

УДВОЕНИЕ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ ПРИ С-БИФУРКАЦИЯХ В КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ

М. И. Фейгин

(Горький)

Рассматривается поведение динамической системы при нарушении условий существования периодического режима, связанных с изменением последовательности прохождения фазовой траекторией движения областей кусочной непрерывности. Показано, что в этих случаях возможно удвоение периода колебаний.

Кусочно-непрерывные динамические системы хорошо описывают поведение широкого класса машин: релейных, виброударных, с сухим трением и т. п. В таких системах возможны специфические нарушения условий существования периодического движения, связанные с изменением числа кусков фазовых траекторий, из которых «сшивается» траектория этого движения (С-бифуркации). В работе [1] было показано, что при С-бифуркации возможен не только переход периодического режима одного типа в режим другого типа, но и возможно слияние двух указанных режимов с последующим их исчезновением. (Оставались, однако, неизвестными примеры динамических систем, в которых бы эта возможность реализовалась.) Ниже показана возможность еще одного случая поведения системы при С-бифуркациях — удвоение периода колебаний. Получен критерий удвоения периода, а также критерий слияния и исчезновения двух режимов. Установлено, что из трех возможных случаев поведения системы при С-бифуркациях лишь один случай, а именно переход периодического режима одного типа в режим другого типа, будет следствием выбора математической модели рассматриваемой системы, т. е. негрубым по отношению к классу нелинейных характеристик [2]. В качестве примера сначала рассмотрен случай жесткого удвоения периода колебаний и случай слияния двух режимов при С-бифуркациях в линейной системе с ограничителем перемещения. Затем полученные результаты используются для приближенного выделения областей параметров, при которых возможны субгармонические колебания порядка $1/2$ в системе с симметричной характеристикой нелинейности, представленной полиномом третьей степени. Выделенные области хорошо совпадают с известными результатами экспериментальных исследований и моделирования на аналоговой машине, выполненных Т. Хаяси [3].

