Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

О РАСПРОСТРАНЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. Д. Чернышов

(Воронеж)

Исследуется влияние конечности деформаций и конвективных членов в определении скорости среды через перемещения на распространение ударных волн в трехмерной упругой среде. В качестве тензора конечных деформаций используется тензор Альманси [1]. Получено, что количество ударных волн и их свойства сильно зависят от деформаций среды перед поверхностью сильного разрыва и от того, учитываются или не учитываются нелинейные члены в реологических уравнениях. Так, при точном написании этих уравнений в случае малых деформаций возможно распространение трех различных ударных волн. Частный случай, когда перед ударной волной среда находится в недеформированном состоянии, является особенным: все качественные результаты совпадают с результатами аналогичной линейной задачи. В частных случаях получены выражения для скоростей ударных волн в явном виде.

1. Связь тензора напряжений σ_{ij} с тензором конечных деформаций Альманси e_{ij} запишем в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad e_{ij} = {}^1/_2\,(u_{i,j} + u_{j,i} - \alpha u_{k,i}u_{k,j}) \qquad (1.1)$$

где λ и μ — коэффициенты Ламе, u_i — перемещения частиц среды. Коэффициент α равен единице, если учитывать конечность деформаций, и $\alpha = 0$, если использовать тензор малых деформаций. Введение коэффициента α позволит выяснить влияние конечности деформаций среды на распространение ударной волны.

Определяющее уравнение (1.1) справедливо в первом приближении для небольших деформаций среды, когда упругий потенциал W имеет вид

$$W = {}^1/_2\lambda\,(e_{kk})^2 + \mu e_{ij}e_{ij}$$

Рассмотрим распространение поверхности сильного разрыва Σ в упругой среде. Для упрощения вычислений введем подвижную систему прямоугольных координат так, чтобы ее начало двигалось вместе с поверхностью разрыва со скоростью G. В произвольной рассматриваемой материальной точке на Σ направим ось x_3 по нормали к этой поверхности, тогда оси x_1 и x_2 будут расположены в касательной плоскости к поверхности разрыва. Пусть греческие индексы α, β, ... принимают значения 1 или 2, а латинские индексы i, j, k, ..., — значения 1, 2 или 3. Все величины будем вычислять в неподвижной системе координат, а проектировать на оси подвижной системы. Для перехода от неподвижной системы координат к подвижной системе выпишем соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \delta_{i3}\frac{\partial}{\partial x_3} + \delta_{i\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta t} - G\frac{\partial}{\partial x_3} \qquad (1.2)$$

Здесь $\delta/\delta t$ — дельта-производная по времени [2]. Так как на Σ перемещения непрерывны, то из компонент тензора $u_{i,j}$ разрывными будут только компоненты $u_{i,3}$, т. е.

$$[u_{i,j}] = [u_{i,3}]\,\delta_{j3} \tag{1.3}$$

Квадратными скобками в (1.3) обозначены скачки разрывных величин на ударной волне. Скачки $[u_{i,3}]$ связаны со скачками скорости v_i частиц среды. Эту связь найдем из зависимости

$$v_i = \frac{\delta u_i}{\delta t} + (\beta v_3 - G)\,u_{i,3} + \beta v_\alpha u_{i,\alpha} \tag{1.4}$$

которая представляет собой определение скорости через перемещения в подвижной системе координат. Коэффициент β в (1.4) введен с той же целью, что и коэффициент α в (1.1). Когда $\beta = 1$, то в (1.4) удерживаются конвективные члены; если пренебречь этими членами, то надо положить $\beta = 0$. Вычисляя скачки в (1.4), получим

$$[v_i] = \beta u_{i,\alpha}[v_\alpha] + [(\beta v_3 - G)\,u_{i,3}] \tag{1.5}$$

Остановимся на рассмотрении специального случая деформированности среды перед ударной волной, когда $u_{k,\alpha}{}^{+} = 0$ и $u_{k,3}{}^{+} \neq 0$.

Из скачков тензора e_{ij} понадобятся только $[e_{kk}]$ и $[e_{i3}]$, для которых из (1.1) и (1.3) найдем выражения

$$[e_{kk}] = [u_{3,3}] - \alpha \overset{+}{u}_{k,3}[u_{k,3}] + {}^1\!/_2\alpha\,[u_{k,3}]\,[u_{k,3}] \tag{1.6}$$

$$[e_{i3}] = {}^1\!/_2\,[u_{i,3}] + {}^1\!/_2\,[u_{3,3}]\,\delta_{i3} - \alpha \overset{+}{u}_{k,3}[u_{k,3}]\,\delta_{i3} + {}^1\!/_2\alpha\,[u_{k,3}]\,[u_{k,3}]\,\delta_{i3}$$

