ζ

$$\Delta^{(1)} = \Delta_{\beta-\gamma,1} + \Delta_{2\gamma,2}\Delta_{\beta-\gamma_2,2}, \qquad \Delta^{(3)} = \Delta_{2\gamma,2}\Delta_{\beta+\gamma_2,3}$$
$$\Delta^{(2)} = \Delta_{2\gamma,1}\Delta_{\beta-\gamma_1,2} + \Delta_{2\gamma,2}\Delta_{\beta-\gamma_2,2}, \qquad \Delta^{(4)} = \Delta_{2\gamma,1}\Delta_{\beta+\gamma_1,3}$$

Положим

$$\Omega(\zeta) = \rho^{-\alpha}\varphi_0(\zeta)\left[\Delta^{(1)}\rho^{1+1/2(\beta-\gamma_2)}\sigma^{1/2(1-\beta-\gamma)}(\zeta) + \Delta^{(2)}\rho^{3/2}\sigma^{-\gamma}(\zeta) + \Delta_{2\gamma,1}\rho^{2-\gamma_1}\sigma^{-\varkappa}(\zeta)\right] +$$
$$+ \Delta^{(3)}\log^{\beta_0}\rho\,\rho^{-\alpha-1/2}\sigma^{-\varkappa}(\zeta) + (\Delta^{(4)} + \log\rho)\,\varphi_0(\zeta)\,\sigma^{-\gamma_1}(\zeta) \qquad (4.1)$$

Лемма 4.1. Если $2 < \beta + \gamma_1 \leqslant 3$, то

$$J(\zeta) = (\varphi * L)(\zeta) = L(\zeta)\frac{1}{\pi}\int_G \varphi(z)\,dxdy + O(\Omega(\zeta))$$

Доказательство леммы не приводим по той же причине, что и для лемм 2.1—2.3.

§ 5. Продолжим рассуждения § 3 и определим члены первого порядка в асимптотике функции u (ζ). Первое слагаемое в формуле (3.11) преобразуем при помощи формулы (3.19), а затем применим лемму 4.1. Тогда

$$j_1 = i\lambda\,(u_{1/2}V_1) * L_{21} + i\lambda A_0 L_{21} + O\,[\rho^{-3/2+\varepsilon}\sigma^{-1/2}(\zeta)] \tag{5.1}$$

Аналогичную выкладку проделаем с j_2. Тогда

$$j_2 = i\lambda\,(tu^{(1)}) * L_{21} + i\lambda A_1 L_{21} + O\,[\rho^{-5/4+\varepsilon}\sigma^{-3/4+\varepsilon}(\zeta) + \rho^{-3/2+\varepsilon}\sigma^{-1/2+\varepsilon}(\zeta)] \tag{5.2}$$
$$t(\zeta) = \operatorname{Re} b_1\zeta^{-1}$$

Подставляя (5.1) и (5.2) в (3.9) и беря мнимую часть, получим

$$u^{(1)} = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2, \qquad \Phi_0 = \operatorname{Im} h^{(1)} + \lambda A_2 L_{21} + \lambda\,(u_{1/2}V_1) * L_{21}$$
$$\Phi_1 = \lambda\,(tu^{(1)}) * L_{21} \quad (A_2 = A_0 + A_1) \tag{5.3}$$

а Φ_2 — сумма остатков, причем

$$\Phi_2 = O\,[\rho^{-7/4+\varepsilon}\sigma^{-3/4+\varepsilon} + \rho^{-3/2+\varepsilon}\sigma^{-1/2+\varepsilon}] \tag{5.4}$$

Положив

$$\psi(\zeta) = u_{1/2}(\zeta)\left(\bar a_1\,\frac{y}{r^{3/2}}e^{\lambda(x-r)} + \frac{\bar b_1}{\bar\zeta}\right)$$

получим

$$(u_{1/2}V_1) * L_{21} = \operatorname{Re}\,(\psi * L_{21})$$

Для большего удобства вычисления последней свертки заметим, что по лемме 2.3

$$\psi * L_{21} = i\psi * (k - k^*) + O\,[\rho^{-3/2}\log\rho\sigma^{-1/2}(\zeta)]$$
$$\psi * (k - k^*) = \psi(z) * \left(\frac{\partial l_0(\zeta - z)}{\partial\bar\zeta} - \frac{\partial m_0(\zeta - z)}{\partial\zeta}\right) - \frac{\psi(z)}{\lambda} * \frac{1}{(\zeta - z)^2}$$

где интегралы берутся в смысле главного значения по Коши.