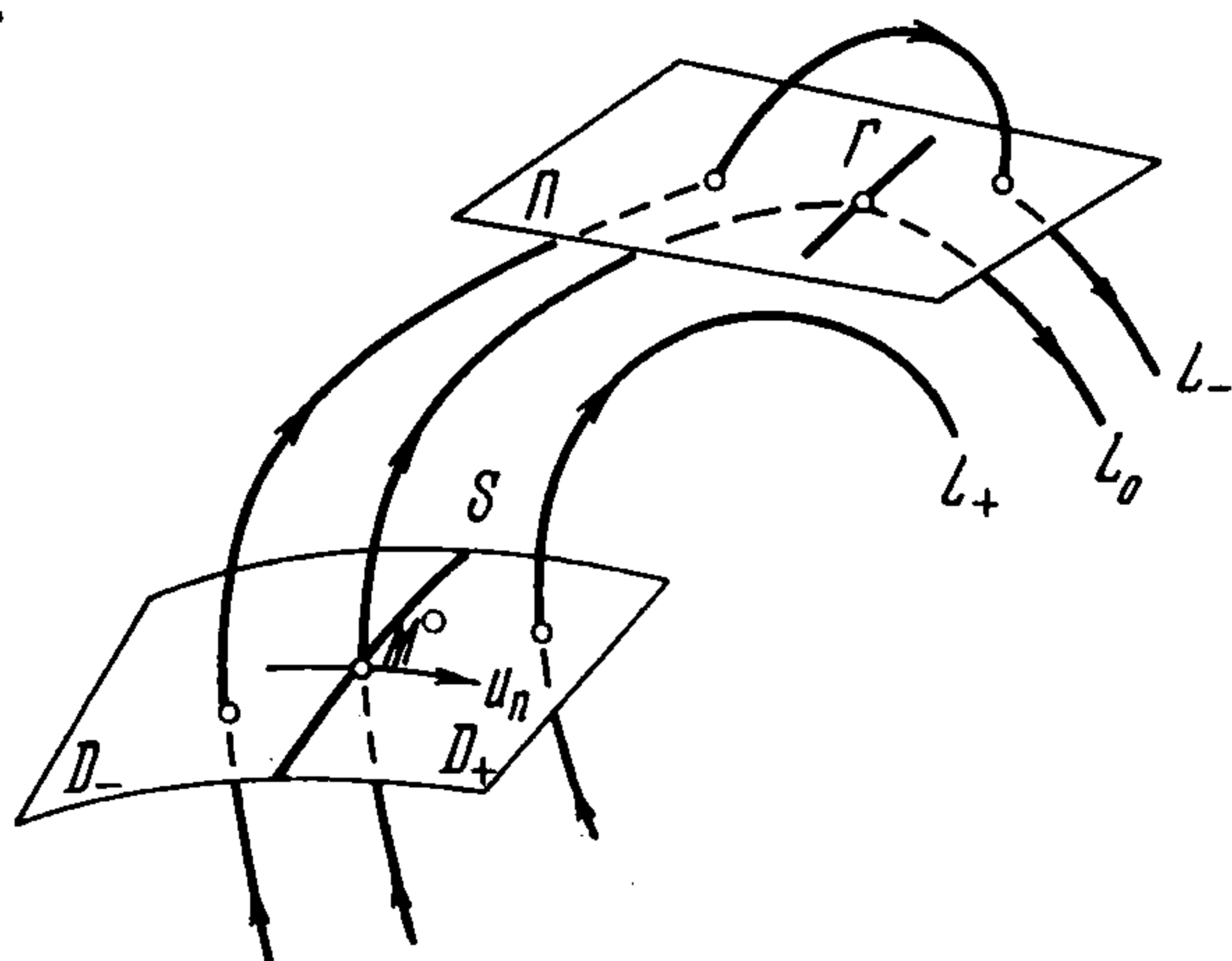
1. Будем рассматривать зависимость от параметра периодических движений кусочно-непрерывной динамической системы. Фазовое пространство такой системы разделено некоторыми поверхностями (с заданными условиями сшивания фазовых траекторий) на области, в каждой из которых движения описываются дифференциальными уравнениями с непрерывными и достаточно гладкими правыми частями.

Известно, что в кусочно-непрерывных системах возможны различные типы периодических движений. Периодический режим некоторого типа характеризуется вполне определенной последовательностью прохождения фазовой точкой областей кусочной непрерывности, и следовательно, фазовой траекторией, определенным образом сшитой из отдельных кусков. В случае С-бифуркации траектория периодического движения проходит через границу одной из поверхностей сшивания, что вызывает нарушение условий существования этого движения и соответствует появлению или исчезновению участка траектории в одной из областей кусочной непрерывности.

Покажем, что при С-бифуркации возможно рождение «двуоборотного» режима с удвоенным периодом колебаний. Каждый из оборотов траектории этого движения соответствует одному из типов участвующих в бифуркации периодических режимов.

Соответствующая поставленным целям математическая задача может быть сформулирована в виде, аналогичном рассмотренной в работе [1].

Рассмотрим зависящее от параметра μ точечное отображение некоторой достаточно гладкой поверхности D . Пусть при $\mu = 0$ имеется неподвижная



Фиг. 1

точка преобразования M^0 . Проходящая через M^0 фазовая траектория L_0 соответствующего периодического режима проходит также через границу Γ поверхности сшивания Π (фиг. 1). Выделим на поверхности D проходящую через M^0 «линию» S , которая близкими к L_0 фазовыми траекториями отображается в границу Γ . Кривая S делит поверхность D на две полукрестности D_+ и D_- , выходящим из которых фазовым траекториям (например, L_+ и L_-) соответствуют

разные уравнения движения. Точечное отображение T предполагается непрерывным в окрестности M^0 , а зависимость его от фазовых координат и параметра в каждой из полукрестностей — достаточно гладкой.

