Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

# АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Э. Н. Потетюнко, Л. С. Срубщик

(Ростов-на-Дону)

При больших числах Рейнольдса строятся асимптотические разложения решения задачи Коши — Пуассона о волновом движении вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины. Дается обоснование асимптотики. Приводятся примеры плоских и пространственных движений, в которых определяется асимптотическое разложение вида свободной поверхности.

В случае плоского движения Л. Н. Сретенский [1] методом интегральных преобразований получил решение этой задачи в замкнутой форме и исследовал ее в некоторых частных случаях. Тем же методом задача решалась в других работах, обсуждение которых проведено в [2].

Н. Н. Моисеев для решения этой и ряда других задач предложил асимптотический метод [3-7].

Теоремы существования и единственности решений нестационарных линеаризованных уравнений Навье — Стокса для движения вязкой жидкости со свободной поверхностью в открытом сосуде без учета и при наличии поверхностного натяжения были получены С. Г. Крейном, Г. И. Лаптевым, Н. Д. Копачевским [8-10].

В этой работе тоже предлагается асимптотический метод, но применяемый способ вскрытия асимптотики приводит к более простым и удобным для численного анализа выражениям, чем в [1,3].

В § 2 строятся асимптотические разложения решения при больших числах Рейнольдса с любой наперед заданной степенью точности. Построение асимптотики проводится методом М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [11]. При этом первый и второй итерационные процессы применяются к уравнениям и краевым условиям одновременно, благодаря чему исходная система на каждом этапе распадается на две самостоятельные задачи для потенциальной и вихревой частей движения.

В § 3 дано обоснование метода и найдена оценка погрешностей асимптотических разложений в пространствах с энергетической нормой.

В § 4 рассмотрены примеры плоских и пространственных движений жидкости, возникающих от действия нормального поверхностного напряжения и начального возвышения свободной поверхности. Найдено несколько первых членов асимптотического разложения возвышения свободной поверхности.

**§ 1. К постановке задачи.** Рассматривается задача Коши — Пуассона для линеаризованных уравнений Навье — Стокса о движении вязкой несжимаемой жидкости в полупространстве со свободной границей

$$\partial \mathbf{v}/\partial t = -\nabla p + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad p = p_r + \rho g z \tag{1.1}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}, \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = 0, \quad \zeta = \zeta_*(x, y) \quad \text{при } t = 0 \tag{1.2}$$

$$-p + \lambda\zeta + 2\varepsilon^2 \partial v_z/\partial z = -p_*(x, y, t), \quad \partial\zeta/\partial t = v_z \quad \text{при } z = 0 \tag{1.3}$$

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = T_1(x, y, t), \quad \varepsilon^2\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) = T_2(x, y, t)$$

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{F} r^{1+\delta} = 0, \quad \delta \geqslant 1/2 \ (\text{в случае плоского движения } \delta \geqslant -1/2)$$

$$\mathbf{F} \equiv \{\mathbf{v}, \partial\mathbf{v}/\partial x, \partial\mathbf{v}/\partial y, \partial\mathbf{v}/\partial z, p, \zeta_*, T_1, T_2, p_*, \mathbf{a}\}, \ r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \tag{1.4}$$

Величины в (1.1) — (1.4) — безразмерные. С размерными (последние отмечены штрихом) они связаны соотношениями

$$x' = \alpha x, \quad y' = \alpha y, \quad z' = \alpha z, \quad \zeta' = \alpha\zeta, \quad \zeta_*' = \alpha\zeta_*, \quad t' = \beta t$$

$$\mathbf{a}' = \frac{\alpha}{\beta}\mathbf{a}, \quad \mathbf{v}' = \frac{\alpha}{\beta}\mathbf{v}, \quad p' = \rho\frac{\alpha^2}{\beta^2}p, \ p_r' = \rho\frac{\alpha^2}{\beta^2}p_r, \quad p_*' = \rho\frac{\alpha^2}{\beta^2}p_*$$

$$T_{1,2}' = \rho\frac{\alpha^2}{\beta^2}T_{1,2} \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{R} \quad R = \frac{\alpha^2}{\nu\beta}, \quad \lambda = \frac{1}{F}, \quad F = \frac{\alpha}{g\beta^2}$$

Здесь $\mathbf{v}'$ — вектор скорости, $p_r'$ — гидродинамическое давление, $\zeta'$ — возвышение свободной поверхности, $\alpha$ — единица длины, $\beta$ — единица времени, $\nu$ — кинематический коэффициент вязкости, $\rho$ — плотность жидкости, $g$ — ускорение силы тяжести, $R$ — число Рейнольдса, $F$ — число Фруда. Начало координат взято на невозмущенной поверхности, ось $Oz$ направлена вертикально вверх. Жидкость приводится в движение начальным возвышением свободной поверхности $\zeta_*'$, внешним поверхностным напряжением $\mathbf{p}_n' \equiv \{p_*', T_1', T_2'\}$ и начальным потенциальным полем скоростей $\mathbf{a}'$.

**§ 2. Построение асимптотики.** Асимптотические разложения решения задачи (1.1) — (1.4) при $\varepsilon \to 0$ строятся в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i\mathbf{v}_i + \sum_{i=-1}^{k} \varepsilon^i\mathbf{g}_i + \mathbf{u}, \qquad p = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i p_i + \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i h_i + q$$

$$\zeta = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i\zeta_i + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^{i+1}\theta_i + \eta, \quad \frac{\partial\zeta_i}{\partial t} = v_{iz}, \qquad \frac{\partial\theta_i}{\partial t} = g_{iz} \tag{2.1}$$

$$\partial\eta/\partial t = u_z, \quad z = 0, \quad \zeta_0 = \zeta_*, \ \zeta_{i+2} = \theta_i = \eta = 0, \ t = 0 \ (i = -1, 0, 1 \ldots)$$

Здесь

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(x, y, z, t), \ p_i = p_i(x, y, z, t), \ \zeta_i = \zeta_i(x, y, t)$$

получаются в результате первого итерационального процесса [11]. Именно, обозначая левую часть через $\mathbf{P}$, потребуем, чтобы

$$\mathbf{P}(\mathbf{V}_k) = O(\varepsilon^k), \qquad \mathbf{V}_k = \left\{\sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i\mathbf{v}_i, \ \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i p_i\right\}$$

Последовательно приравнивая нулю коэффициенты при $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots \varepsilon^k$, для определения $\mathbf{v}_0, p_0, \zeta_0$ получаем систему

$$\partial\mathbf{v}_0/\partial t = -\nabla p_0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v}_0 = 0$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{a}, \ \zeta_0 = \zeta_*, \ t = 0; \ \mathbf{v}_0, \ \partial\mathbf{v}_0/\partial x, \ \partial\mathbf{v}_0/\partial y \to 0, \ x^2 + y^2 \to \infty \tag{2.2}$$

$$\partial\zeta_0/\partial t = v_{0z}, \quad -p_0 + \lambda\zeta_0 = -p_* - \lambda\theta_{-1}, \ z = 0; \ \mathbf{v}_0 \to 0, \ z \to -\infty$$

а для определения $\mathbf{v}_i, p_i$ $(i \geqslant 1)$ — систему

$$\partial\mathbf{v}_i/\partial t = -\nabla p_i + \Delta\mathbf{v}_{i-2}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_i = 0; \ \mathbf{v}_i = 0, \ \zeta_i = 0, \ t = 0; \quad \mathbf{v}_i, \ \partial\mathbf{v}_i/\partial x$$

$$\partial\mathbf{v}_i/\partial y \to 0, \ x^2 + y^2 \to \infty \quad (\mathbf{v}_{-1} \equiv 0) \tag{2.3}$$

$$\partial\zeta_i/\partial t = v_{iz}, \ -p_i + \lambda\zeta_i = -2\partial v_{i-2,z}/\partial z - \lambda\theta_{i-1} - 2\partial g_{i-2,z}/\partial s$$

$$z = 0; \quad v_i \to 0, \quad z \to -\infty$$

Функция $\theta_{-1}$ в (2.2) представляет собой толщину вытеснения, хорошо известную в теории пограничного слоя [12].

Выражения $\Delta v_{i-2} (i \geqslant 2)$ в (2.3) равны нулю. Для $\Delta v_0$ это следует из условия потенциальности вектора **a** и первых двух уравнений в (2.2). Для остальных это вытекает из первых трех уравнений в (2.3).

Векторы $g_i (x, y, z, t, \varepsilon) = \{g_{ix}, g_{iy}, \varepsilon g_{iz}\}$ и функции $\theta_i (x, y, t, \varepsilon)$, $h_i (x, y, z, t, \varepsilon)$ находятся при помощи второго итерационного процесса [11] и компенсируют невязки для $v_i$, $\zeta_i$, $h_i$ при выполнении граничных условий (1.3). Именно решение разыскивается в виде

$$
\begin{gathered}
v \sim \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i v_i + \sum_{i=-1}^{k} \varepsilon^i g_i, \qquad p \sim \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i p_i + \sum_{i=-1}^{k} \varepsilon^i h_i \\
\zeta \sim \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \zeta_i + \sum_{i=-1}^{k} \varepsilon^{i+1} \theta_i, \qquad g_i = \{g_{ix}, g_{iy}, \varepsilon g_{iz}\}
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Подставляем (2.4) в (1.1) — (1.4), учитываем (2.2), (2.3), а затем полагаем $z = \varepsilon s$ и приравниваем нулю коэффициенты при $\varepsilon^{-1}, \varepsilon^0, \ldots, \varepsilon^k$. В результате для определения $g_i$, $h_i$ получаем систему уравнений

$$
\begin{gathered}
Lg_{ix} = -\frac{\partial h_i}{\partial x}, \quad Lg_{iy} = -\frac{\partial h_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial g_{iz}}{\partial s} = -\frac{\partial g_{ix}}{\partial x} - \frac{\partial g_{iy}}{\partial y} \\
Lf_i \equiv \frac{\partial f_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial s^2} - \Delta_1 f_{i-2}, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (i = -1, 0, \ldots k) \\
\frac{\partial h_{m+2}}{\partial s} = -Lg_{mz} \quad (m = -3, -2, \ldots k) \quad (g_{-5}, g_{-4}, g_{-3}, g_{-2} = 0)
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

с краевыми условиями на бесконечности

$$
g \to 0, \quad h_i \to 0; \quad s \to -\infty \tag{2.6}
$$

вытекающими из требования, чтобы векторы $g_i$ и функции $h_i$ носили характер пограничного слоя. Можно показать, что все $h_m \equiv 0$.

