

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛИТЫ

И. И. Ворович, И. Г. Кадомцев

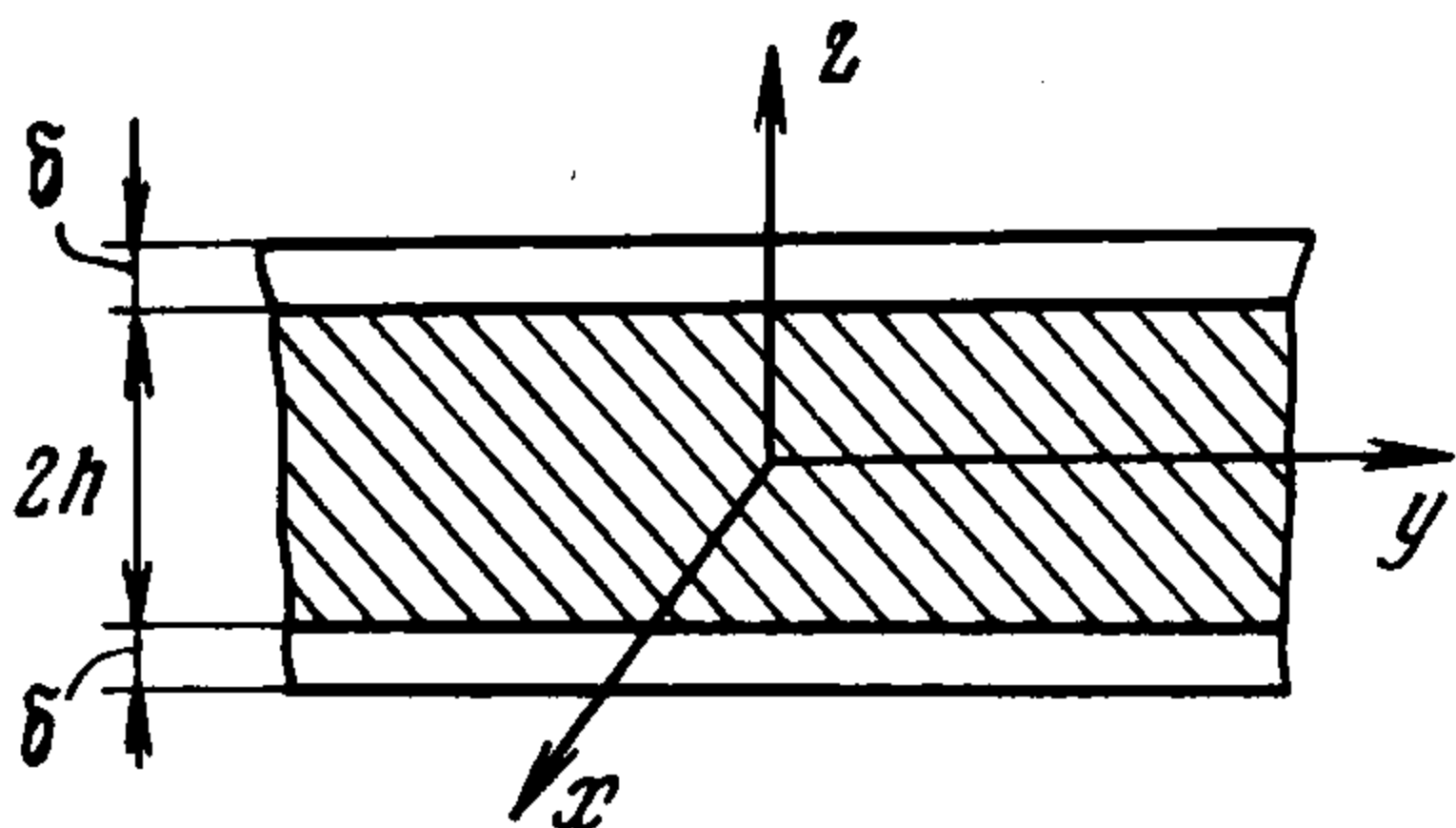
(Ростов-на-Дону)

Проблема предельного перехода от трехмерных задач теории упругости к двумерным для многослойных плит исследовалась в работах [1,2]. Основываясь на методах, разработанных в работах А. Л. Гольденвейзера [3,4], в этих работах был построен первый итерационный процесс.