Перенесем начало координат в неподвижную точку преобразования M^0 . Выберем далее одну из координатных осей, например u_n , таким образом, чтобы областям D_+ и D_- соответствовали разные знаки u_n . Тогда линеаризованные в окрестности L_0 уравнения преобразования T могут быть записаны следующим образом. Преобразование T^+ :

$$u_k' = \sum_{s=1}^{n-1} a_{ks} u_s + a_{kn}^+ u_n + b_k \mu + \dots \quad (u_n \geq 0) \quad (1.1)$$

Преобразование T^- :

$$u_k' = \sum_{s=1}^{n-1} a_{ks} u_s + a_{kn}^- u_n + b_k \mu + \dots \quad (u_n \leq 0) \quad (1.2)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Двуоборотному периодическому режиму соответствует пара неподвижных точек M^* и M^{**} преобразования T^+T^- . Координаты неподвижных точек найдутся из системы $2n$ уравнений

$$u_k^{**} = \sum_{s=1}^{n-1} a_{ks} u_s^* + a_{kn}^+ u_n^* + b_k \mu + \dots \quad (1.3)$$

$$u_k^* = \sum_{s=1}^{n-1} a_{ks} u_s^{**} + a_{kn}^- u_n^{**} + b_k \mu + \dots \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.4)$$

$$u_n^* > 0, \quad u_n^{**} < 0$$

Введем в рассмотрение разности

$$\delta_k = u_k^{**} - u_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Тогда вместо уравнений (1.3) имеем в линейном приближении

$$u_k^{**} = \sum_{s=1}^{n-1} a_{ks} u_s^* + a_{kn}^+ u_n^* + b_k \mu \quad (1.5)$$

$$\delta_k + \sum_{s=1}^{n-1} a_{ks} \delta_s + a_{kn}^+ \delta_n = u_n^{**} (a_{kn}^+ - a_{kn}^-) \quad (1.6)$$

Из системы уравнений (1.6) находим

$$\delta_k = \frac{\beta_k}{\chi^+(-1)} u_n^{**} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.7)$$

Здесь через $\chi^+(-1)$ обозначен характеристический полином $\chi^+(z)$ преобразования T^+ при $z = -1$, а β_k — некоторые функции коэффициентов a_{ks} . Предполагается при этом, что собственные значения характеристической матрицы отличны от единицы.

Разность δ_n равна

$$\delta_n = u_n^{**} - u_n^* = \frac{\chi^+(-1) - \chi^-(-1)}{\chi^+(-1)} u_n^{**}$$

Отсюда

$$u_n^* \chi^+(-1) = u_n^{**} \chi^-(-1) \quad (1.8)$$

Зависимость искомых координат от параметра μ можно получить, если подставить в соответствии с (1.7) и (1.8) значения

$$u_k^{**} = u_k^* + \frac{\beta_k}{\chi^-(-1)} u_n^*$$

в уравнения (1.5)

$$u_k^* = \sum_{s=1}^{n-1} a_{ks} u_s^* + \left[a_{kn}^+ - \frac{\beta_k}{\chi^-(-1)} \right] u_n^* + b_k \mu \quad (1.9)$$

Если собственные значения матрицы, составленной из коэффициентов при искомым координатах уравнений (1.9), отличны от единицы, то уравнения (1.9) имеют ненулевое решение. Однако в силу кусочной непрерывности рассматриваемой системы необходимо еще потребовать выполнения условий (1.4). В соответствии с (1.9) и (1.8) значения u_n^* и u_n^{**} можно представить в виде

$$u_n^* = A_n \chi^-(-1) \mu, \quad u_n^{**} = A_n \chi^+(-1) \mu \quad (1.10)$$

Из (1.10) следует, что неравенства (1.4) будут выполняться, если

$$\chi^+(-1) \chi^-(-1) < 0 \quad (1.11)$$

Условие (1.11) и является критерием удвоения периода колебаний при С-бифуркациях. Оно удобно для практического применения, так как для решения вопроса о рождении субгармонического колебания оказывается достаточным определить знаки со-

ответствующих характеристических полиномов при $z = -1$ в предельном случае совпадения двух периодических режимов. При этом не требуется специальный выбор системы фазовых координат, принятый для теоретического доказательства возможности удвоения периода. Условие (1.11) связано с характером устойчивости периодических режимов и инвариантно по отношению к выбору координат.