Для $h_{-1}$, $h_0$ это непосредственно следует из последнего уравнения в (2.5) и (2.6). Для остальных $h_m$ воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что $h_m = 0$. Покажем, что $h_{m+2} \equiv 0$. Продифференцируем последнее уравнение в (2.5) по $s$ и воспользуемся третьим уравнением при $i = m$. В силу первых двух уравнений в (2.5), а также (2.6) выводим, что $h_{m+2} \equiv 0$. Теперь из (2.5) для определения $g_i$ и $\theta_i$ выводим

$$
\begin{gathered}
Lg_{ix} = 0, \quad Lg_{iy} = 0, \quad \frac{\partial g_{iz}}{\partial s} = -\frac{\partial g_{ix}}{\partial x} - \frac{\partial g_{iy}}{\partial y} \\
Lf_i \equiv \frac{\partial f_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial s^2} - \Delta_1 f_{i-2}, \quad \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = g_{iz}, \; s = 0 \\
\theta_i = 0, t = 0 \quad (i = -1, 0, 1, \ldots k) \quad (g_{-3}, g_{-2} = 0)
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

с начальными и краевыми условиями

$$g_i = 0, \quad t = 0, \quad g_i \to 0, \quad s \to -\infty \quad (i = -1, 0, 1, \ldots k) \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial g_{-1x}}{\partial s} = T_1(x, y, t), \quad \frac{\partial g_{-1y}}{\partial s} = T_2(x, y, t), \quad s = 0 \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial g_{ix}}{\partial s} = -\frac{\partial v_{i-1x}}{\partial z} - \frac{\partial v_{i-1z}}{\partial x} - \frac{\partial g_{i-2z}}{\partial x} \equiv A_{1i} \quad (i = 0, 1, \ldots k)$$

$$(s = 0) \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial g_{iy}}{\partial s} = -\frac{\partial v_{i-1y}}{\partial z} - \frac{\partial v_{i-1z}}{\partial y} - \frac{\partial g_{i-2z}}{\partial y} \equiv A_{2i} \; (\mathrm{v}_{-1} = g_{-2} = 0)$$

Краевые задачи (2.2), (2.3), (2.7) — (2.10) решаем применением интегральных преобразований Фурье по координатам $x$, $y$ и Лапласа по времени $t$ [13]. В частности, для первых пяти членов асимптотического разложения возвышения свободной поверхности имеем

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \cdots + \varepsilon^4\xi_4, \quad \xi_i = \zeta_i + \theta_{i-1} \tag{2.11}$$

$$L\Phi\xi = L\Phi\xi_0 + \varepsilon L\Phi\xi_1 + \cdots + \varepsilon^4 L\Phi\xi_4, \quad L\Phi\xi_i = L\Phi\zeta_i + L\Phi\theta_{i-1}$$

$$L\Phi\xi = \Phi\zeta_* \left[\frac{\sigma}{\sigma^2 + a\lambda} + \frac{\lambda}{\sigma}\chi\right] + L\Phi p_* \left[-\frac{a}{\sigma^2 + a\lambda} + \chi\right] + \Phi a_{*z}\left[\frac{1}{\sigma^2 + a\lambda} - \frac{1}{a}\chi\right] -$$

$$- L\Phi\left(\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y}\right)\left\{\frac{1}{(\sigma^2 + a\lambda)} - \varepsilon\frac{2a}{\sqrt{\sigma}(\sigma^2 + a\lambda)} + \varepsilon^2\left[\frac{2a^2}{\sigma(\sigma^2 + a\lambda)} - \frac{4a^2\sigma}{(\sigma^2 + a\lambda)^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^3\left[\frac{12a^3\sqrt{\sigma}}{(\sigma^2 + a\lambda)^2} - \frac{a^3}{\sigma^{3/2}(\sigma^2 + a\lambda)}\right] + \varepsilon^4\left[\frac{4a^4(3\sigma^2 - a\lambda)}{(\sigma^2 + a\lambda)^3} - \frac{16a^4}{(\sigma^2 + a\lambda)^2}\right]\right\}$$

$$\chi = \varepsilon^2\frac{4a^3\sigma}{(\sigma^2 + a\lambda)^2} - \varepsilon^3\frac{4a^4\sqrt{\sigma}}{(\sigma^2 + a\lambda)^2} - \varepsilon^4\frac{4a^5(3\sigma^2 - a\lambda)}{(\sigma^2 + a\lambda)^3} \tag{2.12}$$

$$L\Phi f = \int_0^\infty \Phi f e^{-\sigma t} dt, \quad \Phi f = \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy, \quad a = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

Оригиналы $L$-изображений функции $\Phi\xi$ отыскиваем, пользуясь теоремой о свертках и таблицами [14]. Применив формулу обращения для преобразования Фурье, получим интегральное представление функции $\xi$.

Отметим, что формулы (2.12) можно получить другим способом [15]. Для этого метод интегральных преобразований следует применить непосредственно к (1.1) — (1.4) и трансформанту $L\Phi\xi$ разложить в ряд по $\varepsilon$.

*Замечание* 2.1. В случае отсутствия касательных напряжений функция $\theta_{-1}$ равна нулю и для определения $\mathrm{v}_0$, $p_0$, $\zeta_0$ получаем известную задачу для безвихревого движения [16].

*Замечание* 2.2. Неравенство нулю касательных напряжений на свободной поверхности приводит к тому факту, что $g_{-1} \neq 0$ и составляюшие вектора скорости $\varepsilon^{-1}g_{-1x}$, $\varepsilon^{-1}g_{-1y}$ безгранично возрастают на свободной поверхности $z = 0$, когда $\varepsilon \to 0$. Физически это объясняется тем, что идеальная жидкость не воспринимает сдвигающих усилий. В то же время соответствующий вклад погранслоя в возвышение свободной поверхности остается конечным (см. (2.12)). Асимптотические разложения для вида свободной поверхности имеют отличные от нуля коэффициенты при всех целых неотрицательных степенях $\varepsilon$. В случае отсутствия касательных напряжений коэффициент при $\varepsilon$ равен нулю, но уже коэффициенты при $\varepsilon^2$, $\varepsilon^3$ и т. д. отличны от нуля (см. (2.12)).

*Замечание* 2.3. Метод построения асимптотики описан в случае пространственной задачи. Очевидно, что в плоском случае все рассуждения аналогичны и для получения соответствующих формул надо положить равным нулю все производные по $y$, а также считать, что $v_y$, $v_{iy}$, $g_{iy} = 0$ $(i = -1, 0, \ldots k)$.

*Замечание* 2.4. Изложенный метод построения асимптотических разложений переносится на случай волновых движений жидкости в слое или в сосуде произвольной формы.

**§ 3. Обоснование асимптотических разложений (3.1).** Введем банаховы пространства $L_2(E)$ функций $f(\omega)$, $\omega = \{x, y, z\}$, определенных в полупространстве $E$ ($z \leqslant 0$) и $L_2(\Gamma)$ функций $\varphi(\gamma)$, $\gamma = \{x, y, 0\}$, определенных на плоскости $\Gamma$ ($z = 0$) с конечной нормой

$$L_2(E) \quad \|f\|_E^2 = \int_E f^2 d\omega, \qquad L_2(\Gamma) \quad \|\varphi\|_\Gamma^2 = \int_\Gamma \varphi^2 d\gamma \tag{3.1}$$

Определим далее банахово пространство $H$ вектор-функций $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$ с конечной нормой

$$(H) \qquad \|\mathbf{u}\|_H^2 = \|u_x\|^2 + \|u_y\|^2 + \|u_z\|^2 \tag{3.2}$$

Кроме того, введем банахово пространство $H_1$ вектор-функций $\mathbf{u}$, исчезающих на бесконечности и имеющих суммируемые с квадратом по полупространству $E$ первые обобщенные производные с конечной нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{H_1}^2 = \int_E (|\nabla u_x|^2 + |\nabla u_y|^2 + |\nabla u_z|^2)\, d\omega \tag{3.3}$$

Следуя [9], введем обозначение

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_E \Big[ & 2\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial v_x}{\partial x} + 2\frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial v_y}{\partial y} + 2\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \\ & + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) + \\ & + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\Big] d\omega\end{aligned} \tag{3.4}$$

Для вектор-функций $\mathbf{u} \in H_1$ справедливо неравенство Корна [9,17]

$$\|\mathbf{u}\|_{H_1}^2 \leqslant c\mathbf{E}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \tag{3.5}$$

Здесь $c$ — некоторая положительная постоянная. Далее будет использована формула Грина для уравнений Навье — Стокса [9,18], справедливая для соленоидальных векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned}\int_E (-\varepsilon^2\Delta\mathbf{u} + \nabla p)\,\mathbf{v}\,d\omega = \varepsilon^2\mathbf{E}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_\Gamma \Big[ & \varepsilon^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)v_x + \\ & + \varepsilon^2\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)v_y + \left(-p + 2\varepsilon^2\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)v_z\Big] d\gamma\end{aligned} \tag{3.6}$$

Подставим значения $\mathbf{u}$, $q$, $\eta$ из (2.1) в левую часть системы (1.1) — (1.4). Используя (2.2), (2.3) и (2.7) — (2.10), получим

$$\begin{aligned}& \partial\mathbf{u}/\partial t + \nabla q - \varepsilon^2\Delta\mathbf{u} = \varepsilon^{k+1}\mathbf{f}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \\ & \eta = 0, \quad \mathbf{u} = 0, \quad t = 0; \qquad \mathbf{u},\ \partial\mathbf{u}/\partial x,\ \partial\mathbf{u}/\partial y \to 0, \quad x^2 + y^2 \to \infty \\ & \varepsilon^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = \varepsilon^{k+2}\varphi_1, \quad \varepsilon^2\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) = \varepsilon^{k+2}\varphi_2, \quad \frac{\partial\eta}{\partial t} = u_z \\ & -q + \lambda\eta + 2\varepsilon^2\frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon^{k+1}\varphi_3, \quad z = 0; \qquad \mathbf{u} \to 0; \quad z \to -\infty\end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь

$$\mathbf{f} \equiv \{f_x, f_y, f_z\}, \quad -f_x = \Delta_1 g_{k-1x} + \varepsilon\Delta_1 g_{kx}, \quad -f_y = \Delta_1 g_{k-1y} + \varepsilon\Delta_1 g_{ky}$$

$$f_z = -\varepsilon(\Delta_1 g_{k-1z} + \varepsilon\Delta_1 g_{kz}), \qquad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{3.8}$$

$$\varphi_1(x, y, t) = \left[\varepsilon\frac{\partial g_{kz}}{\partial x} - \frac{\partial g_{k+1x}}{\partial s}\right]_{z=0}, \quad \varphi_2(x, y, t) = \left[\varepsilon\frac{\partial g_{kz}}{\partial y} - \frac{\partial g_{k+1y}}{\partial s}\right]_{z=0}$$

$$\varphi_3(x, y, t) = \lambda\theta_k + 2[R_{k-1} + \varepsilon R_k]_{z=0}, \quad R_k = -\frac{\partial v_{kz}}{\partial z} + \frac{\partial g_{kz}}{\partial s}$$

*Теорема* 3.1. Пусть вектор-функция $\mathbf{f}$ и ее любые производные по $x$ и $y$ до $j$-го порядка ($j$ достаточно большое число) принадлежат пространству $H$, а функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ вместе со своими производными до $j$-го порядка — пространству $L_2(\Gamma)$. Тогда для решения задачи (3.7), (3.8) справедливы оценки

$$\|D^l\mathbf{u}\|_H \leqslant C_l\varepsilon^k, \quad \|D^l\eta\|_\Gamma \leqslant C_l\lambda^{-1/2}\varepsilon^k \quad (l = 0, 1, \ldots j)$$

$$\max\nolimits_\Gamma |D^\alpha\eta| \leqslant M_\alpha\varepsilon^k \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots l-2) \tag{3.9}$$

$$C_l = \left(c\int_0^t m_l^2(\tau)\,d\tau\right)^{1/2} + 2\varepsilon\int_0^t n_l(\tau)\,d\tau, \quad n_l = m_l + \|D^l\mathbf{f}\|_H$$

$$m_l = \sqrt{3}\max\{\varepsilon\|D^l\varphi_1\|_\Gamma, \varepsilon\|D^l\varphi_2\|_\Gamma, \|\varphi_3\|_\Gamma\}$$

(Здесь и всюду в дальнейшем под $D_\varphi^l$ понимается любая смешанная производная по $x$ и $y$ порядка $l$ от функции $\varphi(x, y, z)$.)

