Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Г. С. Маркман, В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача об устойчивости несжимаемого упругого стержня переменной жесткости, сжатого вдоль оси. Доказывается законность линеаризации и исследуются возникающие при потере устойчивости формы равновесия.

После сведения соответствующей краевой задачи к уравнению с вполне непрерывным оператором можно применить теорему М. А. Красносельского [1] о бифуркации. При использовании этой теоремы главную трудность представляет доказательство простоты (или нечетнократности) собственного числа соответствующей линеаризованной задачи.

В работе И. А. Бахтина и М. А. Красносельского [2] был рассмотрен случай шарнирного закрепления концов стержня. В этом случае линеаризованное уравнение — второго порядка, и простота собственных значений вытекает из теории Штурма — Лиувилля. В данной работе (§ 2) рассматриваются более сложные случаи закрепления и приходится исследовать спектр дифференциального уравнения $Au = \lambda Bu$, где A — дифференциальный оператор четвертого порядка, B — второго порядка. Это уравнение сводится к уравнению $Nu = \lambda u$, где N — дифференциальный оператор второго порядка. При этом сведении может возникнуть задача с нештурмовыми краевыми условиями. В таком случае для доказательства простоты спектра используются результаты П. Д. Калафати по дифференциальным операторам второго порядка [3].

Заметим, что законность линеаризации в задаче устойчивости пластины была обоснована И. И. Воровичем в работах [1] [4].

В § 3 исследуется характер ветвления четных форм равновесия симметричного стержня. При помощи метода Ляпунова — Шмидта показано, что безмоментное напряженное состояние стержня теряет устойчивость, когда параметр нагрузки становится больше первого собственного числа линеаризованной задачи (эйлеровой критической силы). При этом возникают две новые формы равновесия.

Установлено также, что потеря устойчивости носит эйлеров характер: когда параметр нагрузки меньше эйлеровой критической силы, нет других форм равновесия, кроме безмоментного.

Пример (3.9) показывает, что нечетные формы равновесия могут в случае упругой заделки возникать при докритических значениях параметра нагрузки.

§ 1. Уравнение равновесия и краевые условия. Рассмотрим несжимаемый упругий стержень переменного сечения, упруго защемленный в упругих опорах. Стержень сжимается двумя горизонтальными силами λ, приложенными к концам. Введем следующие обозначения: E — модуль Юнга материала стержня, s — длина дуги стержня, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки, $j(s)$ — момент инерции сечения стержня в точке s. Функция $y(s)$ — прогиб стержня, отсчитываемый от безмоментного состояния равновесия.

---

[1] Ворович И. И. Некоторые математические вопросы нелинейной теории оболочек. Диссертация, ЛГУ, 1958.

Потенциальная энергия изогнутого стержня имеет вид

$$U = {}^1/_2 \int_{-1}^{1} \frac{EJy''^2}{1-y'^2}\,ds - \lambda \int_{-1}^{1} [1-\sqrt{1-y'^2}]\,ds + {}^1/_2\alpha_1 y^2(-1) + {}^1/_2\alpha_2 y^2(1) +$$
$$+ {}^1/_2\gamma_1 \arcsin^2 y'(-1) + {}^1/_2\gamma_2 \arcsin^2 y'(1) \tag{1.1}$$

где $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ — коэффициенты упругости опор, $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$ — коэффициенты упругости защемления.

Условие экстремума энергии $\delta U = 0$ приводит к уравнению равновесия

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{\sqrt{1-y'^2}}\frac{d}{ds}\frac{EJy''}{\sqrt{1-y'^2}} = -\lambda\frac{d}{ds}\frac{y'}{\sqrt{1-y'^2}} \tag{1.2}$$

и краевым условиям

$$\frac{d}{ds}\frac{EJy''}{\sqrt{1-y'^2}} = -\alpha_1 y\sqrt{1-y'^2} - \lambda y'\Big|_{s=-1}, \quad \frac{d}{ds}\frac{EJy''}{\sqrt{1-y'^2}} = \alpha_2 y\sqrt{1-y'^2} - \lambda y'\Big|_{s=1}$$
$$\frac{EJy''}{\sqrt{1-y'^2}} = \gamma_1 \arcsin y'\Big|_{s=-1}, \qquad \frac{EJy''}{\sqrt{1-y'^2}} = -\gamma_2 \arcsin y'\Big|_{s=1} \tag{1.3}$$

В случае жесткого защемления обоих концов стержня ($\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \infty$) краевые условия имеют вид

$$y(\mp 1) = y'(\mp 1) = 0 \tag{1.4}$$

Если левый конец стержня жестко защемлен, а правый шарнирно оперт ($\alpha_1 = \gamma_1 = \alpha_2 = \infty$, $\gamma_2 = 0$), имеем

$$y(\mp 1) = y'(-1) = y''(1) = 0 \tag{1.5}$$

Рассматриваемая система при любом из краевых условий (1.3), (1.4), (1.5) консервативна.