2. Одна из важных задач теории бифуркаций периодических движений — это установление так называемых «опасных границ». Введенное в рассмотрение Н. Н. Баутиным для динамических систем с аналитическими правыми частями [4], понятие опасной границы естественно распространяется и на случай С-бифуркаций в кусочно-непрерывных системах. Следуя А. А. Андронову (см. предисловие к [4]), будем под опасной С-бифуркационной границей понимать такую границу существования периодического режима, малейшее нарушение которой приводит к неконтролируемому (путем выбора достаточно малого нарушения) нарастанию отклонения режима движения от рассматриваемого.

Случай слияния двух периодических режимов с последующим их исчезновением относится к опасной С-бифуркации. Из линеаризованных уравнений (1.1), (1.2) легко получить критерий опасной С-бифуркации в форме, аналогичной условию (1.11).

Пусть при некотором значении параметра μ существует неподвижная точка M^* преобразования T^+ и неподвижная точка M^{**} преобразования T^- . Полагая в (1.1) значения $u_k' = u_k = u_k^*$ и в (1.2) значения $u_k' = u_k = u_k^{**}$, получим соответственно значения координат

$$u_n^* = \frac{B_n^-}{\chi^+ (+1)} \mu + \dots, \quad u_n^{**} = \frac{B_n^-}{\chi^- (+1)} \mu + \dots \quad (2.1)$$

Требую выполнения условий $u_n^* > 0$ и $u_n^{**} < 0$, приходим к следующему критерию опасной С-бифуркации:

$$\chi^+ (+1)\chi^- (+1) < 0 \quad (2.2)$$

Замечание 2.1. Известно [5], что удвоение периода колебаний и слияние двух периодических режимов с последующим их исчезновением могут иметь место в динамических системах с аналитическими характеристиками нелинейностей на границе устойчивости режима. Первое происходит при обращении одного из корней характеристического полинома в -1 на границе N_-

$$\chi(-1) = 0 \quad (2.3)$$

второе — при $z = +1$ на границе N_+

$$\chi(+1) = 0 \quad (2.4)$$

При соответствующем переходе от кусочно-непрерывных характеристик к непрерывным, условия (1.11) и (2.2) перейдут в уравнения (2.3) и (2.4) и, следовательно, общая картина зависимости поведения траекторий от параметра не изменится.

Это обстоятельство характеризует грубость пространства параметров динамической системы по отношению к классу нелинейных характеристик [2] и указывает на глубокую связь между поведением реальной динамической системы и С-бифуркациями движений в принимаемой к рассмотрению кусочно-непрерывной математической модели этой системы: из трех возможных случаев поведения системы при С-бифуркациях лишь один случай перехода периодического режима одного типа в режим другого типа яв-

ляется следствием выбора модели. Поэтому представляется целесообразным для качественного исследования структуры пространства параметров изучение С-бифуркаций периодических движений кусочно-линейных моделей динамических систем, так как они более доступны для исследования, чем бифуркации N_- и N_+ в моделях с непрерывными характеристиками нелинейностей. Пример, реализующий такой подход, будет приведен в последнем разделе статьи.

Замечание 2.2. Вопрос о сохранении или нарушении устойчивости режима при С-бифуркации решается путем анализа корней соответствующих характеристических полиномов. Однако для ряда случаев можно сделать некоторые общие выводы.