Ниже дается построение однородных решений задачи теории упругости для трехслойной плиты симметричного строения. Как и в случае однородной плиты [6], показано, что полное решение состоит из бигармонического, потенциального и вихревого. Потенциальное и вихревое решения носят характер краевого эффекта. Сравнение их со случаем однородной плиты показывает, что краевые эффекты могут быть как слабее, так и сильнее, в зависимости от физических и геометрических параметров трехслойной плиты.

На базе построенного решения анализируется точность некоторых прикладных теорий [6] и устанавливаются пределы их применимости.

§ 1. Рассмотрим трехслойную плиту, составленную из изотропных слоев, симметричную относительно срединной плоскости среднего слоя (фиг. 1). Обозначим через μ_i модуль сдвига, i — номер слоя, σ_i — коэффициент Пуассона. Пусть внешние слои толщиной δ имеют упругие характеристики ν_1 и μ_1 , внутренний слой толщиной $2h$ имеет упругие характеристики ν_2 и μ_2 .



Полагаем, что внешние плоские грани свободны от усилий, т. е. рассматриваем однородные решения. Для построения решения используем метод, предложенный в работах [5,7]. Удовлетворяя условиям сопряжения перемещений и напряжений в месте соединения слоев и условиям однородности на внешних гранях, получим три типа напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты: бигармоническое, потенциальное и вихревое.

Бигармоническое решение имеет вид

$$\begin{aligned} u_2^{(1)} &= \lambda a [(\nu_2 + 1) \zeta \partial \psi / \partial \xi - 1/2 (\nu_2 + 1/3) \zeta^3 \lambda^2 \partial \Delta \psi / \partial \xi] \\ v_2^{(1)} &= \lambda a [(\nu_2 + 1) \zeta \partial \psi / \partial \eta - 1/2 (\nu_2 + 1/3) \zeta^3 \lambda^2 \partial \Delta \psi / \partial \eta] \\ w_2^{(1)} &= -(\nu_2 + 1) a \psi + a \lambda^2 [2\nu_2 f_1(0) - 1/2 (\nu_2 - 1) \zeta^2] \Delta \psi \\ \sigma_{z,2}^{(1)} &= 0 \quad (\nu_i = 1 / (1 - 2\sigma_i)) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xz,2}^{(1)} &= 2\mu_2 v_2 \lambda^2 f_1 \partial \Delta \psi / \partial \xi, & \tau_{yz,2}^{(1)} &= 2\mu_2 v_2 \lambda^2 f_1 \partial \Delta \psi / \partial \eta \\
\sigma_{x,2}^{(1)} &= 2\mu_2 \lambda \left\{ \left[2v_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + (v_2 - 1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right] \zeta - \left(v_2 + \frac{1}{3} \right) \frac{\zeta^3}{2} \lambda^2 \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial \xi^2} \right\} \\
\sigma_{y,2}^{(1)} &= 2\mu_2 \lambda \left\{ \left[2v_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + (v_2 - 1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right] \zeta - \left(v_2 + \frac{1}{3} \right) \frac{\zeta^3}{2} \lambda^2 \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial \eta^2} \right\} \\
\tau_{xy,2}^{(1)} &= 2\mu_2 \lambda \left[(v_2 + 1) \zeta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} - (v_2 + 1/3) \frac{\zeta^3}{2} \lambda^2 \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial \xi \partial \eta} \right] \\
u_1^{(1)} &= u_2^{(1)} + a \lambda^3 f_2 \partial \Delta \psi / \partial \xi, & v_1^{(1)} &= v_2^{(1)} + a \lambda^3 f_2 \partial \Delta \psi / \partial \eta \\
w_1^{(1)} &= w_2^{(1)} + a \lambda^2 \theta_2 (\zeta^2 - \lambda_1^2) \Delta \psi, & \sigma_{z,1}^{(1)} &= 0 \\
\tau_{xz,1}^{(1)} &= 2\mu_1 v_1 \theta_1 (1 - \zeta^2) \lambda^2 \partial \Delta \psi / \partial \xi \\
\tau_{yz,1}^{(1)} &= 2\mu_1 v_1 \theta_1 (1 - \zeta^2) \lambda^2 \partial \Delta \psi / \partial \eta \\
\sigma_{x,1}^{(1)} &= p^{-1} \sigma_{x,2}^{(1)} + 2\mu_1 (-2\theta_2 \zeta \lambda \Delta \psi + \lambda^3 f_2 \partial^2 \Delta \psi / \partial \xi^2) \\
\sigma_{y,1}^{(1)} &= p^{-1} \sigma_{y,2}^{(1)} + 2\mu_1 (-2\theta_2 \zeta \lambda \Delta \psi + \lambda^3 f_2 \partial^2 \Delta \psi / \partial \eta^2) \\
\tau_{xy,1}^{(1)} &= p^{-1} \tau_{xy,2}^{(1)} + 2\mu_1 \lambda^3 f_2 \partial^2 \Delta \psi / \partial \xi \partial \eta \\
\xi &= \frac{x}{a}, & \eta &= \frac{y}{a}, & \zeta &= \frac{z}{h + \delta}, & \lambda &= \frac{h + \delta}{a}, & \lambda_1 &= \frac{h}{h + \delta} \\
\lambda_2 &= \frac{\delta}{h + \delta}, & p &= \frac{\mu_2}{\mu_1}, & \theta_1 &= \frac{1 + v_2}{1 + v_1}, & \theta_2 &= \frac{v_2 - v_1}{1 + v_1} \\
f_1 &= \lambda_1^2 + p^{-1} v_1 v_2^{-1} \theta_1 (1 - \lambda_1^2) - \zeta^2 \\
f_2 &= \theta_2 (1/3 \zeta^3 - \zeta \lambda_1^2 + 2/3 \lambda_1^3) - 2v_1 \theta_1 (1 - p^{-1}) (1 - \lambda_1^2) (\zeta - \lambda_1)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь a — характерный линейный размер трехслойной плиты в xy плоскости, Δ — оператор Лапласа, ψ — некоторая бигармоническая функция переменных ζ, η .