Полагая $j = 3$ в определяющем уравнении (1.1), в разрывах получим

$$[\sigma_{i3}] = \lambda\,[e_{kk}]\,\delta_{i3} + 2\mu\,[e_{i3}] \tag{1.7}$$

Для замыкания системы уравнений (1.5) — (1.7) относительно скачков разрывных величин запишем динамические условия совместности разрывов на ударной волне [2]

$$[\sigma_{i3}] = \rho^-(\beta v_3^- - G)\,[v_i], \quad [\rho\,(\beta v_3 - G)] = 0 \tag{1.8}$$

Спроектируем (1.7) и (1.8) на касательную плоскость к Σ, положив для этого $i = \alpha$; получим

$$[\sigma_{\alpha 3}] = \mu\,[u_{\alpha,3}] = \rho^-(\beta v_3^- - G)\,[v_\alpha] \tag{1.9}$$

Равенства (1.9) говорят о том, что векторы $[v_i]$ и $[u_{i,3}]$ лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности Σ. Назовем эту плоскость характеристической. Повернем систему координат x_i вокруг оси x_3 так, чтобы ось x_1 лежала в характеристической плоскости. Новую систему координат обозначим через y_i. Угол поворота φ равен углу между осями x_1 и y_1, матрица преобразования $L = \| l_{ij} \|$ имеет компоненты [1]

$$l_{11} = l_{22} = \cos\varphi, \quad l_{21} = -l_{12} = \sin\varphi, \quad l_{i3} = l_{3i} = \delta_{i3} \tag{1.10}$$

Ниже все рассмотрения приводятся в новой системе координат. Величины v_i, $u_{i,3}$ и другие в системе y_i будем обозначать без штрихов наверху, а в системе x_i эти же величины обозначим штрихами.

Положение системы координат y_i неизвестно и определяется углом φ, поэтому компоненты тензора $u_{i,j}$, тоже неизвестны. Если в системе координат x_i компоненты этого тензора $u'_{i,j}$ известны, то при помощи матрицы L тензор $u_{i,j}$, выражается через тензор $u_{i,j}$, по формуле

$$u_{i,j} = l_{ki} l_{nj} u'_{k,n} \tag{1.11}$$

Чтобы найти φ, из (1.9) получаем равенства

$$[v_2] = [u_{2,3}] = 0 \tag{1.12}$$

Учитывая (1.12), из (1.5) скачки скорости $[v_i]$ выражаются через $[u_{i,3}]$ следующим образом:

$$[v_1]\,\Delta = (\beta v_3^- - G)\,\{\beta u_{1,3}^+ [u_{3,3}] + (1 - \beta u_{3,3}^+)[u_{1,3}]\} \tag{1.13}$$

$$[v_3]\,\Delta = (\beta v_3^- - G)\,[u_{3,3}], \qquad \Delta = 1 - \beta u_{3,3}^+$$

Из трех соотношений (1.5) кроме (1.13) можно получить еще одно уравнение, полагая $i = 2$

$$\beta u_{2,3}^+ [v_3] = 0 \tag{1.14}$$

При $\alpha = 1$ из (1.9) и (1.13) получим уравнение

$$\mu\Delta\,[u_{1,3}] = V\,\{\beta u_{1,3}^+ [u_{3,3}] + (1 - \beta u_{3,3}^+)[u_{1,3}]\} \tag{1.15}$$

$$V = \rho^- (G - \beta v_3^-)^2$$

При $i = 3$ из (1.7) и (1.8) находим

$$(\lambda + 2\mu)\,\Delta\,\{(1 - \alpha u_{3,3}^+ + {}^1/_2\alpha\,[u_{3,3}])\,[u_{3,3}] - \alpha\,(u_{1,3}^+ - {}^1/_2\,[u_{1,3}])\,[u_{1,3}]\} = V\,[u_{3,3}] \tag{1.16}$$

Подстановка (1.13) в (1.14) приводит еще к одному уравнению

$$\beta u_{2,3}^+ [u_{3,3}] = 0 \tag{1.17}$$

При получении (1.17) учитывалось тождество $\beta \equiv \beta^2$. Из (1.11) и (1.12) можно получить уравнение

$$[u'_{2,3}]\cos\varphi - [u'_{1,3}]\sin\varphi = 0 \tag{1.18}$$

Подставляя (1.11) в (1.15) — (1.17), получим три уравнения, которые совместно с (1.18) эквивалентны системе (1.15) — (1.18) и из которых находятся неизвестные параметры φ, V и скачки двух проекций вектора $[u_{i,3}]$, а оставшийся скачок считается заданным.