Первое сла гаемое в правой части обозначим через I_1, а второе — через J_1. Не привод я вычислений, отметим, что

$$I_1(z) = -ia_{1/2}\bar b_1\,\frac{y\log r}{r^{3/2}}e^{\lambda(x-r)} - a_{1/2}\bar a_1 ie^{\lambda(x-r)}\,[2(1 -$$
$$-\frac{x}{r})\int_0^1 e^{-(r-x)s^2}ds - \frac{1}{\lambda r}e^{\lambda(x-r)}] + iC_1\frac{y}{r^{3/2}}e^{\lambda(x-r)} + O\,(r^{-3/2}\log r)$$

где C_1 — некоторая вещественная константа. Вычисления дают

$$J_1(z) = O\,(r^{-3/2})$$

Из этих соотношений и (3.17) выходит, что

$$\Phi_0(z) = \lambda a_{1/2}\operatorname{Re} b_1\,\frac{y\log r}{r^{3/2}}e^{\lambda(x-r)} + \operatorname{Im}\left(a_1^*\frac{y}{r^{3/2}}e^{\lambda(x-r)} + \frac{b_1}{z}\right) +$$
$$+ 2a_{1/2}(\operatorname{Re}a_1 - a_{1/2})\,\frac{\lambda(r-x)}{r}e^{\lambda(x-r)}\int_0^1 e^{-\lambda(r-x)s^2}ds -$$
$$-\frac{a_{1/2}\operatorname{Re}a_1}{r}e^{2\lambda(x-r)} + O\,(r^{-3/2}\log r) \tag{5.5}$$

Предложение 5.1. Функция $\Phi_1(z)$ удовлетворяет соотношению

$$\Phi_1(z) = AL_{21}(z) + O\,[r^{-3/2+\varepsilon}\sigma^{-1/2+\varepsilon}(z) + r^{-5/4+\varepsilon}\sigma^{-3/4+\varepsilon}(z)]$$

Доказательство. На основании (5.3)

$$\Phi_1 = \lambda\,(tu^{(1)}) * L_{21} = \lambda\,[(t\Phi_0) * L_{21} + (t\Phi_1) * L_{21} + (t\Phi_2) * L_{21}]$$

В свертку $(t\Phi_0) * L_{21}$ вместо Φ_0 подставим правую часть (5.5) и в результате получим сумму сверток, причем ко всем из них, за исключением одной, можно применить лемму 4.1.

Таким образом

$$\lambda\,(t\Phi_0) * L_{21} = [(\operatorname{Im}\, b_1 z^{-1})\, t(z)] * L_{21}(\zeta - z) + A_3 L_{21}(\zeta) + O\,[\rho^{-5/4}\sigma^{-3/4}(\zeta)\log\rho]$$

По предложению 3.3

$$u_1(z) = O\,(r^{-1+\varepsilon})$$

Поэтому по лемме 2.2

$$\Phi_1(z) = O\,[r^{-1+\varepsilon}\sigma^{-1/2+\varepsilon}(z)]$$

следовательно, по лемме 4.1

$$\lambda\,(t\Phi_1) * L_{21} = A_4 L_{21}(\zeta) + O\,[\rho^{-5/4+\varepsilon}\sigma^{-3/4+\varepsilon}(\zeta)]$$

Наконец, в силу (5.4) и леммы 4.1

$$\lambda\,(t\Phi_2) * L_{21} = A_5 L_{21}(\zeta) + O\,[\rho^{-3/2+\varepsilon}\sigma^{-1/2+\varepsilon}(\zeta)].$$

Поскольку

$$[\operatorname{Im}\,(b_1 z^{-1})\, t(z)] * L_{21}(\zeta - z) = \operatorname{Im}\,[{}^1/_2 b_1{}^2 z^{-2} * L_{21}(\zeta - z)]$$

а последнюю свертку нетрудно оценить и получить, что она будет $O\,(r^{-2}\log r)$, то тем самым предложение доказано.

Отсюда следует, что главный член функции $u^{(1)}$ отличается от главного члена Φ_0 на величину вида AL_{21}, и, значит, он дается выражением (5.5), только не с константой $a_1{}^*$, а с некоторой другой. Поскольку это не приведет к недоразумению, эту новую константу обозначим снова через $a_1{}^*$.