Из соотношений (1.2) видно, что для малых λ и больших p перемещения $u_1^{(1)}, v_1^{(1)}$ определяются перемещениями $u_2^{(1)}, v_2^{(1)}$ с точностью до членов порядка λ^3 . Если же $p \sim \lambda^2$, то поправки становятся порядка первого члена. А величина $w_1^{(1)}$ определяется $w_2^{(1)}$ с точностью до членов порядка λ^2 и поправки не зависят от p .

Потенциальное решение имеет вид (здесь и в дальнейшем суммирование по k от 1 до ∞)

$$\begin{aligned}
u_i^{(2)} &= \lambda a \sum a_{ik} \frac{\partial C_k}{\partial \xi}, & v_i^{(2)} &= \lambda a \sum a_{ik} \frac{\partial C_k}{\partial \eta}, & w_i^{(2)} &= a \sum b_{ik} C_k \\
\tau_{xz,i}^{(2)} &= 2\mu_i \sum r_{ik} \frac{\partial C_k}{\partial \xi}, & \tau_{yz,i}^{(2)} &= 2\mu_i \sum r_{ik} \frac{\partial C_k}{\partial \eta} \\
\sigma_{x,i}^{(2)} &= 2\mu_i \left[\frac{v_i - 1}{\lambda} \sum s_{ik} C_k + \lambda \sum a_{ik} \frac{\partial^2 C_k}{\partial \xi^2} \right] \\
\sigma_{y,i}^{(2)} &= 2\mu_i \left[\frac{v_i - 1}{\lambda} \sum s_{ik} C_k + \lambda \sum a_{ik} \frac{\partial^2 C_k}{\partial \eta^2} \right] \\
\sigma_{z,i}^{(2)} &= \frac{2\mu_i}{\lambda} \sum t_{ik} C_k, & \tau_{xy,i}^{(2)} &= 2\mu_i \lambda \sum a_{ik} \frac{\partial^2 C_k}{\partial \xi \partial \eta}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$a_{2k} = E_{1k} \sin \gamma_k \zeta + E_{2k} \zeta \cos \gamma_k \zeta \tag{1.4}$$

$$b_{2k} = E_{1k} \gamma_k \cos \gamma_k \zeta - E_{2k} [\gamma_k \zeta \sin \gamma_k \zeta + (2 + v_2) v_2^{-1} \cos \gamma_k \zeta]$$