Пусть стержень сжимается следящими силами λ, приложенными по концам, т. е. силами, направление которых (в каждый момент времени) совпадает с касательной к упругой линии стержня. Такая система неконсервативна. Краевые условия при этом имеют вид (1.6)

$$\frac{d}{ds}\frac{EJy''}{\sqrt{1-y'^2}} = -\alpha_1 y\sqrt{1-y'^2}\Big|_{s=-1}, \qquad \frac{d}{ds}\frac{EJy''}{\sqrt{1-y'^2}} = \alpha_2 y\sqrt{1-y'^2}\Big|_{s=1}$$
$$\frac{EJy''}{\sqrt{1-y'^2}} = \gamma_1 \arcsin y'\Big|_{s=-1}, \qquad \frac{EJy''}{\sqrt{1-y'^2}} = -\gamma_2 \arcsin y'\Big|_{s=1}$$

§ 2. О бифуркации равновесий стержня переменной жесткости. 2.1°. *Сведение к операторному уравнению.* Нелинейное уравнение равновесия (1.2) есть частный случай уравнения

$$(EJy'')'' + \lambda y'' = f(s, y, y', y'', y''', \lambda) \tag{2.1}$$
$$\left(\lim_{t\to 0}\frac{f(s, ty, ty', ty'', ty''', \lambda)}{t} = 0\right)$$

где $f(s, y, y', y'', y''', \lambda)$ — непрерывно дифференцируемая при $|s| \leqslant 1$ и достаточно малых y, y', y'', y''' функция своих аргументов.

Обращая линейную часть дифференциального оператора (1.2) при $\lambda = 0$, сведем каждую из краевых задач (1.3) — (1.6) к операторному уравнению вида $y = K(y, \lambda)$ с вполне непрерывным в $C^{(4)}(-1, 1)$ оператором.

Например, в случаях (1.4), (1.5) оператор K имеет вид

$$(Ky)(s) = -\lambda \int_{-1}^{1} G(s, \xi)\, y''(\xi)\, d\xi + \int_{-1}^{1} G(s, \xi)\, f(\xi, y, y', y'', y''', \lambda)\, d\xi \qquad (2.2)$$

где $G(s, \xi)$ — функция Грина при этих краевых условиях. Производная Фреше оператора K в точке $y = 0$ есть линейный оператор

$$(Gy)(s) = -\lambda \int_{-1}^{1} G(s, \xi)\, y''(\xi)\, d\xi \qquad (2.3)$$

Согласно теореме М. А. Красносельского [1], каждое нечетнократное характеристическое число оператора G есть точка бифуркации оператора K, причем этой точке бифуркации отвечает непрерывная ветвь собственных векторов оператора K.

2.2°. *Спектр линейной задачи и бифуркация.*. Задача на собственные значения для оператора (2.3) эквивалентна, очевидно, спектральной задаче для линеаризованного уравнения

$$(EJy'')'' = -\lambda y'' \qquad (2.4)$$

с линеаризованными краевыми условиями. При этом условия (1.4) и (1.5) остаются без изменения, а условия (1.3) и (1.6) приводятся соответственно к следующим:

$$\begin{aligned} &(EJy'')' = -\alpha_1 y - \lambda y' |_{s=-1}, && (EJy'')' = \alpha_2 y - \lambda y' |_{s=1} && (2.5)\\ &EJy'' = \gamma_1 y' |_{s=-1}, && EJy'' = -\gamma_2 y' |_{s=1} \\ &(EJy'')' = -\alpha_1 y |_{s=-1}, && (EJy'')' = \alpha_2 y |_{s=1} && (2.6)\\ &EJy'' = \gamma_1 y' |_{s=-1}, && EJy'' = -\gamma_2 y' |_{s=1} \end{aligned}$$

Существование бесконечной последовательности положительных собственных значений уравнения (2.4) с краевыми условиями (2.5), (1.4), (1.5) вытекает из известных вариационных теорем [5].

Теорема 2.1. Задача (2.4), (1.5) имеет бесконечную последовательность собственных значений. Все собственные значения положительные, простые и являются точками бифуркации нелинейного оператора K.