§ 6. Рассмотрим вопрос о дифференцировании полученных асимптотических формул. Более точно вопрос сводится к оценке остатка в асимптотических формулах для $\partial w / \partial z$ и $\partial w / \partial \bar z$, если главные члены получены дифференцированием главных членов функции w. Заметим, что при малых $|z|$

$$k(z) = -\frac{1}{2\bar z} + \ldots, \qquad k^*(z) = -\frac{\bar z}{2z^2} + \ldots$$

где многоточием обозначены члены, имеющие лишь логарифмическую особенность. Отсюда на основании известных теорем следует, что функция

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|z|\leqslant 1}\varphi(z)\,k(\zeta - z)\,dxdy \tag{6.1}$$

будет удовлетворять неравенству

$$|\varphi_1(\zeta + h) - \varphi_1(\zeta)| < C\max|\varphi|\,|h|\log\frac{1}{|h|}$$

если

$$|h| \leqslant 1$$

Аналогичное замечание верно и для интеграла с ядром $k^*(z)$.

Чтобы вывести асимптотику функции $w(\zeta + h) - w(\zeta)$, следовало бы повторить рассуждения §§ 3 и 5, однако ввиду того, что эти рассуждения не зависят от конкретного вида ядер $L_{lm}(z)$, то они останутся в силе и для ядер $L_{lm}(z+h) - L_{lm}(z)$ с той лишь разницей, что теперь ядра удовлетворяют не неравенству (3.1), а неравенству

$$|L_{lm}(z+h) - L_{lm}(z)| < C|h|\,[r^{-\alpha_{lm}-{}^1/_2}e^{\mu(x-r)} + (\lambda r)^{-3}]$$

если

$$|z| \geqslant 1$$

Принимая во внимание замечание о функции (6.1), легко видеть, что вспомогательные леммы § 2 и 4.1 остаются в силе. Поэтому

$$w(\zeta + h) - w(\zeta) = w_1(\zeta + h) - w_1(\zeta) + O\left(|h| \log \frac{1}{|h|}\rho^{-{}^7/_4+\varepsilon}\right) \qquad (6.2)$$

Если в (6.1) функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leqslant M_\alpha |z_1 - z_2|^\alpha$$

то, как известно, $\varphi_1(\zeta)$ будет дифференцируемой, причем

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial\bar\zeta}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta}\right| \leqslant C(\max|\varphi| + M_\alpha)$$

Аналогичное замечание верно и для интеграла с ядром k^*. Пользуясь оценкой (6.2), можно продифференцировать формулу (3.9) и повторить дальнейшие выкладки. В результате получим, что

$$\frac{\partial w(\zeta)}{\partial\bar\zeta} = \frac{\partial w_1(\zeta)}{\partial\bar\zeta} + O(\rho^{-{}^7/_4+\varepsilon}), \qquad \frac{\partial w}{\partial\zeta} = \frac{\partial w_1}{\partial\zeta} + O(\rho^{-{}^7/_4+\varepsilon}) \qquad (6.3)$$

Отсюда вытекают следующие предложения.

Предложение 6.1. Если выполнены условия (1.1) и (1.3), то вихрь ω удовлетворяет неравенству

$$|\omega(\zeta)| \leqslant C\rho^{-1} \qquad (6.4)$$

Доказательство. Поскольку $\omega(\zeta) = 2\,\partial w/\partial\bar\zeta$, то в силу (6.3) следует (6.4).

Рассмотрим вопрос об определении констант $a_{{}^1/_2}$, a_1, b_1 в асимптотической формуле. Они не независимы, так как уравнение неразрывности приводит к некоторым связям между ними. На основании (6.3), (3.19) и (5.5)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{a_{{}^1/_2}}{2}\left(1 - \frac{\lambda y^2}{r}\right)\frac{e^{\lambda(x-r)}}{r^{{}^3/_2}} + O(r^{-{}^7/_4+\varepsilon})$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{Re} a_1\left(1 - \frac{\lambda y^2}{r}\right)\frac{e^{\lambda(x-r)}}{r^{{}^3/_2}} + O(r^{-{}^7/_4+\varepsilon})$$

и, стало быть, уравнение неразрывности влечет

$$\operatorname{Re} a_1 = {}^1/_2\, a_{{}^1/_2} \qquad (6.5)$$

Предложение 6.2. Имеет место соотношение

$$\operatorname{Im} b_1 = -\frac{a_{1/2}}{\sqrt{2\pi\lambda}} \tag{6.6}$$

Доказательство. Уравнение неразрывности и условия на теле влекут

$$\operatorname{Re}\int_C w(z)\,dz = 0$$

каков бы ни был замкнутый контур C, лежащий в области G.