Отметим, что (1.18) является следствием второго равенства из (1.12), тогда как (1.17) — следствие обоих равенств в (1.12). Если всюду положить $\beta = 0$, то уравнение (1.17) будет выполняться тождественно. Это объясняется тем, что при $\beta = 0$ оба равенства в (1.12) приводят к одному и тому же уравнению, которым является уравнение (1.18), поэтому получаем неопределенную систему для нахождения неизвестных параметров.

Лишь в частном случае при $[u_{\alpha,3}] = 0$ для заданного скачка $[u_{3,3}]$ из (1.16) находится скорость распространения продольной ударной волны. В остальных случаях неизвестные параметры на ударной волне определяются при условии задания либо скачков двух проекций вектора $[u_{i,3}]$, либо скачка одной проекции этого вектора и задания угла φ.

Таким образом, задача о распространении ударных волн в упругой среде при учете нелинейных конвективных членов в определении скорости через перемещения качественно отличается от такой же задачи в случае отбрасывания этих членов независимо от того, учитывается конечность деформаций или не учитывается. Отметим еще, что уравнение (1.17) тождественно выполняется также и тогда, когда перед фронтом поверхности Σ среда находится в недеформированном состоянии. В обоих задачах, когда $\beta = 0$ или когда $\overset{+}{u}_{i,j} = 0$, учет конечности деформаций носит количественный характер.

2. При $\beta = 0$ или когда среда перед фронтом ударной волны находится в недеформированном состоянии, из (1.15) и (1.16) найдем

$$V_1 = (\lambda + 2\mu)(1 - \alpha \overset{+}{u}_{3,3} + {}^1/_2\alpha\,[u_{3,3}]) \quad \text{при } [u_{1,3}] = 0 \tag{2.1}$$

$$V_2 = \mu \quad \text{при } [u_{1,3}] \neq 0 \tag{2.2}$$

Из (2.2) и (1.16) для $[u_{3,3}]$ имеем:

при $\alpha = 0$

$$[u_{3,3}] = 0$$

при $\alpha = 1$

$$[u_{3,3}] = \overset{+}{u}_{3,3} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} - \left\{\left(\overset{+}{u}_{3,3} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right)^2 + (2\overset{+}{u}_{1,3} - [u_{1,3}])\,[u_{1,3}]\right\}^{1/2} \tag{2.3}$$

Корень в (2.3) берется со знаком минус, так как иначе при $[u_{1,3}] \to 0$ скачок $[u_{3,3}]$ не будет стремиться к нулю и ударная волна не будет переходить в соответствующую звуковую волну.

Рассмотрим случай, когда $\beta = 1$, $\alpha = 0$, а перед поверхностью Σ упругая среда находится в деформированном состоянии. Будем считать $[u_{3,3}]$ заданной величиной, а $[u_{\alpha,3}]$, V и φ — искомыми величинами. После исключения $[u_{1,3}]$ уравнения (1.15) и (1.16) упрощаются и принимают вид

$$\Delta^+(\mu - V)\,[u_{1,3}] = V\overset{+}{u}_{1,3}[u_{3,3}], \qquad \{\Delta^+(\lambda + 2\mu) = V\}[u_{3,3}] = 0 \tag{2.4}$$

Отсюда для корней получаем выражения

$$V_1 = (\lambda + 2\mu)\Delta^+, \qquad [u_{1,3}] = u_{1,3}^+[u_{3,3}], \qquad (\lambda+2\mu)/\mu - V_1$$
$$V_2 = \mu, \qquad [u_{1,3}] \neq 0, \qquad [u_{3,3}] = 0 \tag{2.5}$$

Угол φ, определяющий положение характеристической плоскости для первой волны, найдем из (1.17). Подставляя (1.11) в (1.17) и учитывая, что $[u_{3,3}] \neq 0$ на рассматриваемой волне, получим искомое уравнение

$$\operatorname{tg}\varphi = u_{2,3}^{+'}/u_{1,3}^{+'} \tag{2.6}$$

Величина V_2 из (2.5) соответствует поперечной ударной волне. Учитывая, что теперь $[u_{3,3}] = 0$ и (1.17) выполняется тождественно, угол φ найдем из (1.18)

$$\operatorname{tg}\varphi = [u_{2,3}']/[u_{1,3}'] \tag{2.7}$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении возможно распростра нение двух различных ударных волн.