Доказательство. Дважды интегрируя уравнение (2.4), получим

$$E\,Jy'' + \lambda y = \lambda c_1 s + \lambda c_2 \qquad (2.7)$$

Сделав замену $y(s) = v(s) + c_1 s + c_2$ в уравнении и краевых условиях и исключив неизвестные постоянные c_1 и c_2, получим эквивалентную задачу Штурма—Лиувилля

$$EJv'' + \lambda v = 0, \quad v(-1) + 2v'(-1) = 0, \quad v(1) = 0 \qquad (2.8)$$

Соответствующая функция Грина является осцилляционной (см. [6]), а потому все собственные значения положительные и простые.

2.3°. При исследовании задачи (2.4), (1.4) воспользуемся результатами П. Д. Калафати [3]. В этой работе рассмотрено дифференциальное уравнение второго порядка

$$Ly = \lambda\rho(x)\,y$$

$$Ly = -d/dx\,(py') + qy, \quad p(x) > 0, \quad q(x) > 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}\,y(a) + \alpha_{12}\,y'(a) + \beta_{11}\,y(b) + \beta_{12}\,y'(b) = 0 \\ &\alpha_{21}\,y(a) + \alpha_{22}\,y'(a) + \beta_{21}\,y(b) + \beta_{22}\,y'(b) = 0 \end{aligned} \qquad (2.9)$$

В работе [3] даны следующие достаточные условия того, что функция Грина оператора L является четным или нечетным K-ядром.

Матрица коэффициентов условий (2.9)

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \end{Vmatrix} \qquad (2.10)$$

Обозначим символом $\{i, k\}$ определитель второго порядка матрицы (2.10), в состав которого входят столбцы с номерами i и k $(i < k)$. Если выполняются условия

$$\{2,4\} \neq 0, \qquad \{2,4\} \cdot \{1, 2\} > 0 \qquad (2.11)$$

то функция Грина оператора L является нечетным K-ядром. Если же

$$\{2,4\} \neq 0, \qquad \{2,4\} \cdot \{1,2\} < 0 \qquad (2.12)$$

то функция Грина — четное K-ядро.

Теорема 2.2. Задача (2.4), (1.4) имеет бесконечную последовательность собственных значений. Все собственные значения не более чем двукратны: $0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 < \ldots$; при четном n соответствующая собственная функция имеет не более чем $n + 3$ нулей, а при нечетном n — не более чем $n + 2$ нулей в интервале $(-1, 1)$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы (2.1), перейдем к рассмотрению задачи второго порядка

$$EJv'' + \lambda v = 0, \; v(1) - v(-1) = 2v'(1), \; v'(1) - v'(-1) = 0 \qquad (2.13)$$

Краевые условия задачи (2.13) нештурмовы. Из (2.12) следует, что функция Грина оператора EJv'' является четным K-ядром. Следовательно, все собственные значения не более чем двукратны

$$0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 < \ldots$$

при этом n-я собственная функция v_n при четном n имеет n или $n + 1$ нуль, а при нечетном n имеет n или $n - 1$ нуль. Отсюда, по теореме Ролля, получаем оценку числа нулей собственной функции y_n.

2.4°. Рассмотрим симметричный $(J(s) = J(-s))$ стержень, сжимаемый горизонтальными силами λ. В соответствующих краевых условиях (1.3) и (2.5) при этом $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\gamma_1 = \gamma_2$. Выписав функцию $f(s, y, y', y'',$

y''', λ) в уравнении (1.2), нетрудно убедиться, что оператор $(Fy)(s) = f(s, y, y', y'', y''', \lambda)$ переводит четные функции $y(s)$ в четные, а нечетные — в нечетные. Будем исследовать симметричные формы равновесия стержня, для этого рассмотрим задачу (2.4), (2.5) на подпространстве четных функций.

Теорема 2.3. На подпространстве четных функций задача (2.4), (2.5) имеет бесконечную последовательность собственных значений. Все собственные значения положительные, простые и являются точками бифуркации оператора K.