*Доказательство*. Сначала отметим простое неравенство, справедливое для функций $w$ таких, что $w \to 0$ при $z \to -\infty$

$$\|w\|_\Gamma \leqslant \|w\|_E + \left\|\frac{\partial w}{\partial z}\right\|_E \tag{3.10}$$

справедливость которого следует из соотношений

$$\int_\Gamma w^2 d\gamma = 2\int_\Gamma\int_{-\infty}^0 w\frac{\partial w}{\partial z}dz\,d\gamma = 2\int_E w\frac{\partial w}{\partial z}\,d\omega \leqslant 2\|w\|_E\left\|\frac{\partial w}{\partial z}\right\|_E \leqslant \|w\|_E^2 + \left\|\frac{\partial w}{\partial z}\right\|_E^2$$

Теперь умножим первое уравнение (3.7) на $\mathbf{u}$, проинтегрируем по области $E$ с учетом (3.7) и формулы Грина, положив в ней предварительно $\mathbf{v} = \mathbf{u}$. Получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|\mathbf{u}\|_H^2 + \lambda\|\eta\|_\Gamma^2] + \varepsilon^2\ E(\mathbf{u}, \mathbf{u}) =$$

$$= \varepsilon^{k+1}\int_E \mathbf{fu}\,d\omega + \varepsilon^{k+1}\int_\Gamma[\varepsilon(\varphi_1 u_x + \varphi_2 u_y) + \varphi_3 u_z]\,d\gamma \tag{3.11}$$

Применяя к левой части (3.11) неравенство Корна (3.5), а к правой сначала неравенство Коши — Буняковского, затем (3.10), а также очевидные неравенства

$$\varepsilon^{k+1}m_0\left\|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}\right\|_H \leqslant \varepsilon^{k+1}m_0\|\mathbf{u}\|_{H_1} \leqslant \frac{c}{2}\varepsilon^{2k}m_0^2 + \frac{\varepsilon^2}{2c}\|\mathbf{u}\|_{H_1}^2$$

выводим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|\mathbf{u}\|_H^2 + \lambda\|\eta\|_\Gamma^2] + \frac{\varepsilon^2}{2c}\|\mathbf{u}\|_{H_1}^2 \leqslant \varepsilon^{k+1}n_0\|\mathbf{u}\|_H + \frac{c}{2}\varepsilon^{2k}m_0^2 \tag{3.12}$$

$$n_0 = m_0 + \|\mathbf{f}\|, \quad m_0 = \sqrt{3}\max\{\varepsilon\|\varphi_1\|_\Gamma, \quad \varepsilon\|\varphi_2\|_\Gamma, \quad \|\varphi_3\|_\Gamma\}$$

Используя неравенство

$$\|\mathbf{u}\|_H + \sqrt{\lambda}\,\|\eta\|_\Gamma \leqslant \sqrt{2}\,Z, \qquad Z^2(t) = \|\mathbf{u}\|_H{}^2 + \lambda\,\|\eta\|_\Gamma{}^2$$

из (3.12) при помощи (3.7) выводим

$$dZ^2/dt \leqslant 4n_0\varepsilon^{k+1}Z + c\varepsilon^{2k}m_0{}^2, \qquad Z(0) = 0$$

Отсюда при помощи приема, предложенного в [19], (стр. 565, 566), получаем

$$Z(t) \leqslant 2\varepsilon^{k+1}\int_0^t n_0(\tau)\,d\tau + \varepsilon^k c^{1/2}\left\{\int_0^t m_0{}^2(\tau)\,d\tau\right\}^{1/2} \tag{3.13}$$

Тогда первые две оценки в (3.9) при $l = 0$ следуют из (3.13). Чтобы получить оценки (3.9) для производных, надо продифференцировать по $x$ и $y$ соответствующее число раз уравнения (3.7), (3.8) и повторить точно те же рассуждения, что и при выводе (3.13). Нетрудно видеть, что теперь в формулах вместо $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ и $\mathbf{f}$ будут присутствовать их производные того же порядка, что и в левой части. Третья оценка следует из второй при помощи простых неравенств. Например, в случае плоской задачи при $\alpha = 0$ имеем

$$\max_x |\eta(x,t)| \leqslant \left(2\int_{-\infty}^{x} \eta\frac{\partial\eta}{\partial x}\,dx\right)^{1/2} \leqslant \left[2\int_{-\infty}^{\infty}\eta^2 dx \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant (2C_0C_1\lambda^{-1})^{1/2}\varepsilon^k = M_0\varepsilon^k \tag{3.13'}$$

Заметим, что функции $C_l(t)$, $M_\alpha(t)$ в оценках (3.9) зависят в силу (3.8) от функций, определяемых в результате итерационных процессов.

Для любого конечного интервала времени $0 < t < t_0$ можно сразу получить оценки типа (3.9) через входные данные задачи $\zeta_*$, $p_*$, $\mathbf{a}$, $T_1$, $T_2$, степенным образом зависящие от $t_0$.

*Лемма* 3.1. Пусть существует такая постоянная $N_1$, что

$$\|D^\alpha T_r\|_\Gamma \leqslant N_1\,(r = 1, 2;\ 0 < t < t_0;\ \alpha = 0, 1, \ldots, j_1),\ t_0 > 1 \tag{3.14}$$

Тогда для решения задачи (2.7)—(2.9) при $i = -1$ на интервале $(0, t_0)$ справедливы оценки

$$\|D^\alpha \mathbf{g}_{-1}\|_H \leqslant K_1\varepsilon^{1/2},\ \{\|D^\alpha g_{-1z}\|_\Gamma,\ \left\|D^\alpha\frac{\partial g_{-1z}}{\partial s}\right\|_3,\ \|D^\alpha\theta_{-1}\|_\Gamma\} \leqslant K_2$$

$$\left\{\left\|D^\alpha\frac{\partial \mathbf{g}_{-1}}{\partial s}\right\|_H,\ \left\|D^\alpha\frac{\partial^2 g_{-1z}}{\partial s^2}\right\|_E\right\} \leqslant K_3\varepsilon^{1/2} \tag{3.15}$$

Здесь постоянные $K_i$ пропорциональны $N_1$.

*Доказательство.* Из (2.7) — (2.9) для $g_{-1x}$ получаем

$$g_{-} = \int_0^t G(s, t-\tau)\,T_1(x, y, \tau)\,d\tau,\quad G(s, u) = \frac{-1}{\sqrt{\pi u}}\,e^{-s^2/4u} \tag{3.16}$$

Отсюда выводим

$$\|D^\alpha g_{-1x}\|_E{}^2 \leqslant \varepsilon N_1{}^2\,[I(-\infty, -1) + I(-1, 0)] \leqslant \varepsilon K_1{}^2 t_0{}^{3/2}$$

$$I(a, b) = \int_a^b\left\{\int_0^t G(s, t-\tau)\,d\tau\right\}^2 ds \qquad (t_0 > 1)$$

Заметим, что каждый из интегралов в квадратных скобках оценивается по отдельности. Далее из (2.7), (2.6) при помощи (3.16) и подобного равенства для $g_{-1y}$ находим

$$D^\alpha \frac{\partial g_{-1z}}{\partial s} = -\int_0^t G(s, t-\tau) D^\alpha \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y}\right) d\tau \qquad (3.17)$$

При помощи (3.14) из (3.17) выводим

$$\| D^\alpha g_{-1z} \|_E^2 \leqslant \varepsilon N_1^2 \int_{-\infty}^0 [I(-\infty, s)]^2 ds$$

Меняя в квадратных скобках порядок интегрирования, вычисляя внутренний интеграл и применяя последовательно очевидные неравенства

$$1 - \Phi\left(\frac{s}{2\sqrt{u}}\right) \leqslant 1 - \Phi\left(\frac{s}{2\sqrt{t}}\right) \equiv \Phi_1, \qquad \Phi_1^2 \leqslant \Phi_1$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy, \qquad 0 < u < t, \qquad -\infty < s \leqslant 0$$

а также формулу 6.281 в [20], приходим к первой оценке из (3.15). Остальные оценки выводятся аналогично.

*Лемма* 3.2. Пусть существуют такие постоянные $N_2$, $N_3$, что [1]

$$\{\sqrt{2}(\| D^\alpha \mathbf{a} \|_H + \sqrt{\lambda} \| D^\alpha \zeta_* \|_\Gamma), \| D^\alpha \mathbf{a} \|_{H_1}\} \leqslant N_2 \quad (\alpha = 0, 1, \ldots j_2)$$

$$\| D^\alpha p_* \|_{W_2^{1/2}(\Gamma)} \leqslant N_3, \qquad \| D^\alpha \theta_{-1} \|_{W_2^{1/2}(\Gamma)} \leqslant N_3 \qquad (3.18)$$

Тогда для решения задачи (2.2) имеют место оценки

$$\| D^\alpha \mathbf{v}_0 \|_{\dot{H}} \leqslant N_2 + K_3 t, \qquad \left\| D^\alpha \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial z} \right\|_H \leqslant K_4 + K_5 t$$

$$\left\| D^\alpha \frac{\partial^2 \mathbf{v}_0}{\partial z^2} \right\|_H \leqslant K_6 + K_7 t \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots j-2) \qquad (3.19)$$

$$\left\{ \left\| D^\alpha \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} \right\|_\Gamma, \left\| D^\alpha \frac{\partial v_{0x}}{\partial z} \right\|_\Gamma, \left\| D^\alpha \frac{\partial v_{0z}}{\partial x} \right\|_\Gamma \right\} \leqslant K_8 + K_9 t$$

Здесь постоянные $K_i$ не зависят от $x$, $y$, $z$, $t$, $\varepsilon$.