$$r_{2k} = E_{1k} \gamma_k \cos \gamma_k \zeta - E_{2k} [\gamma_k \zeta \sin \gamma_k \zeta + v_2^{-1} \cos \gamma_k \zeta]$$

$$\begin{aligned}
t_{2k} &= -\gamma_k^2 \{E_{1k} \sin \gamma_k \zeta + E_{2k} [\zeta \cos \gamma_k \zeta - (1 + \nu_2^{-1}) \gamma_k^{-1} \sin \gamma_k \zeta]\} \\
s_{2k} &= E_{2k} \nu_2^{-1} \gamma_k \sin \gamma_k \zeta \\
a_{1k} &= D_{1k} \sin (\zeta - \lambda_1) \gamma_k + D_{2k} \cos (\zeta - \lambda_1) \gamma_k + \\
&\quad + D_{3k} (\zeta - \lambda_1) \sin (\zeta - \lambda_1) \gamma_k + D_{4k} (\zeta - \lambda_1) \cos (\zeta - \lambda_1) \gamma_k \\
b_{1k} &= D_{1k} \gamma_k \cos (\zeta - \lambda_1) \gamma_k - D_{2k} \gamma_k \sin (\zeta - \lambda_1) \gamma_k + \\
&\quad + D_{3k} [\gamma_k (\zeta - \lambda_1) \cos (\zeta - \lambda_1) \gamma_k - (1 + 2\nu_1^{-1}) \sin (\zeta - \lambda_1) \gamma_k] - \\
&\quad - D_{4k} [\gamma_k (\zeta - \lambda_1) \sin (\zeta - \lambda_1) \gamma_k + (1 + 2\nu_1^{-1}) \cos (\zeta - \lambda_1) \gamma_k] \\
r_{1k} &= D_{1k} \cos (\zeta - \lambda_1) \gamma_k - D_{2k} \sin (\zeta - \lambda_1) \gamma_k + \\
&\quad + D_{3k} [\gamma_k (\zeta - \lambda_1) \cos \gamma_k (\zeta - \lambda_1) - \nu_1^{-1} \sin (\zeta - \lambda_1) \gamma_k] - \\
&\quad - D_{4k} [\gamma_k (\zeta - \lambda_1) \sin (\zeta - \lambda_1) \gamma_k + \nu_1^{-1} \cos (\zeta - \lambda_1) \gamma_k] \\
t_{1k} &= -\gamma_k^2 \{D_{1k} \sin (\zeta - \lambda_1) \gamma_k + D_{2k} \cos (\zeta - \lambda_1) \gamma_k + \\
&\quad + D_{3k} [(\zeta - \lambda_1) \sin (\zeta - \lambda_1) \gamma_k + (1 + \nu_1) (\nu_1 \gamma_k)^{-1} \cos (\zeta - \lambda_1) \gamma_k] + \\
&\quad + D_{4k} [(\zeta - \lambda_1) \cos (\zeta - \lambda_1) \gamma_k - (1 + \nu_1) (\nu_1 \gamma_k)^{-1} \sin (\zeta - \lambda_1) \gamma_k]\} \\
s_{1k} &= \gamma_k \nu_1^{-1} [D_{4k} \sin (\zeta - \lambda_1) \gamma_k - D_{3k} \cos (\zeta - \lambda_1) \gamma_k] \\
E_{1k} &= \frac{1 + \nu_1}{\nu_1} \left\{ p \frac{1 + \nu_1}{\nu_1} \cos \lambda_2 \gamma_k \left(\lambda_1 \sin \lambda_1 \gamma_k + \frac{\cos \lambda_1 \gamma_k}{\nu_1 \gamma_k} \right) + \right. \\
&\quad + \lambda_1 \sin \lambda_2 \gamma_k \cos \lambda_1 \gamma_k (1 + p \nu_1^{-1}) + \lambda_1 \lambda_2 \gamma_k \cos (\lambda_1 - \lambda_2) \gamma_k (1 - p) - \\
&\quad - \frac{1}{\gamma_k} \frac{1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2} p \sin \lambda_1 \gamma_k \sin \lambda_2 \gamma_k - \\