Пусть

$$C = \{z : |z| = R\}, \qquad R \uparrow \infty$$

Тогда получим

$$\operatorname{Re}\left[ia_{1/2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda R(\cos\theta-1)} R^{1/2} e^{i\theta}\,d\theta + 2\pi i b_1\right] + O(R^{-1/4+\varepsilon}) = 0$$

Отсюда при $R \to \infty$ следует (6.6).

На основании (3.19), (5.5) и (6.5) имеем асимптотическую формулу

$$w(z) = ia_{1/2}\left(1 + \lambda \operatorname{Re} b_1 \frac{y\log r}{r}\right) r^{-1/2} e^{\lambda(x-r)} +$$

$$+ a_1 \frac{y}{r^{3/2}} e^{\lambda(x-r)} + \frac{b_1}{z} - ia_{1/2}^2 \frac{e^{\lambda(x-r)}}{r}\left[\lambda(r-x)\int_0^1 e^{-\lambda(r-x)s^2} ds +\right.$$

$$\left. + {}^1/_2\, e^{\lambda(x-r)}\right] + \Omega(z) \tag{6.7}$$

где

$$\operatorname{Re}\Omega(z) = 0\,[r^{-3/2} + r^{-3/2+\varepsilon}\sigma^{-1/2+\varepsilon}(z)]$$

$$\operatorname{Im}\Omega(z) = O\,[r^{-3/2}\log r + r^{-3/4+\varepsilon}\sigma^{-3/4+\varepsilon}(z) + r^{-3/2+\varepsilon}\sigma^{-1/2+\varepsilon}(z)] \tag{6.8}$$

Суммируя полученные результаты, приходим к теореме.

Теорема 6.1. Если выполнены условия (1.1) и (1.2), то для комплексной скорости имеет место асимптотическая формула (6.7) с остаточным членом (6.8).

§ 7. Перейдем к оценке убывания вихря вне следа. Для этого воспользуемся соотношением (1.3), рассматривая его как интегральное уравнение для функции $\omega(z)$.

Вначале установим вспомогательное предложение. Пусть функция $\psi(z)$ непрерывна при $z \neq 0, \infty$ и при $0 < r < \infty$ удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant \psi(z) \leqslant C_0 r^{-\gamma}, \qquad 0 < \gamma < 1 \tag{7.1}$$

$$\psi(\zeta) \leqslant \rho^{-1} e^{\mu(\xi-\rho)} + A\,[r^{-1}\psi(z)] * L(\zeta - z) \tag{7.2}$$

$$(L(z) = r^{-1} e^{\mu(x-r)}, \quad A = \text{const})$$

Предложение 7.1. Неравенство (7.2) при условии (7.1) влечет

$$\psi(\zeta) \leqslant B_0 \rho^{-\gamma} e^{\mu_0(\xi-\rho)} \tag{7.3}$$

где B_0, μ_0 — подходящие константы.

Доказательство. Положим $\mu = 2\mu_1 + \mu_2$, $\mu_j > 0$, $j = 1, 2$. Допустим, что при $s \leqslant n$, где n — целое либо полуцелое

$$\psi(z) \leqslant C_0 B^s \Gamma(s+1)\, \sigma^{-s}(\mu_1 z)\, r^{-\gamma} \tag{7.4}$$

Это неравенство удовлетворяется при $s = 0$. Покажем, что при подходящем выборе константы B оно будет выполняться и при $s \leqslant n + 1/2$, а стало быть, и для всех целых и полуцелых n. Положив $\tau = \rho - \zeta$, введем множества

$$G_0 = \left\{z : r - x < \frac{1}{2}\tau\right\}, \qquad G_n = \left\{z : \tau\left(\frac{1}{2} + \frac{[n]-1}{2n}\right) \leqslant r - x\right\} \tag{7.5}$$
$$G_k = \left\{z : \tau\left(\frac{1}{2} + \frac{k-1}{2n}\right) \leqslant r - x < \tau\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{2n}\right)\right\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, [n]-1$$