Доказательство. Как и в предыдущих теоремах, переходим к эквивалентной при $\lambda \neq 0$ задаче

$$EJv'' + \lambda v = 0, \qquad \gamma v'(1) = \lambda v(1), \qquad v'(0) = 0 \tag{2.14}$$

Покажем, что задачу (2.14) можно свести к нагруженному интегральному уравнению с монотонно растущей функцией $\sigma(\xi)$ и осцилляционным ядром. Так как $\lambda_0 = 0$ — собственное число задачи (2.14), удобно ввести новый параметр μ, полагая $\lambda = \mu - \varepsilon$. Задача (2.14) примет вид

$$Bv \equiv EJv'' - \varepsilon v = \mu v, \quad \gamma v'(1) + \varepsilon v(1) = \mu v(1), \quad v'(0) = 0 \tag{2.15}$$

Функция Грина краевой задачи (2.15) имеет вид

$$G(s, \xi) = \begin{cases} v_1(s)\, v_2(\xi) & (0 \leqslant s \leqslant \xi \leqslant 1) \\ v_1(\xi)\, v_2(s) & (0 \leqslant \xi \leqslant s \leqslant 1) \end{cases} \tag{2.16}$$

Функции v_1 и v_2 удовлетворяют условиям

$$Bv_1 = Bv_2 = 0, \ \gamma v_1'(1) + \varepsilon v_1'(1) = v_2'(0) = 0, \ v_1 v_2' - v_1' v_2 = 1$$

Решение задачи (2.15) имеет вид

$$v(s) = \mu \int_0^1 G(s, \xi)\, v(\xi)\, d\xi - \mu v(1)\, \psi(s) \tag{2.17}$$

где

$$\psi(s) = -G(s, 1)\, \gamma^{-1} EJ(1) \tag{2.18}$$

Подставив (2.18) в (2.17), получим

$$v(s) = \mu \int_0^1 G(s, \xi)\, v(\xi)\, d\xi + \mu G(s, 1)\, \gamma^{-1} EJ(1)\, v(1) =$$

$$= \mu \int_0^1 G(s, \xi)\, v(\xi)\, d\sigma(\xi), \qquad \sigma(\xi) = \begin{cases} \xi & (0 \leqslant \xi < 1) \\ 1 + E\gamma^{-1} J(1) & (\xi = 1) \end{cases}$$

Функция Грина $G(s, \xi)$ — осцилляционная [6]. Утверждения теоремы вытекают из теории нагруженных интегральных уравнений с осцилляционным ядром [6].

Замечание. Осцилляционность функции Грина задач (2.8) и (2.15) позволяет доказать, что n-я собственная функция задач (2.4), (1.5) и (2.4), (2.5) имеет не более чем n нулей в интервале (—1, 1).

Из (2.4) следует соотношение

$$y_n(s) = \lambda^2 \int_0^1 G(s, \xi) \frac{v_n(\xi)}{EJ(\xi)} d\xi \tag{2.19}$$

Функция $v_n(\xi)$ имеет, по доказанному ранее, n нулей в интервале (—1, 1). Согласно результатам М. Г. Крейна [6] из (2.19) следует, что $y_n(s)$ имеет не более чем n нулей в интервале (—1, 1).

Задачу (2.4), (1.4) можно рассмотреть на подпространствах четных и нечетных функций отдельно. При таком исследовании симметричных и антисимметричных форм равновесия стержня получены теоремы, аналогичные теореме 2.3.

§ 3. **Ветвление.** *Теорема* 3.1. В случае условий закрепления (1.3) и (1.4) для симметричного стержня в классе четных форм равновесия не существует форм равновесия, отличных от безмоментной, если $\lambda \leqslant \lambda_0$ — первого собственного числа линеаризованной задачи. Когда λ становится больше λ_0, безмоментное решение теряет устойчивость и рождаются две новые формы равновесия, представимые в виде степенного ряда по параметру $\varepsilon = \sqrt{\lambda - \lambda_0}$

$$y_{1,2}(s) = \mp \varepsilon c y_0 + O(\varepsilon^2) \tag{3.1}$$

где постоянная c — положительна и определяется формулой (3.8).

Доказательство. Предположим, что при некотором λ существует четное ненулевое решение задачи (1.2), (1.3). Покажем, что тогда $\lambda > \lambda_0$. Умножая уравнение (1.2) на функцию

$$z(s) = \int_{-1}^{s} y' \sqrt{1 - y'^2}\, dt$$

и интегрируя по s от —1 до 1, получим

$$\lambda = [J^{(1)} + 2\gamma y'(1) \arcsin y'(1)] / J^{(2)} = J_1(y) \tag{3.2}$$

$$J^{(1)} = \int_{-1}^{1} \frac{EJy''}{\sqrt{1 - y'^2}} ds, \qquad J^{(2)} = \int_{-1}^{1} y'^2 ds$$

С другой стороны, собственное число λ_0 можно определить посредством вариационного принципа

$$\lambda_0 = \min J_2(y), \quad J_2(y) = \frac{1}{J^{(2)}} \left(\int_{-1}^{1} EJy''^2 ds + 2\gamma y'^2(1) \right) \tag{3.3}$$

где минимум берется по множеству четных гладких функций. Легко видеть, что $J_1(y) > J_2(y)$ для всех y. Поэтому из (3.2) и (3.3) следует, что $\lambda > \lambda_0$. В случае условий (1.4) доказательство аналогичное.