&\quad \left. - \frac{\lambda_2}{\nu_2} [\sin \lambda_2 \gamma_k \cos \lambda_1 \gamma_k (p - 2 - \nu_2) - p \gamma_k^{-1} (1 + \nu_2) \sin \lambda_1 \gamma_k \cos \lambda_2 \gamma_k] \right\} \quad (1.5) \\
E_{2k} &= \frac{1 + \nu_1}{\nu_1} \left[p \frac{1 + \nu_1}{\nu_1} \cos \lambda_1 \gamma_k \cos \lambda_2 \gamma_k - \right. \\
&\quad \left. - \left(1 + \frac{p}{\nu_1} \right) \sin \lambda_1 \gamma_k \sin \lambda_2 \gamma_k - \lambda_2 \gamma_k (1 - p) \sin (\lambda_1 - \lambda_2) \gamma_k \right] \\
D_{1k} &= -\sin \lambda_2 \gamma_k \left\{ \frac{\lambda_1}{\nu_1^2} (1 - 2p - p \nu_2) (p + \nu_1) + \frac{\sin 2\lambda_1 \gamma_k}{2\gamma_k} \left[p^2 \frac{2 + \nu_1}{\nu_1^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2} + p \frac{(1 + \nu_1)^2}{\nu_2 \nu_1} - p \frac{2 + \nu_1}{\nu_1 \nu_2} \right] \right\} + \frac{1 + \nu_1}{\nu_1} \left(\lambda_2 \sin \lambda_2 \gamma_k + \frac{\cos \lambda_2 \gamma_k}{\nu_1 \gamma_k} \right) \\
&\quad p \frac{\nu_2 + 1}{\nu_2} \cos^2 \lambda_1 \gamma_k + \lambda_2 \cos \lambda_2 \gamma_k \left[\lambda_1 \gamma_k (1 - p) \left(p \frac{2 + \nu_1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_1} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sin 2\lambda_1 \gamma_k \left(p^2 \frac{2 + \nu_1}{\nu_1} - \frac{2 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2} + p \frac{3 + \nu_1}{\nu_1 \nu_2} \right) \right] \\
D_{2k} &= \frac{1 + \nu_1}{\nu_1} \left\{ p \frac{1 + \nu_1}{\nu_1} \cos \lambda_2 \gamma_k \left(\lambda_1 + \frac{\sin 2\lambda_1 \gamma_k}{\nu_2 \gamma_k} \right) + p \frac{1 + \nu_2}{\nu_2} \sin^2 \lambda_1 \gamma_k \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(\lambda_2 \cos \lambda_2 \gamma_k - \frac{\sin \lambda_2 \gamma_k}{\nu_1 \gamma_k} \right) + \lambda_2 \sin \lambda_2 \gamma_k \left[\lambda_1 \gamma_k (1 - p) - \frac{\sin 2\lambda_1 \gamma_k}{2\nu_2} (p - 2 - \nu_2) \right] \right\} \\
D_{3k} &= p \frac{(1 + \nu_2)(1 + \nu_1)}{\nu_2 \nu_1} \sin \lambda_2 \gamma_k \sin^2 \lambda_1 \gamma_k - \\
&\quad - p \frac{1 + \nu_1}{\nu_1} \cos \lambda_2 \gamma_k [\lambda_1 \gamma_k (1 - p) + \frac{1}{2} \sin 2\lambda_1 \gamma_k (p + \nu_2^{-1})] - \\
&\quad - \lambda_2 \gamma_k \sin \lambda_2 \gamma_k (1 - p) [\lambda_1 \gamma_k (1 - p) + \frac{1}{2} \sin 2\lambda_1 \gamma_k (p + 1 + 2\nu_2^{-1})]
\end{aligned}$$