При точной постановке задачи, когда $\alpha = \beta = 1$, для нахождения V из (1.15) и (1.16) получим кубическое уравнение

$$\begin{gathered}[(1-u_{3,3}^+)V^3 - \{2\mu(1-u_{3,3}^+) + (\lambda+2\mu)(1-u_{3,3}^*)(1-u_{3,3}^+)^2 + \\ + (\lambda+2\mu)(1-u_{3,3}^*)u_{1,3}^{+2} - \mu u_{1,3}^+\}V^2 + \Delta\{\mu^2 + \mu(\lambda+2\mu)[u_{1,3}^{+2} + 2(1 - \\ - u_{3,3}^*)(1-u_{3,3}^+)]\}V - \Delta^2\mu^2(\lambda+2\mu)(1-u_{3,3}^*) = 0 \\ u_{3,3}^* = {}^1/_2(u_{3,3}^+ + u_{3,3}^-)]\end{gathered} \tag{2.8}$$

Если в этом уравнении пренебречь членом $u_{1,3}^{+2}$, что можно сделать в случае малых деформаций среды перед ударной волной, или когда $u_{1,3}^+ = 0$, то для корней получим выражения

$$V_1^\circ = (\lambda+2\mu)(1-u_{3,3}^+)(1-u_{3,3}^*), \quad [u_{1,3}] = 0, \qquad V_3^\circ = V_2^\circ = \mu, [u_{3,3}] = 0 \tag{2.9}$$

Первый корень соответствует продольной ударной волне, для которой угол φ будет определяться из уравнения (2.6). Совпавшие корни V_2° и V_3° соответствуют поперечной ударной волне, для которой угол φ находится из уравнения (2.7). При точной постановке задачи, когда в (2.8) не пренебрегается членом $u_{1,3}^{+2}$, все три корня V_1, V_2 и V_3 различные, для них скачки $[u_{1,3}]$ и $[u_{3,3}]$ будут отличны от нуля одновременно. Поэтому после сокращения на $[u_{3,3}]$ в (1.17) придем к уравнению (2.6), которое будет иметь место одновременно для всех трех корней.

Если считать $u_{1,3}^+$ малой величиной в (2.8), то корни этого уравнения с точностью до малых высшего порядка запишутся в виде

$$V_1 = V_1^\circ + V_1^\circ(\lambda+2\mu)\,\frac{(\lambda+2\mu)(1-u_{3,3}^*)^2 - \mu}{(V_1^\circ - \mu)^2}\,u_{1,3}^{+2} \tag{2.10}$$

$$V_2 = \mu \pm \mu u_{1,3}^+\left(\frac{(\lambda+2\mu)[u_{3,3}]}{(1-u_{3,3}^+)(\mu - V_1^\circ)}\right)^{1/2} \tag{2.11}$$

При получении (2.10) удерживались члены, содержащие $u_{1,3}^+$ в степени не выше второй, а в (2.11) — не выше первой. При этом предполагалось неравенство

$$|u_{1,3}^+| \ll |[u_{3,3}]|$$

Для небольших деформаций среды выполняется неравенство $(1 - u_{3,3}^+)(\mu - V_1^\circ) < 0$, поэтому из (2.11) вытекает, что обе ударные волны из (2.11) возможны только при условии

$$[u_{3,3}] \leqslant 0 \tag{2.12}$$

Вообще говоря, кубическое уравнение (2.8) всегда имеет один действительный корень, а два других зависят от знака дискриминанта этого уравнения. Неравенство (2.12) следует понимать как условие положительности дискриминанта, что обеспечивает действительность всех трех корней. Это неравенство является одним из следствий качественного влияния нелинейных членов. В линейном приближении, или когда учитываются не все нелинейные члены, это условие отсутствует.

Из уравнения (2.8) можно получить скорости распространения звуковых волн. Для этого достаточно положить $u_{3,3}^+ = u_{3,3}^- = u^*_{,3}$ и всюду знаки плюс и минус опустить

$$V_1 = V_2 = {}^1/_2\mu + {}^1/_2(\lambda + 2\mu)\{(1 - u_{3,3})^2 + u_{1,3}^2\} \pm {}^1/_2 D^{1/2}$$
$$D = \{\mu - (\lambda + 2\mu)(1 - u_{3,3})^2\}^2 + (\lambda + 2\mu)\{2(\lambda + 2\mu)(1 - u_{3,3})^2 + 2\mu + (\lambda + 2\mu)u_{1,3}^2\}u_{1,3}^2, \quad V_3 = \mu \tag{2.13}$$

Скорости распространения звуковых волн близки к скоростям слабых ударных волн. Таким образом, слабые ударные волны, а также звуковые волны в трехмерной упругой среде могут распространяться с тремя различными скоростями, одна из которых равна скорости поперечной волны в линейном приближении.

Поступила 28 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
2. Thomas T. Y. Plastic flow and fracture in solids. Acad. Press, 1961, New York — London. (Рус. перев: Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир.», 1964).