Замечая, что

$$\xi - x - |\zeta - z| \leqslant \xi - \rho + r - x$$

получим

$$e^{\mu(\xi - x - |\zeta - z|)} \leqslant e^{\mu_2(\xi - x - |\zeta - z|)} e^{-\tau[1-(k/n)]\mu_1}$$
$$z \in G_k, \quad 0 \leqslant k \leqslant [n]-1$$

Если $t > 0$, $m > 0$, то легко проверить, что

$$e^t \geqslant \frac{t^m}{\Gamma(m+1)}$$

Отсюда при $z \in G_k$, $0 \leqslant k \leqslant [n]-1$

$$e^{\mu(\xi - x - |\zeta - z|)} \leqslant e^{\mu_2(\xi - x - |\zeta - z|)} \frac{\Gamma(n-k+1)}{[\mu_1\tau(1-(k/n)) + 1]^{n-k}}$$

В силу индуктивного предположения при $z \in G_k$, $0 \leqslant k \leqslant [n]-1$

$$\psi(z) \leqslant C_0 B^k \Gamma(k+1)\, [{}^1/_2\,\mu_1\tau(1 + (k-1)/n) + 1]^{-k} r^{-\gamma}$$

Если $z \in G_n$, то

$$\psi(z) \leqslant C_0 B^n \Gamma(n+1)\left[\tau\left(1 - \frac{n+1-[n]}{2n}\right) + 1\right]^{-n} r^{-\gamma}$$

Легко видеть, что

$$\left[\mu_1\tau\left(1 - \frac{n-[n]+1}{2n}\right) + 1\right]^{-n} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} (\mu_1\tau + 1)^{-n}$$

Поэтому

$$\psi(z) \leqslant 4C_0 B^n\, \Gamma(n+1)\,(\mu_1\tau + 1)^{-n} r^{-\gamma} \qquad (n \geqslant 2,\ z \in G_n) \tag{7.6}$$

Если $n < 2$, то в качестве G_n примем дополнение к G_0, и тогда оценка (7.6) также будет иметь место. Положим

$$M_n = \max\{M_1^*, M_2^*\}$$

$$M_1^* = \max \frac{\Gamma(n-k+1)\,\Gamma(k+1)\,B^k}{[\mu_1\tau(1-k/n)+1]^{n-k}\,[{}^1/_2\,\mu_1\tau(1+k/n)+1]^k}$$

$$M_2^* = 4B^n \frac{\Gamma(n+1)}{(\mu_1\tau + 1)^n} \qquad (0 \leqslant k \leqslant [n]-1)$$

Разбивая область интегрирования в свертке (7.2) на сумму областей G_k, а затем применяя в интеграле по G_k соответствующее неравенство, получим

$$[r^{-1}\psi(z)] * L(\zeta - z) < M_n(r^{-1-\gamma}) * L_1(\zeta - z), \qquad L_1(z) = r^{-1} e^{\mu_2(x-r)+1}$$

По лемме 2.2 последняя свертка не превосходит

$$C\rho^{-1/2(1+\gamma)}\,\sigma^{-1/2\gamma}(\mu_1\zeta)$$

Поэтому в силу (7.2)

$$\psi(\zeta)<\rho^{-1}e^{\mu(\xi-\rho)}+AC_1M_n\rho^{-\gamma}\,\sigma^{-1/2}(\mu_1\zeta),\qquad C_1=CC_0$$

Постоянная C зависит только от μ_1, μ_2, γ. Оценим сверху M_n. Ясно, что можно считать $n\gg1$, $k\gg1$. Легко видеть, что

$$\left[\mu_1\tau\left(1-\frac{k}{n}\right)+1\right]^{n-k}\left[\frac{\mu_1\tau}{2}\left(1+\frac{k-1}{n}\right)+1\right]^k\geqslant(\mu_1\tau+1)^n\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{2}+\frac{k-1}{2n}\right)^k$$

Учитывая это неравенство и применяя неравенства

$$m^{m+1/2}e^{-m}\sqrt{2\pi}<\Gamma(m+1)<m^{m+1/2}e^{-m}\sqrt{2\pi e}$$

получим

$$\frac{\Gamma(n-k+1)\,\Gamma(k+1)}{[\mu_1\tau(1-k/n)+1]^{n-k}[1/2\mu_1\tau(1+(k-1)/n)+1]^k}<$$

$$<\frac{\Gamma(n+3/2)}{(\mu_1\tau+1)^n}\sqrt{2\pi l^3}\left(\frac{k}{n}\right)^{k+1/2}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{k-1}{2n}\right)^{-k}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)}$$