*Доказательство*. Продифференцируем уравнения и граничные условия в (2.2) по $x$ и $y$ соответствующее число раз, в зависимости от того, какая производная оценивается. Умножая полученное векторное уравнение на $D^\alpha \mathbf{v}_0$ и интегрируя по области $E$ с учетом граничных условий, находим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\| D^\alpha \mathbf{v}_0 \|_H^2 + \lambda \| D^\alpha \zeta_0 \|_\Gamma^2] = -\int_\Gamma D^\alpha v_{0z} D^\alpha (p_* + \lambda \theta_{-1}) d\gamma \qquad (3.20)$$

По теореме (2.3) в [21] в силу (3.18) функцию $p_* + \lambda\theta_{-1}$ можно продолжить на полупространство $E$ так, что

$$\| \operatorname{grad} D^\alpha (p_* + \lambda\theta_{-1}) \|_H \leqslant D^\alpha (p_* + \lambda\theta_{-1}) \|_{W_2^1(E)} \leqslant c \| D^\alpha (p_* + \lambda\theta_{-1}) \|_{W_2^{1/2}(\Gamma)} \qquad (3.21)$$

Применяя к последнему интегралу в (3.20) теорему Гаусса, неравенство Коши-Буняковского и (3.21), получаем

$$\| D^\alpha \mathbf{v}_0 \|_H + \sqrt{\lambda} \| D^\alpha \zeta_0 \|_\Gamma \leqslant \sqrt{2}(\| D^\alpha \mathbf{a} \|_H + \sqrt{\lambda} \| D^\alpha \zeta_* \|_\Gamma) + c_1 \int_0^t \| D^\alpha (p_* + \lambda\theta_{-1}) \|_{W_2^{1/2}(\Gamma)} d\tau$$

---

[1] Определение пространств $W_2^l$ с нецелым $l$ (см. в § 2 [21]).

Отсюда и следует первая оценка в (3.19). (Заметим, что $\theta_{-1}$ удовлетворяет условиям (3.18) в силу теоремы 2.3 из [21] и третьей группы оценок в (3.15).) Перейдем к доказательству второй оценки в (3.18). Из уравнения дивергенции непосредственно выводим

$$\left\| D^\alpha \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} \right\|_E \leqslant \left\| D^\alpha \frac{\partial v_{0x}}{\partial x} \right\|_E + \left\| D^\alpha \frac{\partial v_{0y}}{\partial y} \right\|_E \tag{3.22}$$

Дифференцируя первую и вторую компоненты векторного уравнения в (2.2) по $z$, а третью по $x$ или $y$, вычитая и интегрируя по $t$, получаем

$$\frac{\partial v_{0x}}{\partial z} - \frac{\partial v_{0z}}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_{0y}}{\partial z} - \frac{\partial v_{0z}}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial y} \tag{3.23}$$

Отсюда при помощи (3.22) и первой оценки в (3.19) находим вторую оценку.

Оценка второй производной $\mathbf{v}_0$ по $z$ выводится из цепочки неравенств, получаемых дифференцированием по $x$, $y$, $z$ уравнения неразрывности и (3.23) с последующим использованием первых двух оценок из (3.19). Последняя оценка вытекает из первых трех при помощи (3.10).

*Лемма* 3.3. Пусть существует такая постоянная $N_3$, что при $0 < t < t_0$

$$\left\| D^\alpha \left( 2 \frac{\partial v_{i-2z}}{\partial z} + \lambda \theta_{i-1} + 2 \frac{\partial g_{i-2z}}{\partial s} \right) \right\|_{W_2^{1/2}(\Gamma)} < N_3 \tag{3.24}$$

Тогда для $\mathbf{v}_i$ имеют место оценки (3.19). Доказательство этой леммы и леммы 3.2 совпадают дословно. Надо только заменить $\mathbf{v}_0$, $p_0$, $\theta_{-1}$, $p_*$ соответственно на $\mathbf{v}_i$, $p_i$, $\theta_{i-1}$, $2\partial/\partial s\,(v_{i-2z} + g_{i-2z})$, а кроме того положить $\mathbf{a} = 0$, $\zeta_* = 0$.

*Лемма* 3.4. Пусть существуют такие постоянные $N_1$, $N_2$, что

$$\{\| D^\alpha A_{ri} \|_\Gamma, \| D^\alpha \mathbf{g}_{i-2} \|_E\} \leqslant N_1 \qquad (r=1,2;\ 0<t<t_0) \tag{3.25}$$

Тогда для $\mathbf{g}_i$ — решений задач (2.7) — (2.9) при $i \geqslant 0$ на интервале $(0, t_0)$ справедливы оценки (3.15).

*Доказательство*. Представим $g_{ix}$ в виде суммы $g_{ix} = w_i + q_i$

$$Lw_i = 0, \quad \frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 q_i}{\partial s^2}; \qquad w_i = q_i = 0, \quad t = 0 \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial s} = 0, \ s=0; \quad \frac{\partial q_i}{\partial s} = A_{1i}; \qquad w_i, \quad q_i \to 0, \quad s \to -\infty$$

Из первого уравнения в (3.26) выводим

$$D^\alpha w_i \|_E \leqslant \int_0^t \| D^\alpha \Delta_1 g_{i-2x} \|_E \, d\tau$$

Оценку для $q_i$ получаем, как и в лемме 3.1. Тогда

$$\| D^\alpha g_{ix} \|_E \leqslant \| D^\alpha w_i \|_E + \| D^\alpha q_i \|_E \leqslant N_1 t_0 + N_1 \varepsilon^{1/2} t_0^{3/4} \tag{3.27}$$

Продифференцируем по $s$ уравнение и начальное условие для $w_1$ в (3.26). Умножая на $\partial w_1 / \partial s$ и интегрируя по области $E$, с учетом (3.15) найдем

$$\left\| D^\alpha \frac{\partial w_1}{\partial s} \right\|_E \leqslant \int_0^t \left\| D^\alpha \Delta_1 \frac{\partial g_{-1x}}{\partial s} \right\|_E d\tau \leqslant \varepsilon^{1/2} K_3 t_0$$

Оценку для $q_1$ получаем, как и в лемме 3.1. Тогда

$$D^\alpha \frac{\partial g_{1x}}{\partial s} \Big\|_E \leqslant \left\| D^\alpha \frac{\partial w_1}{\partial s} \right\|_E + \left\| D^\alpha \frac{\partial q_1}{\partial s} \right\|_E \leqslant \varepsilon^{1/2} K_4 t_0 \tag{3.28}$$

Учитывая (3.25), а также, что $\mathbf{g}_0 = 0$, последовательно получаем такие же оценки для $g_{ix}$ и $g_{iy} (i \geqslant 2)$. Оценку для $\partial g_{iz} / \partial s$ получаем из (3.27) и условия $\operatorname{div} \mathbf{g}_i = 0$. Для оценки второй производной $\partial^2 g_{iz} / \partial s^2$ сначала выписывается уравнение для $\partial g_{iz} / \partial s$ и производится разбиение, аналогичное (3.26). Затем повторяются рассуждения, подобные выводу (3.28).

*Теорема* 3.2. Пусть выполняются условия (3.14) и (3.18), причем $j_1$ и $j_2$ — достаточно большие числа. Тогда для решения задачи (1.1)—(1.4) на любом конечном интервале $(0 < t < t_0)$ при $\varepsilon \to 0$ имеют место асимптотические разложения (2.1), для которых справедливы оценки вида (3.9), где $C_l$ зависят от функций, входящих в начальные и краевые условия задачи (1.1) — (1.4), и их производных по $x$ и $y$. Эта теорема непосредственно следует из теоремы 3.1 и лемм 3.1 — 3.4. Леммы 3.3 и 3.4 позволяют установить нужные оценки для функций, определяемых на $p$-м шаге итерационного процесса в зависимости от функций, определяемых на двух предыдущих шагах. Леммы 3.1 и 3.2. обеспечивают нужные оценки для начальных членов асимптотического разложения (2.1).

**§ 4. Некоторые частные случаи.** 4.1°. Рассмотрим плоское движение жидкости, вызванное начальным возвышением свободной поверхности

$$\zeta_* = \frac{Q}{\pi}\frac{b}{x^2+b^2}, \qquad b>0, \quad b' = \alpha b, \quad Q' = \alpha^2 Q \tag{4.1}$$

Здесь $Q'$ — площадь поднятой жидкости.

1°. Согласно § 2, получаем, что $g_{-1} = 0$, $\theta_{-1} = 0$. Тогда для определения $v_0$, $p_0$, $\zeta_0$ приходим к задаче о движении идеальной жидкости под действием начального возвышения свободной поверхности $\zeta_*$.

Вычислим $\Phi\zeta_*$ и, пользуясь первой формулой в (2.12), получим

$$\zeta_0 = \frac{Q}{\pi}\int_0^\infty e^{-\xi b}\cos\sqrt{\lambda\xi}\, t\cos\xi x d\xi \tag{4.2}$$

Разлагая $\cos\sqrt{\lambda\xi}\, t$ в ряд и почленно интегрируя, находим

$$\zeta_0 = \frac{Q}{\pi(x^2+b^2)^{1/2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}\omega_1{}^n T_{n+1}, \qquad \omega_1 = \frac{\lambda t^2}{(x^2+b^2)^{1/2}} \tag{4.3}$$

Здесь и в дальнейшем $T_n = T_n(b/(x^2+b^2)^{1/2})$ — полиномы Чебышева первого рода ($8.940_1$ [20]).

Ряд (4.3) сходится равномерно при любом ограниченном $\omega_1$, однако он неудобен для численного анализа при больших значениях $\omega_1$. Для них укажем другое выражение $\zeta_0$.

Сначала из (4.2) при помощи формулы $8.953_2$ [20] выразим $\zeta_0$ через функции параболического цилиндра $D_\mu(z)$,

$$\zeta_0 = \frac{Q}{\pi}\operatorname{Re}\left\{\frac{\exp{}^1/_4 z^2}{2(b-i|x|)}[D_{-2}(-z)+D_{-2}(z)]\right\}, \quad z = \frac{i\sqrt{\lambda}t}{[2(b-i|x|)]^{1/2}} \tag{4.4}$$

Затем, пользуясь соотношением 3.2 (19) в [22], выводим

$$\zeta_0 = \frac{Q}{\pi}\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{b-i|x|}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}ze^{z^2/2}\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+1\right]\right\}, \quad \Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-\xi^2}d\xi \tag{4.5}$$

Заменив в (4.5) интеграл вероятности $\Phi(u)$ его асимптотическим представлением (8.254 [20] в случае $\arg z \neq 0$ и стр. 116—117 [23] в случае $\arg z = \pi/2$) и отделив после этого реальную часть, найдем формулу для возвышения свободной поверхности $\zeta_0$, удобную при больших значениях $\omega_1$

$$\zeta_0 = \frac{Q}{(b^2+x^2)^{1/2}}\left\{\frac{\omega_1^{1/2}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\varkappa}\sin\left(\frac{3\varphi}{2}-\frac{\omega}{4}\right)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(\omega_1/2)^k}T_{k-1}+O\left(\frac{1}{\omega_1^{n+1}}\right)\right\}$$

$$\varkappa = \frac{\lambda t^2 b}{4(b^2+x^2)},\quad \omega = \frac{\lambda t^2|x|}{b^2+x^2},\quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{|x|}{b},\quad \omega_1 \gg 1 \tag{4.6}$$

Здесь и в дальнейшем $O(m) = cm$, где $c$ — постоянная. Из (4.6) следует, что при $\omega_1 \gg 1, \varkappa \gg 1$

$$\zeta_0 = -\frac{2Q}{\pi\lambda t^2}\left[1+O\left(\frac{1}{\omega_1}\right)\right] \tag{4.7}$$

При $\omega_1 \gg 1$, $\varkappa \ll 1$ главный вклад в $\zeta_0$ вносят члены волнового характера.