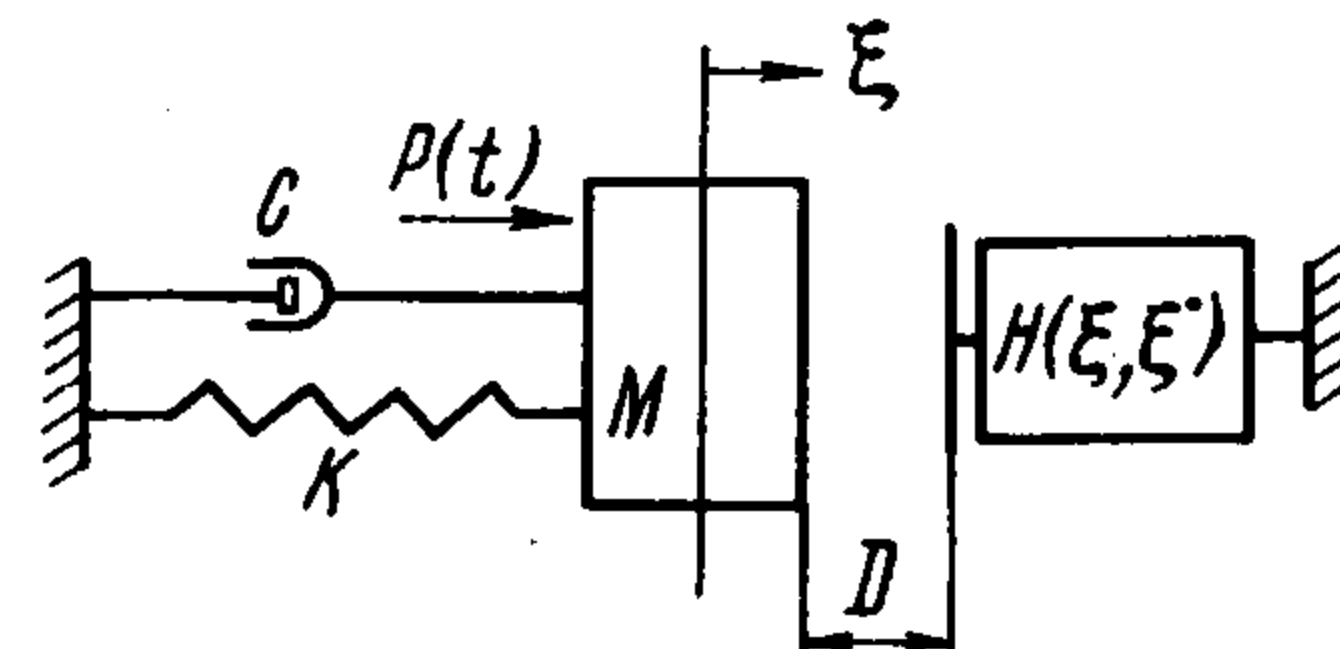
Пусть оба участвующие в бифуркации периодических режима устойчивы. Тогда удвоение периода и слияние двух режимов невозможны, ибо знаки характеристических полиномов при $z = -1$ или $z = +1$ будут одинаковыми и, следовательно, условия 1.11) и (2.2) не выполняются. Этот случай С-бифуркации соответствует изменению типа периодического движения.

Предположим теперь, что при С-бифуркации происходит переход устойчивого режима в неустойчивый. Непрерывность изменения топологии фазового пространства сохранится [5,6], если такой переход сопровождается либо рождением устойчивого, либо исчезновением неустойчивого колебания с удвоенным периодом. Отметим, что последний случай будет соответствовать опасной С-бифуркации.

3. В качестве примера рассмотрим удвоение периода и опасные С-бифуркации вынужденных колебаний линейной колебательной системы при встрече с ограничителем перемещения (фиг. 2).

Уравнение движения системы при $x < d$, записанное в безразмерной форме, имеет вид

$$x'' + 2\lambda x' + x = P(\tau) \quad (3.1)$$



Фиг. 2

где $P(\tau)$ — периодическая с периодом T функция времени, а коэффициент λ характеризует линейное трение ($0 < \lambda < 1$).