Но

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{k+1/2}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{k-1}{2n}\right)^{-k}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)}<$$

$$<\left(\frac{k/n}{1/2(1+k/n)}\right)^k\left(\frac{k}{n}\right)^{1/2}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{1/2}\left(1+\frac{1}{n+k-1}\right)^k\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)}<\frac{1}{2}$$

Поэтому

$$M_n<2B^n\,\Gamma(n+3/2)(\mu_1\tau+1)^{-n}$$

Следовательно,

$$\psi(\zeta)<\rho^{-1}e^{\mu(\xi-\rho)}+2AC_1B^n\rho^{-\gamma}\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\sigma^{-n-1/2}(\mu_1\xi)$$

Применяя к первому слагаемому неравенство (7.5), получим неравенство (7.4) при $s=n+1/2$, если константу B выберем так, чтобы

$$e+2A_1C_1B^n\leqslant C_0B^{n+1/2}$$

$$B\geqslant(2AC+(e/C_0B^n))^2$$

Таким образом, достаточно положить $B=4AC$, так как всегда можно считать

$$e/C_0B^n\ll1,\qquad 2AC>1$$

Тем самым неравенство (7.4) установлено в общем случае. Из (7.4) выходит

$$\psi(\zeta)\leqslant C_0\rho^{-\gamma}\min_s\left[\frac{B^s\,\Gamma(s+1)}{\sigma^s(\mu_1\zeta)}\right]\leqslant C_2\rho^{-\gamma}\,\sigma^{1/2}(\mu_1\zeta)\exp\frac{-\mu_1(\rho-\xi)}{B}$$

Отсюда вытекает 7.3, если положить $\mu_0=\mu_1/2B$.

Замечание. Можно положить $\mu_1=\mu_2=\mu/3$. Тогда

$$\mu_0=\mu/24AC \tag{7.7}$$

причем $C=C(\mu)$, если фиксировано γ.

Предложение 7.2. Если выполнены условия предложения (7.1), то

$$\psi(\zeta) < C_\varepsilon \rho^{-\gamma} e^{(\mu-\varepsilon)(\xi-\rho)}$$

где $\varepsilon > 0$ — сколько угодно мало, а C_ε зависит от A, μ, ε.

Доказательство. По предложению 7.1 множество M тех значений m, для которых выполнено неравенство

$$\sup_{|\zeta|<\infty} [\rho^\gamma \psi(\zeta) e^{m(\rho-\xi)}] < \infty \tag{7.8}$$

не пусто, так как $\mu_0 \in M$. Заметим, что если $m_0 \in M$, то и $(0, m_0] \subset M$. Пусть

$$\mu^\circ = \sup m \qquad (m \in M)$$

Докажем, что $\mu^\circ \geqslant \mu$. Допустим противное $\mu^\circ < \mu$; пусть $\mu^* = \mu - \mu^\circ$. Пусть $\varepsilon > 0$ — достаточно мало. Ясно, что $\mu^\circ - \varepsilon = m \in M$. Положим

$$\psi_1(\zeta) = \psi(\zeta)\, e^{m(r-\xi)}$$

Тогда из (7.2) выходит, что

$$\psi_1(\zeta) \leqslant \rho^{-1} e^{(\mu^*+\varepsilon)(\xi-\rho)} + [r^{-1}\psi_1(z)] * L_1(\zeta - z)$$

$$L_1(z) = r^{-1}\exp[(\mu^* + \varepsilon)(x - r)]$$

Условие (7.1) примет вид

$$0 \leqslant \psi_1(\zeta) \leqslant C_m \rho^{-\gamma}$$

Поэтому по предложению 7.1

$$\psi_1(\zeta) \leqslant B_m \rho^{-\gamma} \exp[\mu_m(\xi - \rho)]$$

и согласно (7.7) получим $\mu_m = (\mu^* + \varepsilon)[24AC(\mu^* + \varepsilon)]^{-1}$. Поскольку константа $C(\mu^* + \varepsilon) < C^*$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, то при малом ε $\mu_m + m > \mu^\circ$, а с другой стороны $\mu_m + m \in M$, что абсурдно. Таким образом, $\mu^\circ \geqslant \mu$, что и требовалось доказать.