2°. Найдем первую поправку за счет сил вязкости к возвышению свободной поверхности. При помощи (2.12) получаем

$$\xi_2 = \frac{2Q}{\pi}\int_0^\infty \xi^2 e^{-\xi b}\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda\xi}\,t}{\sqrt{\lambda\xi}} - t\cos\sqrt{\lambda\xi}\,t\right]\cos\xi x d\xi \tag{4.8}$$

Отсюда аналогично выводу формул (4.3) — (4.7) находим различные представления для $\xi_2$

а) представление $\xi_2$ в виде ряда

$$\xi_2 = -\frac{2Qt}{\pi(x^2+b^2)^{3/2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{2n+1}\frac{(n+2)!\,\omega_1^n}{(2n)!}T_{n+3} \tag{4.9}$$

б) выражение $\xi_2$ через функции параболического цилиндра

$$\xi_2 = -\frac{2Qt}{\pi}\operatorname{Re}\left[S_6+\frac{i}{(\lambda t^2)^{1/2}}S_5\right]$$

$$S_n = \frac{\Gamma(n)\exp{}^1\!/_4 z^2}{[2(b-i|x|)]^{1/2n}}[D_{-n}(-z)+(-1)^n D_{-n}(z)] \tag{4.10}$$

в) представление $\xi_2$ через интеграл вероятности

$$\xi_2 = -\frac{Qt}{2\pi}\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{(b-i|x|)^3}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{z^2/2}\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\left(z^5+9z^3+9z-\frac{3}{z}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+z^4+8z^2+3\right]\right\} \tag{4.11}$$

г) асимптотическое разложение $\xi_2$ при $\omega_1 \gg 1$

$$\xi_2 = \frac{Qt}{2\pi(x^2+b^2)^{3/2}}\left\{\frac{(\pi\omega_1)^{1/2}}{2}e^{-\varkappa}\sum_{n=0}^{3}\left(\frac{\omega_1}{2}\right)^{2-n}q_{2n}\sin\left(\frac{\omega}{4}-\frac{(11-2n)\varphi}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=2}^{N}\frac{8k(k^2-1)(2k-1)!!}{(\omega_1/2)^{k+1}}T_{k-2}+O\left(\frac{1}{\omega_1^{N+2}}\right)\right\} \tag{4.12}$$

$$q_{20}=1,\quad q_{21}=-9,\quad q_{22}=9,\quad q_{23}=3,\quad \omega_1\gg 1$$

Отсюда при $\varkappa \gg 1$ следует

$$\xi_2 = \frac{576Q}{\pi\lambda^3 t^5}\left[1+O\left(\frac{1}{\omega_1}\right)\right],\qquad \omega_1 \gg 1 \tag{4.13}$$

3°. Определим теперь следующую поправку за счет сил вязкости. Используя (2.12), находим

$$\xi_3 = \frac{2^{3/2}Qt}{\pi\lambda^{1/4}}\int_0^\infty \xi^{11/4}e^{-\xi b}\cos\xi x M\,(\sqrt{\xi\lambda t^2})\,d\xi + \frac{3\sqrt{2}Q}{\pi\lambda^{3/4}}\int_0^\infty \xi^{7/4}e^{-\xi b}\cos\xi x N(\sqrt{\xi\lambda t^2})\,d\xi,$$

$$M(u) = \cos uC(\sqrt{u}) + \sin uS(\sqrt{u}), \quad N(u) = \cos uS(\sqrt{u}) - \sin uC(\sqrt{u}),$$

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^u \cos\xi^2 d\xi, \qquad S(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^u \sin\xi^2 d\xi \tag{4.14}$$

Отсюда при помощи формул $8.253_{2,3}$ в [20] выводим

$$\xi_3 = \frac{16Bt^{3/2}}{\pi^{3/2}(x^2+b^2)^2}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{n2^{2n}(n+3)!}{(4n+3)!!}\omega_1{}^n T_{n+4} \tag{4.15}$$

Представление для $\xi_3$ через функции параболического цилиндра имеет вид

$$\xi_3 = -\frac{Qt\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,\lambda^{1/4}}\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{1/4z^2}}{[2(b-i|x|)]^{15/4}}\left[2D_{\frac{13}{2}}\left(\frac{z}{i}\right) + \frac{3i}{z}D_{\frac{11}{2}}\left(\frac{z}{i}\right)\right]\right\} -$$

$$-\frac{Q}{\pi^{3/2}\lambda\sqrt{t}}\frac{1}{(x^2+b^2)^{3/2}}\left[8T_3 - \frac{6T_2}{\omega_1} + \frac{315}{2^2\omega_1{}^2}T_1 + O\left(\frac{1}{\omega_1{}^3}\right)\right], \quad \omega_1 \gg 1 \tag{4.16}$$

Для получения формул (4.16) в каждом из интегралов (4.14) сделаем замену переменной интегрирования, положив $a = \lambda t^2 x^{-2}u$, и разобьем промежуток интегрирования на два $[0, K^{-q}]$ и $[K^{-q}, \infty)$, где $K = \lambda t^2|x|^{-1}$, $q$ — положительное число и подбирается из условия, чтобы отбрасываемые величины были одного порядка малости. Интегралы по конечному промежутку оцениваем, в интегралах по бесконечному промежутку функции $M$ и $N$ заменяем их интегральными представлениями по формулам $8.256_{3,4}$ из [20]. В двойных интегралах тригонометрические функции разлагаем в ряды Маклорена с остаточными членами в форме Лагранжа. Внутренние интегралы вычисляем, а интеграл, содержащий остаточный член, оцениваем. В одномерных интегралах продолжаем промежуток интегрирования до нуля, вычитая и оценивая соответствующие интегралы. Вычисляя затем полученные интегралы и пользуясь соотношением $9.248_1$ из [20], приходим к формуле (4.16).

Из (4.16), заменив функции параболического цилиндра их асимптотическими разложениями (8.4 (1) [22]), выводим

$$\xi_3 = -\frac{Qt^{3/2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\omega_1{}^3}{(x^2+b^2)^2}\left\{\frac{e^{-\varkappa}}{2^{11/2}}\sum_{n=0}^{6}(-1)^n\frac{q_{3n}}{\omega_1{}^n}\cos\left(\frac{\omega}{4}-(7-n)\varphi\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi\omega_1{}^4}\left[8T_3 - \frac{6T_2}{\omega_1} + \frac{315}{2^2\omega_1{}^2}T_1 + O\left(\frac{1}{\omega_1{}^3}\right)\right]\right\}, \quad \omega_1 \gg 1, \; q_{30} = 1 \tag{4.17}$$

$$q_{3n} = \frac{4^n}{n!}\left[\left(-\frac{13}{4}\right)_n\left(-\frac{11}{4}\right)_n\right] - 3\frac{4^{n-1}}{(n-1)!}\left[\left(-\frac{11}{4}\right)_{n-1}\left(-\frac{9}{4}\right)_{n-1}\right]$$

$$\alpha_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1), \quad \alpha_0 = 1$$

В случае $\omega_1 \gg 1, \varkappa \gg 1$ из (4.17) вытекает

$$\xi_3 = -\frac{Q}{\pi^{1/2}\lambda\sqrt{t}}\frac{1}{(x^2+b^2)^{3/2}}\left[8T_3 + O\left(\frac{1}{\omega_1}\right)\right] \tag{4.18}$$

4.1. Различные представления для $\xi_4$ находятся тем же способом, что и для $\xi_0$. Имеем

а) представление $\xi_4$ в виде ряда

$$\xi_4 = \frac{2Qt^2}{\pi(x^2+b^2)^{5/2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+4)!}{(2n)!}\frac{2n}{2n+2}\omega_1{}^n T_{n+5} \tag{4.19}$$

б) выражение $\xi_4$ через функции параболического цилиндра

$$\xi_4 = \frac{2Qt^2}{\pi}\operatorname{Re}\left\{S_{10} + \frac{2i}{(\lambda t^2)^{1/2}}S_9 - \frac{2}{\lambda t^2}S_8 + \frac{12}{\lambda t^2}\frac{T_4}{(x^2+b^2)^2}\right\} \tag{4.20}$$

в) представление $\xi_4$ через интеграл вероятности

$$\xi_4 = \frac{Qt^2}{8\pi}\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{(b-i|x|)^5}\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\exp\frac{z^2}{2}\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)(z^9+34z^7+\right.\right.$$
$$\left.\left.+324z^5+882z^3+315z)+z^8+33z^6+293z^4+645z^2\right]\right\} \tag{4.21}$$

г) асимптотическое разложение $\xi_4$ при $\omega_1 \gg 1$

$$\xi_4 = \frac{Qt^2}{\pi(x^2+b^2)^{5/2}}\left\{-\frac{(\pi\omega_1)^{1/2}}{2^4}e^{-\varkappa}\sum_{n=0}^{4}q_{4n}\left(\frac{\omega_1}{2}\right)^{4-n}\sin\left(\frac{\omega}{4}-\frac{(19-2n)\varphi}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-2\sum_{n=1}^{N}\frac{(2n-1)!!\,n(n-2)(n-3)(n-4)}{(\omega_1/2)^n}T_{|n-5|}+O\left(\frac{1}{\omega_1{}^{N+1}}\right)\right\},\quad \omega_1 \gg 1 \tag{4.22}$$

$$q_{40}=1,\quad q_{41}=-34,\quad q_{42}=324,\quad q_{43}=-882,\quad q_{44}=315$$

д) асимптотическое разложение $\xi_4$ при $\omega_1 \gg 1, \varkappa \gg 1$

$$\xi_4 = \frac{24Q}{\pi\lambda(x^2+b^2)^2}\left[T_4 + O\left(\frac{1}{\omega_1{}^4}\right)\right] \tag{4.23}$$

Собирая вместе результаты вычислений, находим, что при начальном условии (4.1) асимптотическое разложение возвышения свободной поверхности имеет вид

$$\zeta = \zeta_0 + \varepsilon^2\xi_2 + \varepsilon^3\xi_3 + \varepsilon^4\xi_4 + R_5,\ |R_5| \leqslant M_0(t)\,\varepsilon^5 \tag{4.24}$$

Входящие в (4.24) функции $\zeta_0, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ по формулам (4.3), (4.9), (4.15), (4.19) представлены в виде рядов, равномерно сходящихся при любых конечных значениях $\omega_1$. По формулам (4.4), (4.10), (4.16), (4.20) $\zeta_0$ и $\xi_i$ выражены через функции параболического цилиндра. Асимптотические разложения $\zeta_0$ и $\xi_i$ при $\omega_1 \gg 1$ приведены в формулах (4.6), (4.12), (4.17), 4.22), а при $\omega_1 \gg 1, \varkappa \gg 1$ — в формулах (4.7), (4.13), (4.18), (4.23).

**4.2.** Для сравнения известным в литературе примером [1,16] рассмотрим движение, вызванное начальным возвышением свободной поверхности, сосредоточенным в точке. Это движение получается предельным переходом при $b \to 0$, когда воздействие $\zeta_*$ задано в виде (4.1) согласно [24].