Для исследования ветвления применим метод Ляпунова — Шмидта. Решение будем искать в виде степенного ряда

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_k, \qquad \varepsilon = \sqrt{\lambda - \lambda_0} \tag{3.4}$$

Подстановка в уравнение (1.2) и краевые условия приводит к цепочке дифференциальных уравнений

$$Py_1 = (EJy_1'')'' + \lambda_0 y_1'' = 0, \; Py_2 = 0 \tag{3.5}$$

$$Py_3 = -{}^1/_2\lambda_0 y_1'' y_1'^2 - 3(EJy_1'')' y_1' y_1'' - EJy_1''(y_1'y_1'')' - y_1'' \tag{3.6}$$

. . . .

Из (3.5) получим, что $y_1 = cy_0$, где y_0 — решение соответствующей линеаризованной задачи, c — неизвестная постоянная, которую определим из условия разрешимости уравнения (3.6). В случае (1.4), например, получим

$$c^2 = -\frac{1}{r}\int_{-1}^{1} y_0 y_0'' ds \tag{3.7}$$

$$r = \int_{-1}^{1} [{}^1/_2\lambda_0 y_0'' y_0'^2 + 3(EJy_0'')' y_0' y_0'' + EJy_0''(y_0'y_0'')'] \, y_0 ds$$

Интегрируя по частям и используя краевые условия, получим

$$c^2 = \frac{6}{\lambda_0}\left(\int_{-1}^{1} y_0'^2 ds\right)\left(\int_{-1}^{1} y_0'^4 ds\right)^{-1} > 0 \tag{3.8}$$

Сходимость ряда (3.4) при достаточно малом ε и существование пары равновесий (3.1) следует теперь из (3.8) и известных результатов о методе Ляпунова — Шмидта (см., например, [7]). Равенство (3.8) верно и в случае закрепления (1.3). Заметим, что требование четности существенно. В случае (1.3) решения могут существовать при нагрузках меньших, чем первое критическое число линеаризованной задачи. Например, если $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, то при $\lambda \geqslant 0$ существуют нечетные решения

$$y(s) = \mp s\sqrt{1 - \lambda^2/\alpha^2} \tag{3.9}$$

тогда как первое критическое число равно α.

Нетрудно показать, что для симметричного стержня неконсервативная задача (1.2), (1.6) заменой

$$y(s) = v(s) + \frac{\lambda v'(1)}{\alpha\sqrt{1 - v'^2(1)}}, \qquad v(s) = y(s) - \frac{\lambda y'(1)}{\alpha\sqrt{1 - y'^2(1)}}$$

сводится к задаче (1.2), (1.3). Следовательно, и здесь верны теоремы 2.3 и 3.1. В данном случае это, однако, не исчерпывает вопроса о потере устойчивости стержня, так как в неконсервативных системах возможна еще и колебательная неустойчивость. Например, это имеет место в случае $\alpha_1 = \gamma_1 = \infty$, $\alpha_2 = \gamma_2 = 0$ (см. [8]).

Вопрос о существовании и устойчивости автоколебательных режимов заслуживает отдельного исследования. Может оказаться, что при некоторых значениях параметров имеют место оба типа потери устойчивости. В такой ситуации нужно еще выяснить, какому из них отвечает меньшая критическая нагрузка.

Авторы благодарят за ценные замечания И. И. Воровича и Л. Б. Царюка.

Поступила 27 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.
2. Бахтин И. А., Красносельский М. А. К задаче о продольном изгибе стержня переменной жесткости. Докл. АН СССР, 1955, т. 105, № 4.
3. Калафати Н. Д. *К*-свойства функции Грина линейных дифференциальных систем второго порядка. Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1957, т. 80, Зап. матем, отд. физ.-мат. фак-та и Харьковск, матем. об-ва. Сер. 4, т. 25.
4. Ворович И. И. Некоторые вопросы устойчивости оболочек в большом. Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 1.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957.
6. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем. М.— Л., Гостехиздат. 1941.
7. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Усп. матем. н. 1962, т. 17, вып. 2.
8. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.