Чтобы применить предложение 7.2 к асимптотике вихря, преобразуем (1.3). По теореме 6.1

$$|v(z)| < C_0 r^{-1}, \; |u(z)| < C_1 r^{-1/2} e^{\lambda(x-r)} + C_0 r^{-1}$$

Применяя еще предложение (6.1) и легко устанавливаемые неравенства

$$\left|\frac{\partial l_0(z)}{\partial x}\right| < C_2 \left|1 - \frac{x}{r}\right| e^{\lambda(x-r)} \frac{\sqrt{r}+1}{r}, \quad \left|\frac{\partial l_0(z)}{\partial y}\right| < C_2 \frac{|y|}{r} e^{\lambda(x-r)} \frac{\sqrt{r}+1}{r} \tag{7.9}$$

получим

$$|\omega(\zeta)| < |j_0| + A_0\left(\frac{|\omega(z)|}{r}\right) * L_0(\zeta - z) + C_3 [r^{-3/2} e^{\lambda(x-r)}] * L_1(\zeta - z)$$

$$L_0(z) = \frac{\sqrt{r}+1}{r}\left[\frac{|y|}{r} + \left|1 - \frac{x}{r}\right|\right] e^{\lambda(x-r)}, \quad L_1(z) = \frac{\sqrt{r}+1}{r}\left|1 - \frac{x}{r}\right| e^{\lambda(x-r)}$$

Переходя к эллиптическим координатам, так же как и при доказательстве леммы 2.3, нетрудно показать, что

$$[r^{-3/2} e^{\lambda(x-r)}] * L_1(\zeta - z) < C\left[\frac{\log \lambda\rho}{(\lambda\rho)^{1/2}}\left(\frac{1}{\lambda\rho} + 1 - \frac{\xi}{\rho}\right) + \frac{|\eta|}{\lambda\rho}\right] e^{\lambda(\xi-\rho)} \tag{7.10}$$

Поэтому из (1.4), (7.9) и (7.10) вытекает

$$|\omega(\zeta)| < C_\mu \frac{e^{\mu(\xi-\rho)}}{\rho} + A_\mu\left[\frac{|\omega(z)|}{r}\right] * L(\zeta - z)$$

$$\mu = \lambda - \varepsilon, \qquad L(z) = \frac{1}{r} e^{\mu(x-r)}, \qquad \varepsilon > 0$$

Здесь ε — произвольное количество. Полагая

$$\psi(z) = C_\mu^{-1}|\omega(z)|, \quad \text{если } z \in G \qquad \psi = 0, \quad \text{если } z \in S$$

получим для $\psi(z)$ неравенство (7.2), а в силу (6.4)

$$\psi(z) < Cr^{-\gamma}, \qquad \gamma < 1$$

Стало быть, из предложения 7.2 выходит следующее основное неравенство:

$$|\omega(z)| < \frac{C}{r^{\varkappa}} e^{(\lambda-\varepsilon)(x-r)} \tag{7.11}$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно и мало, а $\varkappa < 1$. Константа C зависит от λ, ε и $\varkappa$.

§ 8. Уточним асимптотическую формулу для вихря. Из (6.3) можно получить два члена асимптотики функции $\omega(z)$, но с остатком $O(\rho^{-7/4+\varepsilon})$, в то же время, зная, что остаток должен экспоненциально убывать вне следа. Не желая приводить долгих вычислений, ограничимся наиболее простым случаем, когда будет браться лишь первый член асимптотики.

Лемма 8.1. Пусть выполнены условия леммы 4.1 и сверх того

$$L(z) \equiv L^{(1)}(z), \quad |\varphi(z)| < (|\log r| + 1)^{\beta_0} r^{-\beta} e^{\mu(x-z)}$$

Тогда

$$J(\zeta) = A_0 L(\zeta) + O(\Omega(\zeta) e^{\mu_0(x-z)}) \qquad (\mu_0 < \mu) \tag{8.1}$$

Здесь $\Omega(\zeta)$ дается выражением (4.1), в котором $\gamma_1 = 1/2$, $\gamma_2 = 1$.

Доказательство леммы 8.1 дословно повторяет доказательство леммы 4.1.