Решение линейного уравнения (3.1) может быть записано

$$x(\tau) = p(\tau) + e^{-\lambda(\tau-\tau_0)} \{C_1 \sin \delta(\tau - \tau_0) + C_2 \cos \delta(\tau - \tau_0)\} \quad (3.2)$$

Здесь $p(\tau)$ — частное решение неоднородного уравнения, т. е. установившиеся вынужденные колебания системы; C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые значениями x_0 и \dot{x}_0 в момент $\tau = \tau_0$; коэффициент $\delta = \sqrt{1 - \lambda^2}$.

Перепишем решение (3.2) в форме уравнений точечного преобразования, соответствующего участку фазовой траектории между точкой $M_i \{x_i, \dot{x}_i, \tau_i\}$ и точкой $M_j \{x_j, \dot{x}_j, \tau_j\}$

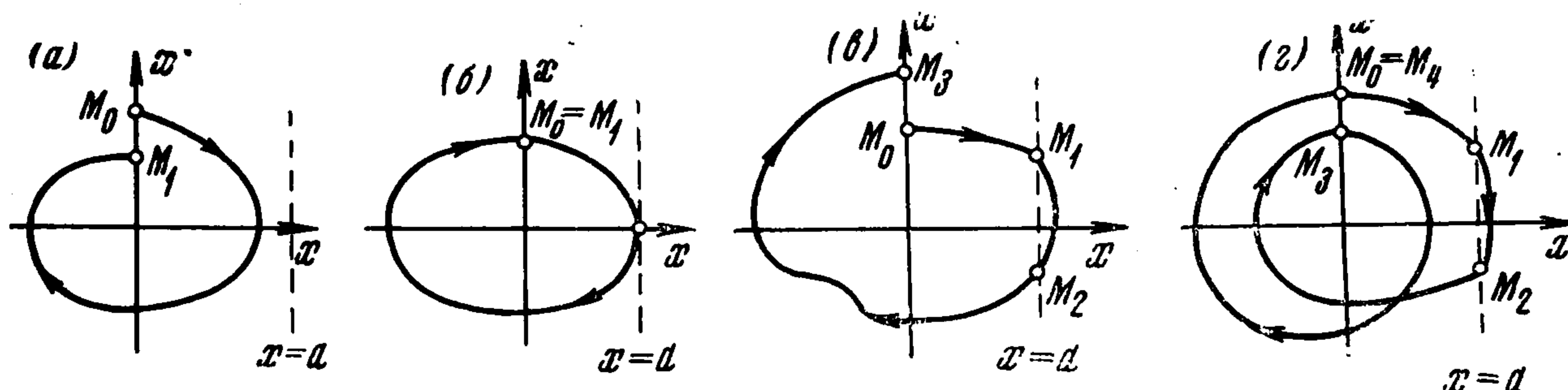
$$f(x_i, \tau_i, \tau_j) = p_j - x_j + e^{-\lambda\tau_{ij}} \left\{ (x_i - p_i) \left(\frac{\lambda}{\delta} \sin \delta\tau_{ij} + \cos \delta\tau_{ij} \right) + \frac{\dot{x}_i - \dot{p}_i}{\delta} \sin \delta\tau_{ij} \right\} = 0 \quad (3.3)$$

$$x_j = g(x_i, \tau_i, \tau_j) = p_j + e^{-\lambda\tau_{ij}} \times \left\{ (x_i - p_i) \left(\cos \delta\tau_{ij} - \frac{\lambda}{\delta} \sin \delta\tau_{ij} \right) - \frac{\dot{x}_i - \dot{p}_i}{\delta} \sin \delta\tau_{ij} \right\} \quad \tau_{ij} = \tau_j - \tau_i$$

Если колебания системы не достигают ограничителя, уравнения (3.3) полностью определяют поведение системы как в переходном режиме (траектория M_0M_1 на фиг. 3,а), так и в установившемся, при котором

$$x(\tau) = p(\tau), \quad \dot{x}(\tau) = p'(\tau) \quad (3.4)$$

Уравнения (3.3) необходимы в этом случае для написания характеристического полинома $\chi^+(z) = 0$. Точки $M_0 = M_i$ и $M_1 = M_j$ соответ-