$$D_{4k} = p \frac{(1 + v_2)(1 + v_1)}{v_2 v_1} \cos \lambda_2 \gamma_k \cos^2 \lambda_1 \gamma_k - \sin \lambda_2 \gamma_k \left[\lambda_1 \gamma_k (1 - p)(1 + p v_1^{-1}) + \right. \\ \left. + \frac{\sin 2\lambda_1 \gamma_k}{2v_1 v_2} (2v_1 + v_2 v_1 + p^2 v_2 - p v_1 + p) \right] - \lambda_2 \gamma_k \cos \lambda_2 \gamma_k (1 - p) [\lambda_1 \gamma_k (1 - p) + \\ + 1/2 \sin 2\lambda_1 \gamma_k (1 + p + 2v_2^{-1})]$$

Функции C_k , (ζ, η) определяются из уравнений

$$\frac{\partial^2 C_k}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 C_k}{\partial \eta^2} - \frac{\gamma_k^2}{\lambda^2} C_k = 0 \quad (1.6)$$

Буквой γ_k обозначены отличные от нуля корни функции

$$F(\gamma) = (p - 1)(\gamma^2 \lambda_2^2 - \sin^2 \gamma \lambda_2) [2\gamma \lambda_1 + (1 + 2v_2^{-1}) \sin 2\gamma \lambda_1] - \\ - p(p - 1)(2\gamma \lambda_1 - \sin 2\gamma \lambda_1) [\gamma^2 \lambda_2^2 - v_1^{-2} - (1 + 2v_1^{-1}) \cos^2 \gamma \lambda_2] + \\ + p(1 + v_1^{-1}) [(v_1 - v_2)(v_1 v_2)^{-1} (2\gamma \lambda_1 - \sin 2\gamma \lambda_1) + \\ + (1 + v_2^{-1})(2\gamma - \sin 2\gamma)] = 0 \quad (1.7)$$

Вихревое решение имеет вид

$$u_i^{(3)} = 2\lambda^2 a \Sigma l_{k,i} \frac{\partial B_k}{\partial \eta}, \quad v_i^{(3)} = -2\lambda^2 a \Sigma l_{k,i} \frac{\partial B_k}{\partial \xi}, \quad w_i^{(3)} = 0 \quad (1.8) \\ \tau_{xz,i}^{(3)} = 2\mu_i \lambda \Sigma l'_{k,i} \frac{\partial B_k}{\partial \eta}, \quad \tau_{yz,i}^{(3)} = -2\mu_i \lambda \Sigma l'_{k,i} \frac{\partial B_k}{\partial \xi}, \quad \sigma_{z,i}^{(3)} = 0 \\ \tau_{xy,i}^{(3)} = 2\mu_i \lambda^2 \Sigma l_{k,i} \left(\frac{\partial^2 B_k}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 B_k}{\partial \xi^2} \right), \quad \sigma_{x,i}^{(3)} = -\sigma_{y,i}^{(3)} = 4\mu_i \lambda^2 \Sigma l_{k,i} \frac{\partial^2 B_k}{\partial \xi \partial \eta} \\ l_{k,2} = \beta_k^{-1} \sin \beta_k \zeta \quad (1.9)$$

$$l_{k,1} = \beta_k^{-1} p \cos \lambda_1 \beta_k \sin (\zeta - \lambda_1) \beta_k + \beta_k^{-1} \sin \lambda_1 \beta_k \cos (\zeta - \lambda_1) \beta_k$$

Функции B_k (ξ, η) определяются из уравнений

$$\frac{\partial^2 B_k}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 B_k}{\partial \eta^2} - \frac{\beta_k^2}{\lambda^2} B_k = 0 \quad (1.10)$$

Величина β_k — корень уравнения

$$(1 + p) \cos \beta = (1 - p) \cos (2\lambda_1 - 1) \beta \quad (1.11)$$

§ 2. Покажем, что уравнение (1.11) имеет только вещественные корни. Обозначим

$$k = (1 - p)(1 + p)^{-1}, \quad \lambda_3 = 2\lambda_1 - 1$$

Так как $p \in (0, \infty)$, $\lambda_1 \in (0, 1)$, то $k \in (-1, 1)$, $\lambda_3 \in (-1, 1)$. Допустим уравнение (1.11) имеет комплексный корень $\beta = x + iy$. Разделяя действительную и мнимую части уравнения, имеем

$$\cos x \operatorname{ch} y = k \cos \lambda_3 x \operatorname{ch} \lambda_3 y, \quad \sin x \operatorname{sh} y = k \sin \lambda_3 x \operatorname{sh} \lambda_3 y$$

Отсюда

$$1 = k^2 \left[\cos^2 \lambda_3 x \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda_3 y}{\operatorname{ch} y} \right)^2 + \sin^2 \lambda_3 x \left(\frac{\operatorname{sh} \lambda_3 y}{\operatorname{sh} y} \right)^2 \right] \quad (2.1)$$