Устремляя в формулах (4.3), (4.9), (4.15), (4.19) параметр $b$ к нулю и возвращаясь к размерным переменным, найдем для рассматриваемого случая первые члены асимптотического разложения по вязкости для возвышения свободной поверхности (индексы опущены)

$$\xi = \frac{Qgt^2}{\pi x^2}\sum_{i=0}^{4}\left(\frac{\nu t}{x^2}\right)^{1/2 i}\eta_i, \qquad \eta_i = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1+i)!\,\omega^{2n}2^{1/2 i}}{(1/2 i)!\,(4n+2+1/2 i)\,(4n+1)!} \quad (i=0,2,4)$$

$$\eta_3 = \frac{32}{\sqrt{\pi}\,\omega}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\frac{2^{4n}(2n+3)!}{(8n+3)!!}\omega^{2n}, \qquad \eta_1 = 0, \qquad \omega = \frac{gt^2}{|x|} \tag{4.25}$$

Ряды (4.25) сходятся равномерно для всех конечных $\omega$. Решение можно представить и в другом виде

$$\xi = \frac{Q\sqrt{g}\,t}{\sqrt{2\pi}|x|^{3/2}}\sum_{i=0}^{4}\gamma^{1/2 i}\,\mathrm{H}_i, \qquad \mathrm{H}_0 = M, \qquad \mathrm{H}_2 = M\left(-\frac{1}{8}+\frac{9}{2\omega^2}\right)+N\left(\frac{9}{4\omega}+\frac{3}{\omega^3}\right)+\frac{2^{3/2}}{\sqrt{\pi}\omega^{3/2}}$$

$$\mathrm{H}_4 = M\left(\frac{1}{2^7}-\frac{81}{2^3\omega^2}+\frac{315}{2^3\omega^4}\right)+N\left(-\frac{17}{2^5\omega}+\frac{441}{2^3\omega^3}\right)-\frac{33}{2^{11/2}\sqrt{\pi}}\frac{1}{\omega^{3/2}}+\frac{455}{2^{7/2}\sqrt{\pi}}\frac{1}{\omega^{7/2}}, \quad \gamma = \frac{\nu t}{x^2}\omega^2 \tag{4.26}$$

$$M = M\left(\frac{\omega}{4}\right), \quad N = N\left(\frac{\omega}{4}\right) (\text{см. } 4.714); \ \mathrm{H}_1 = 0, \ \mathrm{H}_3 = \frac{2^{11/2}}{\pi\omega^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\,(2n+3)!}{(8n+3)!!}(4\omega)^{2(n-1)}$$

Асимптотическое представление $H_3$ при $\omega \gg 1$ имеет вид

$$\mathrm{H}_3 = \frac{1}{2^5\omega^{1/2}}\left[\sin\frac{\omega}{4}\sum_{n=0}^{3}(-1)^n\frac{q_{32n}}{\omega^{2n}}-\cos\frac{\omega}{4}\sum_{n=0}^{2}(-1)^n\frac{q_{32n+1}}{\omega^{2n+1}}+\frac{3\cdot 2^{13/2}}{\pi\omega^5}+O\left(\frac{1}{\omega^7}\right)\right]$$

Чтобы получить формулы (4.26), надо в (4.5), (4.11), (4.15), (4.16) (4.21), перейти к пределу при $b \to 0$ и воспользоваться тем, что в этом случае интеграл вероятности выражается через интегралы Френеля [20].

В случае больших значений $\omega$ из (4.26) вытекает

$$\xi = \frac{Q\sqrt{g}\,t}{2\sqrt{\pi}|x|^{3/2}}\left\{\cos\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\left[1-\gamma\left(\frac{1}{2^3}-\frac{9}{2\omega^2}\right)+\gamma^2\left(\frac{1}{2^7}-\frac{81}{2^3\omega^2}+\frac{315}{2^3\omega^4}\right)\right]-\right.$$
$$-\sin\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\gamma\left(\frac{9}{2^2\omega}+\frac{3}{\omega^3}\right)-\gamma^2\left(\frac{17}{2^5\omega}-\frac{441}{2^3\omega^3}\right)\right]+\gamma^{3/2}\sqrt{2}\mathrm{H}_3- \tag{4.27}$$
$$-\frac{4}{\sqrt{\pi}\,\omega^{3/2}}\left(\left[\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\frac{(4n+1)!!}{(\omega/2)^{2n}}+O\left(\frac{1}{\omega^{2N}}\right)\right]+\frac{\gamma}{\omega^2}\left[\sum_{n=1}^{N-1}(-1)^n\frac{(4n-1)!!\,8n(4n^2-1)}{(\omega/2)^{2n}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+O\left(\frac{1}{\omega^{2N}}\right)\right]+\frac{\gamma^2}{\omega^4}\left[2\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\frac{(4n+1)!!\,(4n^2-1)\,(2n-2)\,(2n-3)}{(\omega/2)^{2n}}+O\left(\frac{1}{\omega^{2N}}\right)\right]\right)\right\}$$
$$\omega \gg \infty, \quad \gamma \ll 0$$

Формулы (4.25) — (4.27) определяют первые члены асимптотического разложения возвышения свободной поверхности в случае движения, вызванного $\delta$-видным начальным возвышением.

Отметим, что для этого примера обоснование асимптотических разложений в той форме, как оно проведено в § 3, теряет силу, ибо начальное возмущение обладает бесконечной энергией, а оценка погрешностей асимптотических разложений дана в § 3 в пространствах с энергетической нормой. Тем не менее из формул (4.25)—(4.27) видно, что практическая сходимость асимптотического разложения для возвышения свободной поверхности достигается, если

$$\gamma = \frac{\nu t}{x^2}, \quad \omega^2 = \frac{\nu g^2 t^5}{x^4} \ll 1 \tag{4.28}$$

Сравним полученное решение (4.25)—(4.27) с известными результатами для этого примера.

А. Из (4.25)—(4.27) при $\nu = 0$ получаем известные [16,25,26] представления для возвышения свободной поверхности идеальной жидкости в случае движения, вызванного $\delta$-видным начальным возвышением

$$\zeta_0 = \frac{Qgt^2}{\pi x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{(4n+2)!} \omega^{2n}, \qquad \omega = \frac{gt^2}{|x|} \tag{4.29}$$

$$\zeta_0 = \frac{Q\sqrt{g}\,t}{\sqrt{2\pi}\,|x|^{3/2}} \left[\cos\frac{\omega}{4}\, C\left(\frac{\sqrt{\omega}}{2}\right) + \sin\frac{\omega}{4}\, S\left(\frac{\sqrt{\omega}}{2}\right)\right] \tag{4.30}$$

$$\zeta_0 = \frac{Q\sqrt{g}\,t}{2\sqrt{\pi}\,|x|^{3/2}} \left[\cos\left(\frac{\omega}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + O(\omega^{-3/2})\right] \tag{4.31}$$

Сопоставляя соответствующие формулы для возвышения свободной поверхности вязкой жидкости и идеальной, замечаем, что наличие вязкости вносит в возвышение дополнительные слагаемые, которые изменяют амплитуду и фазовые характеристики волны.

Б. Из (4.25) при $\nu t \ll x^2$, $\omega \ll 1$ вытекает результат, полученный Л. Н. Сретенским (формула (49), § 8 [1])

$$\zeta \sim \frac{Qgt^2}{2\pi x^2} \tag{4.32}$$

Из формулы (4.27) при дополнительном ограничении $\gamma^2\omega^{3/2} \gg 1$ следует

$$\xi \sim \frac{Q\sqrt{g}\,t}{2\sqrt{\pi}\,|x|^{3/2}} \cos\left(\frac{\omega}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\left[1 - \frac{\gamma}{8} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\gamma}{8}\right)^2\right] \tag{4.33}$$

Это также согласуется с результатом Л. Н. Сретенского (формула (48), § 8 [1]).

В. Теперь сравним возвышения свободной поверхности идеальной жидкости, получающиеся от действия начальных возмущений с конечной и бесконечной энергиями:

а) из формул (4.6), (4.27) следует, что волны, вызванные начальным возмущением с конечной энергией являются затухающими в отличие от волн, вызванных $\delta$-видным начальным возвышением. Кроме того, в первом случае волны обладают бо́льшим периодом, чем во втором

б) если имеют место соотношения

$$\varkappa = \frac{gt^2 b}{4(x^2 + b^2)} \ll 1, \quad \frac{b}{|x|} \ll 1, \qquad b = \mathrm{const}$$

то рассматриваемые возвышения с точностью до бесконечно малых совпадают,

в) если $\varkappa \gg 1$, то изучаемые деформации свободной поверхности существенно отличаются.

Это означает, что передний фронт и развитие волны, вызванной возмущением (4.1) с конечной энергией, можно исследовать, считая начальное возвышение $\delta$-видным. Если же нас интересует затухание волны, то необходимо провести дополнительное исследование.

4.3. Рассмотрим плоское движение жидкости, вызванное импульсивным давлением

$$p_* = \frac{A}{\pi}\frac{b}{x^2+b^2}\delta(t), \qquad A' = \rho\frac{\alpha^3}{\beta}A \tag{4.34}$$

Соответствующие вычисления первых членов асимптотического разложения при $\varepsilon \to 0$ для возвышения свободной поверхности дают

$$\xi = -\frac{At}{\pi}\sum_{i=0}^{4}(\varepsilon^2 t)^{1/2\, i}\,\mathrm{H}_i, \quad \mathrm{H}_i = \frac{1}{(x^2+b^2)^{1+i/2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1+i)!}{(2n+1)!}a_i\omega_1^n T_{n+2+i}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = \frac{32}{\sqrt{\pi}}\frac{(n+1)\,2^{2n}}{(4n+5)!!}(2n+1)!, \quad a_4 = 2 \tag{4.35}$$

Аналогично тому как это проделывалось в примере 4.1, выразим $\xi$ через функции параболического цилиндра

$$\xi = \frac{A}{\pi\sqrt{\lambda}}\,\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{4}(\varepsilon^2 t)^{1/2 k}A_k f_k, \qquad A_{0,3} = 1, \qquad A_{2,4} = 2$$

$$f_k = (-1)^k i S_{3+2k} \quad (k=0,\,2,\,4), \quad f_1 = 0$$

$$f_3 = \frac{2^{3/2}\sqrt{\pi t}}{\lambda^{1/4}}\frac{\exp{}^1/_4\, z^2}{[2(b-i\,|\,x\,|)]^{17/4}}\left[D_{15/2}(-iz) + \frac{i}{2z}D_{13/2}(-iz)\right] + \tag{4.36}$$

$$+\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\lambda}\,(x^2+b^2)^2}\left[\frac{2T_3}{\omega_1} - \frac{15}{2\omega_1^2}T_2 + \frac{2835}{2^4\omega_1^3}T_1 + O\left(\frac{1}{\omega_1^4}\right)\right]$$