Фиг. 3

ствуют $x_i = x_j = 0$. Проварьировав уравнение (3.3) по переменным x_i, τ_i, x_j, τ_j в окрестности периодического движения (3.4) и положив $\tau_{ij} = T, \delta x_j = z\delta x_i, \delta \tau_j = z\delta \tau_i$, получаем

$$\chi^+(z) = \begin{vmatrix} (\partial f / \partial x_i)_{01} & (\partial f / \partial \tau_i)_{01} + z(\partial f / \partial \tau_j)_{01} \\ (\partial g / \partial x_i)_{01} - z & (\partial g / \partial \tau_i)_{01} + z(\partial g / \partial \tau_j)_{01} \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

После подстановки в (3.5) значений частных производных, получаемых из уравнений (3.3), приходим к выражению

$$\chi^+(z) = x_0 \cdot (z^2 - 2ze^{-\lambda T} \cos(\delta T) + e^{-2\lambda T}) \quad (3.6)$$

Отсюда значение характеристического полинома при $z = \pm 1$

$$\chi^+(\pm 1) = x_0 [(e^{-\lambda T} \mp \cos \delta T)^2 + \sin^2 \delta T] > 0 \quad (3.7)$$

Если колебания системы достигают ограничителя, то уравнения (3.3) определяют ее поведение лишь на участках фазовой траектории M_0M_1 и M_2M_3 (фиг. 3,в). Пусть уравнения точечного преобразования поверхности $x = d$ в себя, соответствующего участку траектории M_1M_2 движения с работающим ограничителем, могут быть представлены в виде

$$\tau_2 - \tau_1 - x_1 \Phi(\tau_1) = 0, \quad x_2 = x_1 \Phi_1(\tau_1) \quad (3.8)$$

Путем варьирования уравнений (3.3) и (3.8) соответственно для участков траекторий M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3 в окрестности вынужденного колебания (3.4), и полагая

$$\tau_3 - \tau_0 = T, \quad \delta x_3 = z\delta x_0, \quad \delta \tau_3 = z\delta \tau_0$$

приходим после соответствующих преобразований к следующему характеристическому полиному:

$$\chi^-(z) = \delta^{-1} x_0 \cdot x_1 \cdot ze^{-\lambda T} (1 + x_1 \Phi - \Phi_1) \sin \delta T \quad (3.9)$$

В случае С-бифуркации (фиг. 3,б)] значение $x_0' > 0$, а $x_1'' < 0$, так как точка касания соответствует x_{\max} . Поэтому

$$\text{sign } \chi^-(z) = \text{sign} \{z (1 + x_1'' \Phi - \Phi_1) \sin \delta T\} \quad (3.10)$$

Согласно (3.7) значение $\chi^+(\pm 1) > 0$, поэтому для рассмотренной задачи получаем условие опасной С-бифуркации (2.2), соответствующей слиянию двух режимов с последующим их исчезновением, в виде

$$(1 + x_1'' \Phi - \Phi_1) \sin \delta T < 0 \quad (3.11)$$

и условие удвоения периода (1.11) в виде

$$(1 + x_1'' \Phi - \Phi_1) \sin \delta T > 0 \quad (3.12)$$

Первый сомножитель выражений (3.11), (3.12) отражает свойства ограничителя, а второй — свойства линейной колебательной системы.

Отметим существенную особенность рассматриваемой бифуркации. Так как в момент касания $(\partial f / \partial \tau_j)_{01} = x_1' \rightarrow 0$, то характеристический полином $\chi^-(z)$ имеет корни $z_1 \rightarrow 0$ и $z_2 \rightarrow \infty$, что соответствует неустойчивости нелинейного режима, участвующего в бифуркации. Следовательно, при выполнении (3.11) режим устойчивых вынужденных колебаний линейной системы сливается с неустойчивым нелинейным режимом движения. Если же выполняется условие (3.12), устойчивый режим линейной системы переходит в неустойчивый нелинейный режим. В этом случае дополнительно либо исчезает неустойчивый, либо рождается устойчивый субгармонический режим с удвоенным периодом.