Из (1.6), (7.9) и (7.10) имеем

$$\omega(\zeta) = j_0 + \frac{\lambda}{\pi}\int_G \omega v \frac{\partial l_0(\zeta - z)}{\partial y}\, dxdy + O\left(\frac{\log\rho}{\rho^{3/2}} e^{\mu(\xi-\rho)}\right)$$

$$(\mu < \lambda)$$

Применяя лемму 8.1 в силу (7.11) и учитывая, что

$$j_0 = A_1 \frac{\eta}{\rho^{3/2}} e^{\lambda(\xi-\rho)} + O(\rho^{-3/2} e^{\mu(\xi-\rho)})$$

получим

$$\omega(\zeta) = A\frac{\eta}{\rho^{3/2}} e^{\lambda(\xi-\rho)} + e^{\mu(\xi-\rho)} O\left(\frac{\log\rho}{\rho^{3/2}} + \rho^{-1/2-\varkappa}\right)$$

Отсюда выходит, что в (7.11) можно принять $\varkappa = 1$. А стало быть, повторяя приведенное рассуждение с $\varkappa = 1$ и учитывая, что на основании (6.3) $A = \lambda a_{1/2}$, найдем

$$\omega(\zeta) = \lambda a_{1/2} \frac{\eta}{\rho^{3/2}} e^{\lambda(\xi-\rho)} + e^{\mu(\xi-\rho)} O\left(\frac{\log\rho}{\rho^{3/2}}\right) \tag{8.2}$$

Теорема 8.1. В условиях теоремы 7.1 имеет место соотношение (8.2), в котором μ — любое количество меньше λ.

Если буквально повторить рассуждения § 6, то получим следующие асимптотические формулы для $\partial\omega/\partial\bar\zeta$, $\partial\omega/\partial\zeta$:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar\zeta} = \frac{\partial\omega_1}{\partial\bar\zeta} + e^{\mu(\xi-\rho)} O\left(\frac{\log\rho}{\rho^2}\right), \quad \frac{\partial\omega}{\partial\zeta} = \frac{\partial\omega_1}{\partial\zeta} + e^{\mu(\xi-\rho)} O\left(\frac{\log\rho}{\rho^2}\right) \tag{8.3}$$

где ω_1 — главный член в (8.2).

§ 9. Пусть X, Y — проекции на оси x, y силы, испытываемой телом. Несложные вычисления дают

$$X + iY = -2\pi i\rho b_1 \tag{9.1}$$

Обозначим через Γ предел циркуляции скорости по контуру C, когда он устремляется в ∞. Легко показать, что

$$\operatorname{Re} b_1 = \frac{1}{2\pi}\Gamma \tag{9.2}$$

Теорема 9.1. В условиях теоремы 6.1 для подъемной силы имеет место формула

$$Y = -\rho u_\infty \Gamma \tag{9.3}$$

Эта теорема является распространением теоремы Жуковского на случай вязкой жидкости. Без строгого доказательства эта теорема была получена Файлоном еще в 1926 году.

Поступила 10 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Filon L. N. G. The forces on a cylinder in a stream of viscous fluid. Proc. Roy Soc. A, 1926, vol. 113, pp. 7—27.
2. Filon L. N. G. On the second approximation to the «Oseen» solution for the motion of a viscous fluid. Philos. Trans. Roy. Soc. London, A, 1928, vol. 227, pp. 93—135.
3. Goldstein S. On the two-dimensional study flow of a viscous fluid behind a solid body-I. Proc. Roy. Soc. A, 1933, vol. 142, pp. 545—562.
4. Goldstein S. On the fwo-dimensional study flow of a viscous fluid behind a solid body-II. Proc. Roy. Soc. A, 1933, vol. 142. pp. 563—573.
5. Imai I. On the asymptotic behaviour of viscous fluid flow at a great distans from a cylindrical body, with special reference to Filon's paradox. Proc. Roy. Soc. A, 1951, vol. 208, No. 1095, pp. 487—516.
6. Smith D. R. Estimates at infinity for stationary solutions of the Navier — Stokes eguations in twodimensions. Arch. Rath. Mech. Anal. 1965, vol. 20, No. 5.
7. Finn R, Smith D. R. On the linearized hydrodynamical eguations in two dimensions. Arch. Rath. Mech. Anal., 1967, vol. 25, No. 1, pp. 1—25.