Функции $S_m$ определены в (4.10), а $z$ — в (4.4). Отсюда для $\omega_1 \gg 1$ имеем

$$\xi = \frac{A\omega_1}{4\sqrt{\pi\lambda}\,(x^2+b^2)^{3/4}}\left\{e^{-\varkappa}\sum_{k=0}^{2}\sum_{n=0}^{2k+1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\gamma_1}{8}\right)^k\frac{a_{kn}}{(\omega_1/2)^n}\sin\left(\frac{\omega}{4} - \frac{(8k+5-2n)\,\varphi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{8}{\sqrt{\pi}\omega_1^{3/2}}\sum_{k=0}^{2}\frac{2^{4k}}{k!}\left(\frac{\gamma}{8}\right)^k\frac{1}{\omega_1^{2k}}\left[\sum_{n=2k+1}^{N-1}\frac{(2n-1)!!\,(-n)_{2k+1}}{(\omega_1/2)^n}T_{n-2k-1} + O\left(\frac{1}{\omega_1^N}\right)\right] + \gamma_1^{3/2}f_3\right\}$$

$$f_3 = \frac{1}{2^{3/2}\sqrt{\omega_1}}\left\{e^{-\varkappa}\left[\sum_{n=0}^{7}\frac{a_{3n}}{\omega_1^n}\cos\left(\frac{\omega}{4} + (n-8)\,\varphi\right) + O\left(\frac{1}{\omega_1^8}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi\omega_1^5}\left(4T_3 - \frac{15}{\omega_1}T_2 + \frac{2835}{2^3\omega_1^2}T_1\right) + O\left(\frac{1}{\omega_1^8}\right)\right\}$$

$$a_{3n} = (-4)^n\left[\frac{1}{n!}\left(-\frac{15}{4}\right)_n\left(-\frac{13}{4}\right)_n - \frac{1}{4\,(n-1)!}\left(-\frac{13}{4}\right)_{n-1}\left(-\frac{11}{4}\right)_{n-1}\right], \quad a_{k0} = 1 \tag{4.37}$$

$$a_{01} = -1, \ a_{11} = -15, \ a_{12} = 45, \ a_{13} = -15, \ a_{21} = -45, \ a_{22} = 630, \ a_{23} = -3150$$

$$a_{24} = 4725, \ a_{25} = -945, \quad \varphi = \mathrm{arctg}\,|\,x\,|\,b^{-1}, \quad \gamma_1 = \varepsilon^2\lambda^2 t^5(x^2+b^2)^{-2}$$

В случае $\varkappa \gg 1$, $\omega_1 \gg 1$ из (4.37) получаем

$$\xi = \frac{A\omega_1}{2^2\sqrt{\pi\lambda}\,(x^2+b^2)^{3/4}}\left\{\frac{2^3}{\sqrt{\pi}\omega_1^{3/2}}\sum_{k=0}^{2}\frac{b_k}{k!}\left(\frac{\gamma}{8}\right)^k\frac{1}{\omega_1^{2k}}\left[\sum_{n=2k+1}^{N-1}\frac{(2n-1)!!\,(-n)_{2k+1}}{(\omega_1/2)^n}T_{n-2k-1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + O\left(\frac{1}{\omega_1^N}\right)\right] + \frac{\gamma_1^{3/2}}{2^{3/2}\sqrt{\omega_1}}\left[\frac{2^{13/2}}{\pi\omega_1^5}\left(4T_3 - \frac{15}{\omega_1}T_2 + \frac{2835}{2^3\omega_1^2}T_1\right) + O\left(\frac{1}{\omega_1^8}\right)\right]\right\} \tag{4.38}$$

4.4. Рассмотрим случай движения, вызванного импульсом нормального напряжения, сосредоточенным в точке. Переходя в формулах (4.35), (4.36) к пределу при $b \to 0$, возвращаясь к размерным переменным и опуская индексы, найдем

$$\xi = \frac{At}{\rho\pi x^2} \sum_{i=0}^{4} \left(\frac{\nu t}{x^2}\right)^{1/2\, i} \eta_i, \quad \eta_i = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1+i)!}{(4n+1)!} \frac{2^{1/2\, i}}{(1/2\, i)!} \omega^{2n} \qquad (i=0,\,2,\,4)$$

$$\eta_3 = \frac{16}{\sqrt{\pi\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \frac{2^{4n}(2n+3)!}{(8n+1)!!} \omega^{2n}, \quad \eta_1 = 0, \quad \omega = \frac{gt^2}{|x|} \tag{4.39}$$

$$\xi = \frac{A\sqrt{g}t^2}{\rho\sqrt{\pi}\, 2^{3/2}|x|^{5/2}} \sum_{i=0}^{4} \gamma^{1/2 i} \mathrm{H}_i, \quad \gamma = \frac{\nu g^2 t^5}{x^4}, \quad \mathrm{H}_0 = N + \frac{2}{\omega} M + \left(\frac{2}{\pi\omega}\right)^{1/2}, \quad \mathrm{H}_1 = 0$$

$$\mathrm{H}_2 = \left(-\frac{1}{8} + \frac{45}{2\omega^2}\right) N + \left(-\frac{15}{4\omega} + \frac{15}{\omega^3}\right) M - \frac{1}{\sqrt{\pi}\, 2^{5/2}\omega^{1/2}} + \frac{33}{\sqrt{\pi}\, 2^{1/2}\omega^{5/2}}$$

$$\mathrm{H}_4 = \left(\frac{1}{2^7} - \frac{315}{2^4\omega^2} + \frac{4725}{2^3\omega^4}\right) N + \left(\frac{45}{2^6\omega} - \frac{1575}{2^3\omega^3} + \frac{945}{2^2\omega^5}\right) M +$$

$$+ \frac{1}{2^{13/2}\omega^{1/2}\sqrt{\pi}} - \frac{147}{\sqrt{\pi}\, 2^{5/2}\omega^{5/2}} + \frac{2895}{\sqrt{\pi}\, 2^{5/2}\omega^{9/2}}$$

$$M = M\left(\frac{\omega}{4}\right), \quad N = N\left(\frac{\omega}{4}\right), \quad \mathrm{H}_3 = \frac{2^{11/2}}{\pi\omega^{9/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \frac{2^{4n}(2n+3)!}{(8n+1)!!} \omega^{2n}$$

$$\mathrm{H}_3 = \frac{1}{2^5\omega^{1/2}} \left[\sum_{n=0}^{7} \frac{a_{3n}}{\omega^n} \cos\left(\frac{\omega}{4} + \frac{n\pi}{2}\right) + 2^{13/2} + \frac{15}{\pi\omega^6} + O\left(\frac{1}{\omega^8}\right)\right], \quad \omega \gg 1$$

Отсюда при $\omega \gg 1$ вытекает

$$\begin{aligned} \xi = \frac{A\omega}{2^2\rho\sqrt{\pi}\, g^{1/2}|x|^{3/2}} \Bigg\{ &\sum_{k=0}^{2} \sum_{n=0}^{2k+1} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\gamma}{8}\right)^k \frac{a_{kn}}{(\omega/2)^n} \sin\left(\frac{\omega}{4} + \frac{n\pi}{2} - \frac{5\pi}{4}\right) + \\ &+ \frac{8}{\sqrt{\pi}\omega^{3/2}} \sum_{k=0}^{2} \frac{2^{4k}}{k!} \left(\frac{\gamma}{8}\right)^k \left[\sum_{m=k}^{M-1} \frac{(4m+1)!!\,(-2m-1)_{2k+1}}{(\omega/2)^{2m+1}} (-1)^{m-k} + \right. \\ &\left. + O\left(\frac{1}{\omega^{2M+1}}\right)\right] + \gamma^{3/2}\sqrt{2}\,\mathrm{H}_3 \Bigg\} \end{aligned} \tag{4.40}$$

Формулы (4.39), (4.40) определяют первые члены асимптотического разложения возвышения свободной поверхности в случае движения, вызванного импульсом нормального напряжения, сосредоточенным в точке.

4.5. Рассмотрим теперь случай пространственного движения жидкости под действием начального импульса давлений и начального возвышения свободной поверхности, заданных в виде

$$p_* = \frac{A}{2\pi} \frac{b}{(b^2+r^2)^{3/2}} \delta(t), \quad \zeta_* = \frac{B}{2\pi} \frac{b}{(b^2+r^2)^{3/2}}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \; b > 0,$$

$$A' = \rho \frac{\alpha^4}{\beta} A, \quad B' = \alpha^3 B \tag{4.41}$$

Здесь $A'$ — величина импульса давления, а $B'$ — объем поднятой жидкости.

Соответствующие вычисления для возвышения свободной поверхности дают

$$\xi=-\frac{At}{\pi}\sum_{k=0}^{4}(\varepsilon\sqrt{t})^k\xi_k^{(1)}-\frac{B}{\pi}\sum_{k=0}^{4}(\varepsilon\sqrt{t})^k\xi_k^{(2)},\quad \xi_k^{(1)}=\sum_{n=0}^{\infty}A_k\frac{(\lambda t^2)^n}{(2n+1)!}\frac{\partial^{n+2+k}}{\partial b^{n+2+k}}\frac{1}{\sqrt{b^2+r^2}}$$

$$\xi_k^{(2)}=\sum_{n=0}^{\infty}B_k\frac{(\lambda t^2)^n}{(2n)!}\frac{\partial^{n+1+k}}{\partial b^{n+1+k}}\frac{1}{\sqrt{b^2+r^2}},\quad A_0=\frac{1}{2},\quad A_1=0,\quad A_2=-1$$

$$A_4=1,\quad B_0=\frac{1}{2},\quad B_1=0 \tag{4.42}$$

$$B_2=-\frac{2n}{2n+1},\quad B_4=\frac{2n}{2n+2},\quad A_3=\frac{-16}{\sqrt{\pi}}\frac{(n+1)\,2^{2n}\,(2n+1)!}{(4n+5)!!},\quad B_3=\frac{-8}{\sqrt{\pi}}\frac{n2^{2n}\,(2n)!}{(4n+3)!!}$$

(Здесь и в дальнейшем верхний индекс (1) указывает, что соответствующее выражение получено от действия начального импульса давлений, а индекс (2) — от влияния начального возвышения свободной поверхности.)