Так как

$$(\operatorname{ch} \lambda_3 y / \operatorname{ch} y)^2 < 1, \quad (\operatorname{sh} \lambda_3 y / \operatorname{sh} y)^2 < 1$$

то можно записать

$$1 < k^2 (\cos^2 \lambda_3 x + \sin^2 \lambda_3 x) = k^2$$

Но $|k| < 1$, что приводит к противоречию. Этим показано, что уравнение (1.11) не имеет комплексных корней. Предположим, что уравнение (1.11) имеет мнимый корень $\beta = i\alpha$, тогда уравнение (1.11) примет вид

$$\operatorname{ch} \alpha = k \operatorname{ch} \lambda_3 \alpha \quad (2.2)$$

но в силу того, что $|k| < 1$ и $|\lambda_3| < 1$, уравнение (2.2) вещественных корней не имеет, и, следовательно, уравнение (1.11) не имеет мнимых корней.

Рассмотрим, как ведет себя β_1 — первый положительный корень уравнения (1.11). Поскольку (1.8) представляет собой решение типа погранслоя, характер проникания решения внутрь области определяется β_1 . В случае однородной плиты уравнение (1.11) имеет вид

$$\cos \beta = 0 \quad (2.3)$$

Легко видеть, что при $p < 1$, т. е. при более слабом среднем слое, $\beta_1 < 1/2\pi$ и при $p \rightarrow 0$ величина β_1 стремится к нулю. Следовательно, в трехслойной плите со слабым средним слоем вихревое решение проникает внутрь области сильнее, чем в однородной плите, и характер проникания тем сильнее, чем слабее внутренний слой. Если же $p > 1$, то $\beta_1 > 1/2\pi$ и при $p \rightarrow \infty$ величина β_1 стремится к π . Следовательно, в случае жесткого заполнителя вихревое решение трехслойной плиты проникает внутрь области слабее, чем в однородной плите, и характер проникания тем слабее, чем жестче заполнитель.

Рассмотрим уравнение (1.7). Можно показать, что это уравнение не имеет мнимых корней, отсюда следует, что потенциальное решение — решение типа погранслоя. Разложим $F(\gamma)$ в ряд по γ

$$F(\gamma) = \gamma^{4/3} (1 + \nu_1^{-1}) p [p (1 + \nu_1^{-1}) \lambda_1^3 + (1 + \nu_2^{-1}) (1 - \lambda_1^3)] + \dots \quad (2.4)$$

Из (2.4) видно, что коэффициент при γ^4 не обращается в нуль при любых изменениях параметров, следовательно, дополнительных нулевых корней в уравнении (1.7) не будет.

Следуя [8], найдем асимптотические корни уравнения (1.7) в первом квадранте

$$\gamma_k = \operatorname{ctg} \varphi [\pi (2k - 1/2) + \arg Z] + i \ln |Z^{-1} 2\pi k \operatorname{ctg} \varphi| \quad (2.5)$$

Уравнение (1.7) в первом квадранте имеет три ветви асимптотических корней, соответствующие трем значениям Z и $\operatorname{ctg} \varphi$. При этом асимптоти-

ка корней зависит от λ_1

$$\text{а) } \lambda_1 < 1/3, \quad \text{ctg } \varphi_1 = 1/2 \lambda_1^{-1} \quad (2.6)$$

$$Z_1 = \frac{p(1 + \nu_1^{-1})(1 + \nu_2^{-1}) - 1/4(p-1)[1 + 2\nu_2^{-1} - (1 + 2\nu_1^{-1})p]}{\lambda_1(1-p)[1 + p(1 + 2\nu_1^{-1})]}$$

$$\text{ctg } \varphi_{2,3} = \frac{1}{1 - \lambda_1}, \quad Z_{2,3} = \pm \frac{1}{1 - \lambda_1} \left[\frac{1 + p(1 + 2\nu_1^{-1})}{2(1-p)} \right]^{1/2}$$

$$\text{б) } \lambda_1 = 1/3, \quad \text{ctg } \varphi_{1,2,3} = 3/2 \quad (2.7)$$