Отсюда в случае воздействий, сосредоточенных в точке ($b\to 0$), имеем (в размерных переменных)

$$\xi=\frac{At}{2\pi\rho r^3}\sum_{i=0}\left(\frac{\nu t}{r^2}\right)^{1/2\,i}\eta_i^{(1)}+\frac{Bgt^2}{2\pi r^3}\sum_{i=0}^{4}\left(\frac{\nu t}{r^2}\right)^{1/2\,i}\eta_i^{(2)},$$

$$\eta_i^{(1)}=\frac{2^{1/2\,i}}{\left(\frac{i}{2}\right)!}\sum_{n=0}^{\infty}(-\omega^2)^n\frac{[(2n+1+i)!!]^2}{(4n+1)!}\,\omega^{2n}\qquad (i=0,\,2,\,4)$$

$$\eta_i^{(2)}=\frac{2^{1/2\,i}}{\left(\frac{i}{2}\right)!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{[(2n+1+i)!!]^2}{(4n+1)!\,(4n+2+i/2)}\qquad (i=0,2,4)$$

$$\eta_3^{(1)}=\frac{16}{\sqrt{\pi\omega}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta_{3n}}{(8n+1)!!},\qquad \eta_3^{(2)}=\frac{32}{\sqrt{\pi\omega}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta_{3n}}{(8n+3)!!} \tag{4.43}$$

$$\eta_{3n}=(-1)^n\,[(2n+3)!!]^2\,n2^{4n}\omega^{2n},\quad \eta_1^{(1)}=\eta_1^{(2)}=0,\quad \omega=gt^2r^{-1}$$

Ряды в (4.43) сходятся для любого фиксированного $\omega$. Решение (4.43) можно представить в виде

$$\xi=-\frac{At}{\rho\sqrt{2}r^3}\omega^2\sum_{i=0}\gamma^{i/2}\mathrm{H}_i^{(1)}+\frac{Bgt^2}{\sqrt{2}r^3}\,\omega\sum_{i=0}^{4}\gamma^{i/2}\mathrm{H}_i^{(2)},\qquad \gamma=\frac{\nu g^2t^5}{r^4}$$

$$\mathrm{H}_1^{(1)}=\mathrm{H}_1^{(2)}=0,\quad \mathrm{H}_0^{(1)}=\frac{F_2}{2^7}+\frac{3F_1}{2^6\omega}-\frac{J_{1/4}J_{-1/4}}{2^4\omega^2}$$

$$\mathrm{H}_2^{(1)}=-\frac{F_2}{2^{10}}-\left(\frac{21}{2^9\omega}-\frac{119}{2^7\omega^3}\right)F_1+\frac{89}{2^8\omega^2}J_{3/4}J_{-3/4}+\left(\frac{127}{2^8\omega^2}-\frac{25}{2^5\omega^4}\right)J_{1/4}J_{-1/4}$$

$$H_3^{(1)}=-\frac{2^{7/2}}{\pi^{3/2}\omega^6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n2^{4n}[(2n+3)!!]^2}{(8n+1)!!}\,\omega^{2n}$$

$$\left(\mathrm{H}_3^{(1)}=\frac{2^{-15/2}}{\pi\omega^{3/2}}\left[\sin\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right],\quad \omega\gg 1\right)$$

$$\mathrm{H}_4^{(1)}=\frac{F_2}{2^{14}}+\left(\frac{55}{2^{13}\omega}-\frac{3531}{2^{10}\omega^3}+\frac{12375}{2^9\omega^5}\right)F_1-\left(\frac{471}{2^{11}\omega^2}-\frac{13293}{2^{10}\omega^4}\right)J_{3/4}J_{-3/4}-$$

$$-\left(\frac{131}{2^9\omega^2}-\frac{24225}{2^{10}\omega^4}+\frac{2025}{2^7\omega^6}\right)J_{1/4}J_{-1/4},\quad H_0^{(2)}=-\frac{F_1}{2^6}+\frac{J_{1/4}J_{-1/4}}{2^4\omega} \tag{4.44}$$

$$H_2^{(2)} = \left(\frac{1}{2^9} - \frac{37}{2^7\omega^2}\right) F_1 - \left(\frac{13}{2^8\omega} + \frac{9}{2^6\omega^3}\right) J_{3/4}J_{-3/4} - \left(\frac{15}{2^8\omega} - \frac{25}{2^6\omega^3}\right) J_{1/4}J_{-1/4}$$

$$\mathrm{H}_3^{(2)} = \frac{2^{9/2}}{\pi^{3/2}\omega^5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{4n} n\,[(2n+3)!!]^2}{(8n+3)!!}\,\omega^{2n}$$

$$\left(\mathrm{H}_3^{(2)} = \frac{2^{-13/2}}{\pi\omega^{3/2}} \left[\cos\left(\frac{\omega}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{\omega}\right)\right] \omega \gg 1\right)$$

$$\mathrm{H}_4^{(2)} = \left(-\frac{1}{2^{13}} + \frac{141}{2^9\omega^2} - \frac{2973}{2^9\omega^4} + \frac{9}{2^2\omega^6}\right) F_1 + \left(\frac{21}{2^{11}\omega} - \frac{129}{2^6\omega^3} - \frac{9}{2^3\omega^5}\right) J_{3/4}J_{-3/4} +$$
$$+ \left(\frac{11}{2^{10}\omega} - \frac{759}{2^8\omega^3} + \frac{627}{2^7\omega^5}\right) J_{1/4}J_{-1/4} + \frac{18\sqrt{2}}{\pi\omega^7}$$

Здесь после выражений $H_3^{(1)}$ и $H_3^{(2)}$ в круглых скобках указаны их асимптотические представления при $\omega \gg 1$

$$F_1 = J_{3/4}J_{1/4} - J_{-1/4}J_{-3/4}, \quad F_2 = J_{3/4}J_{-3/4} + J_{1/4}J_{-1/4}, \quad J_\mu = J_\mu(\omega/8)$$

Чтобы получить формулы (4.44), представим входящие в (2.14) выражения в следующем виде:

$$\frac{4a^3\sigma}{(\sigma^2 + \alpha\lambda)^2} = 2a^2 \frac{d}{d\sigma}\left(-\frac{a}{\sigma^2 + a\lambda}\right), \quad \left(-4a^5 \frac{(3\sigma^2 - a\lambda)\,\sigma}{(\sigma^2 + a\lambda)^3} = a^2 \frac{d}{d\sigma} \frac{4a^3\sigma}{(\sigma^2 + a\lambda)^2}\right.$$
$$\frac{4a^3\lambda}{(\sigma^2 + a\lambda)^2} = 2a^2 \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\sigma}{\sigma^2 + a\lambda}\right) + \frac{2}{\lambda}\left[\sigma^2\left(-\frac{a}{\sigma^2 + a\lambda}\right) + a\right] - \tag{4.45}$$
$$-\frac{4a^5}{(\sigma^2 + a\lambda)^3} = \frac{4a^3}{\sigma} + a^2 \frac{d}{d\sigma} \frac{4a^3\lambda}{(\sigma^2 + \alpha\lambda)^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{4a^3\sigma^3}{(\sigma^2 + a\lambda)^2} - \frac{8}{\lambda}\,\sigma a^2 \frac{a}{\sigma^2 + a\lambda}$$

Теперь, согласно правилам действий над изображениями [13,14], имеем

$$\xi_2^{(1)} = 2tD\xi_0^{(1)}, \quad \xi_4^{(1)} = tD\xi_2^{(1)}, \quad \xi_2^{(2)} = \frac{2B}{A\lambda} \frac{\partial^2 \xi_{0A}^{(1)}}{\partial t^2} + 2tD\xi_0^{(2)}, \quad D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{4.46}$$
$$\xi_4^{(2)} = \frac{2B}{\lambda\pi} \frac{\partial^4}{\partial b^4} \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2}} + tD\xi_2^{(2)} + \frac{B}{A\lambda} \frac{\partial^2 \xi_2^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{4B}{A\lambda} \frac{1}{t} \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial t} + \frac{4B\xi_2^{(1)}}{A\lambda t^2}$$

Функции $\xi_0^{(1)}$, $\xi_0^{(2)}$, как известно [16], выражаются через бесселевы функции. Подставляя эти выражения в (4.46), найдем аналогичные выражения для $\xi_{2,4}^{(1)}$, $\xi_{2,4}^{(2)}$, что и приводит к формуле (4.44).

Асимптотические представления для $\mathrm{H}_3^{(1)}$, $\mathrm{H}_3^{(2)}$ получаются аналогично тому, как в плоском случае было получено асимптотическое представление функции $\xi_3$ (формулы (4.16), (4.17)). Отличие состоит лишь в том, что в пространственном случае функцию Бесселя заменяем ее асимптотическим разложением с остаточным членом [20].

Из (4.44) при $\nu = 0$ получаем известные результаты для идеальной жидкости [16]. Из формул (4.43), (4.44) выводим

$$\zeta = \frac{At}{2\pi\rho r^3}[1 + o(1)] + \frac{Bgt^2}{4\pi r^3}[1 + o(1)], \quad \frac{\nu t}{x^2} \ll 1, \qquad \omega \ll 1 \tag{4.47}$$

$$\zeta \sim -\frac{Agt^3E}{2^{7/2}\pi\rho r^4} \sin\frac{\omega}{4} + \frac{Bgt^2E}{2^{5/2}\pi r^3} \cos\frac{\omega}{4}, \quad E = 1 - \frac{\gamma}{8} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\gamma}{8}\right)^2, \quad \gamma \ll 1$$
$$\omega \gg 1, \quad \gamma^2\omega^{5/2} \gg 1 \tag{4.48}$$

Формула (4.42) определяет первые члены асимптотического разложения возвышения свободной поверхности в случае, когда внешнее воздействие задано в виде (4.41), а формулы (4.43), (4.44), (4.47), (4.48) дают первые члены решения в случае сосредоточенных в начале координат импульса давлений и начального возвышения свободной поверхности.

От аналогичных формул, полученных в работе [15], формулы (4.43), (4.44) отличаются присутствием слагаемого, пропорционального $\nu^{3/2}$, и видом функций в слагаемых, пропорциональных $\nu$ и $\nu^2$.

Авторы благодарят Л. Б. Царюка и В. И. Юдовича за помощь в работе, И. И. Воровича и И. Б. Симоненко за обсуждение результатов и внимание к работе, а также В. В. Мусатова, сделавшего ряд полезных замечаний.

Поступила 13 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. О волнах на поверхности вязкой жидкости. Тр. ЦАГИ 1941, № 541.
2. Потетюнко Э. Н., Срубщик Л. С., Царюк Л. Б. О применении метода стационарной фазы в некоторых работах по теории волн на поверхности вязкой жидкости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
3. Моисеев Н. Н. О краевых задачах для линеаризованных уравнений Навье — Стокса в случае, когда вязкость мала. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 3.
4. Моисеев Н. Н. О математическом методе исследования нелинейных колебаний жидкости. Тр. Междунар. симпоз. по нелинейн. колебаниям, т. 3, Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
5. Багаева Н. Я., Моисеев Н. Н. Три задачи о колебании вязкой жидкости Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 2.
6. Крушинская С. И. Колебания тяжелой жидкости в подвижном сосуде. Ж. вычисл. матем и матем. физ., 1965, т. 5, № 3.
7. Черноусько Ф. Л. О свободных колебаниях вязкой жидкости в сосуде. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
8. Крейн С. Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде. Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 2.
9. Крейн С. Г., Лаптев Г. И. К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде. Сб. «Функциональный анализ и его приложения», М., «Наука», 1968, т. 2, вып. 1.
10. Копачевский Н. Д. О задаче Коши для малых колебаний вязкой жидкости в слабом поле массовых сил. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 1.
11. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5.
12. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
13. Снеддон И. Н. Преобразования Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
14. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., «Наука», 1965.
15. Черкесов Л. В. Пространственная задача Коши—Пуассона для волн в вязкой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
16. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, изд. 4. М., Физматгиз, 1963.
17. Gobert J. Fundamental inequality in the theory of elasticity. Bull. Soc., roy. sci. Liege, 1962, vol. 31, No. 3/4, pp. 182—191.
18. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., Физматгиз, 1961.
19. Юдович В. И. Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь заданную область. Матем. сб., М., 1964, т. 64, № 4.
20. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4. М., Физматгиз, 1963.
21. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.
22. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2. М., «Наука», 1965.
23. Копсон Э. Т. Асимптотические разложения. М., «Мир», 1966.
24. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними, М. Физматгиз, 1958, вып. 1.
25. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
26. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.