Значения Z_1, Z_2, Z_3 определяются из уравнения

$$16Z^3(1-p)^2 + 12Z^2(p-1)(p+1+2\nu_2^{-1}) + 18Z(p-1)[1+p(1+2\nu_1^{-1})] + 27p(1+\nu_1^{-1})(1+\nu_2^{-1}) - 27/4(p-1)[1+2\nu_2^{-1} - p(1+2\nu_1^{-1})] = 0$$

$$\text{в) } \lambda_1 > 1/3, \quad \text{ctg } \varphi_{1,2} = (1 - \lambda_1)^{-1} \quad (2.8)$$

$$Z_{1,2} = \pm \frac{1}{1 - \lambda_1} \left[\frac{p(1 + \nu_1^{-1})(1 + \nu_2^{-1}) - 1/4(p-1)[1 + 2\nu_2^{-1} - p(1 + 2\nu_1^{-1})]}{(1-p)[1 + p(1 + 2\nu_1^{-1})]} \right]^{1/2}$$

$$\text{ctg } \varphi_3 = 1/2 \lambda_1^{-1}, \quad Z_3 = \frac{1 + p(1 + 2\nu_1^{-1})}{\lambda_1(1-p)}$$

§ 3. В прикладных теориях часто используется гипотеза о касательных напряжениях, по которой $\tau_{xz,2}$ и $\tau_{yz,2}$ считаются постоянными по толщине среднего слоя. Исследуем границы применимости этой гипотезы. Из (1.1) находим]

$$\tau_{xz,2}^{(1) \max} = 2\mu_2 \nu_2 \lambda^2 [\lambda_1^2 + \nu_1(p\nu_2)^{-1} \theta_1(1 - \lambda_1^2)] \partial \Delta \psi / \partial \xi \quad (3.1)$$

$$\tau_{xz,2}^{(1) \min} = 2\mu_2 \nu_1 \lambda^2 \nu_1(p\nu_2)^{-1} \theta_1(1 - \lambda_1^2) \partial \Delta \psi / \partial \xi \quad (3.2)$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{\tau_{xz,2}^{(1) \max}}{\tau_{xz,2}^{(1) \min}} = 1 + \frac{p\nu_2}{\theta_1 \nu_1} \frac{\lambda_1^2}{1 - \lambda_1^2} \quad (3.3)$$

Чтобы выполнялась гипотеза о касательных напряжениях, необходимо

$$\frac{p\nu_2}{\theta_1 \nu_1} \frac{\lambda_1^2}{1 - \lambda_1^2} < \varepsilon \quad (3.4)$$

где ε — наперед заданное число, характеризующее точность гипотезы. Неравенство (3.4) зависит не только от отношения модулей упругости p , но и от безразмерной толщины среднего слоя λ_1 . От коэффициентов Пуассона неравенство (3.4) зависит слабо, поскольку для любых ν_i

$$1/2 \leq \nu_2 (\nu_1 \theta_1)^{-1} \leq 2 \quad (3.5)$$

Из (3.4) видно, что чем меньше λ_1 , тем больше расширяются границы применимости этой гипотезы. Для любых реальных материалов можно найти такое λ_1 , для которого гипотеза становится справедливой, и, наоборот, всегда можно найти такое λ_1 , для которого гипотеза не справедлива.

В качестве иллюстрации рассмотрим несколько примеров. Будем задавать ε и λ_1 и из (3.4) найдем p . Для простоты рассмотрим материалы с равными коэффициентами Пуассона. Предположим, что для гипотезы о касательных напряжениях точность 3%, следовательно, $\varepsilon = 0,03$. Приведем значения p , вычисленные из соотношения (3.4) для некоторых значений λ_1

$\lambda_1 = 0.05$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.95
$p < 12$	3	$3 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-3}$

Поступила 11 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейн-Заде М. И. Построение теории изгиба слоистых пластинок. Тр. Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Баку, М., «Наука», 1966.
2. Гусейн-Заде М. И. К построению теории изгиба слоистых пластинок. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
3. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
4. Гольденвейзер А. Л., Колос А. В. К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
5. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3.
6. Куршин Л. М. Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек. Сб. «Расчет пространственных конструкций», М., Госстройиздат, 1962, вып. 7, стр. 163—192.
7. Аксентян О. К., Ворович И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
8. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1961.