При слиянии устойчивого периодического режима с неустойчивым динамическая система «жестко» переходит на некоторый другой устойчивый режим работы. Таким режимом в простейшем случае будет периодическое движение того же самого типа, что и исчезнувшее неустойчивое. Условие (3.11) переходит в условие (3.12) при $\sin \delta T = 0$ или

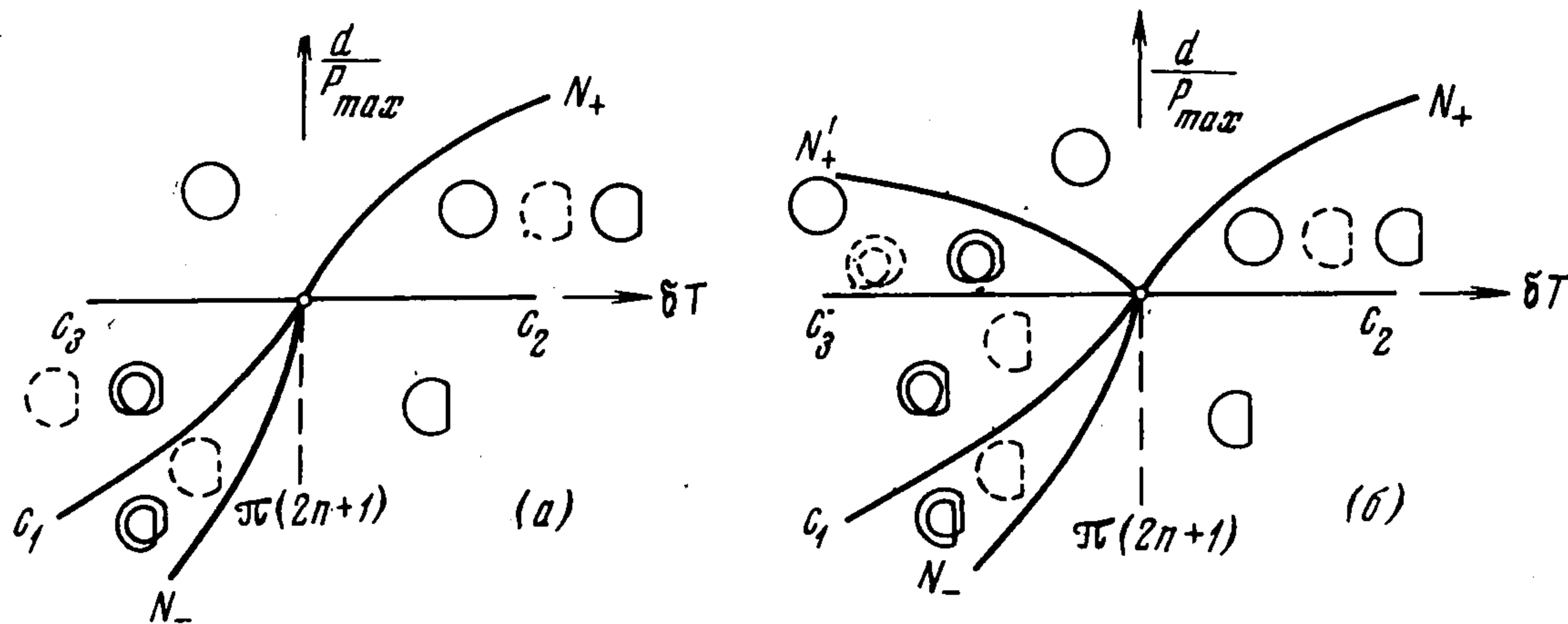
$$T \sqrt{1 - \lambda^2} = n\pi \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (3.13)$$

Выражение (3.13) определяет в пространстве параметров динамической системы некоторые узловые бифуркационные точки, из которых должны выходить несколько бифуркационных границ разных типов.

Полученные в этой работе результаты и известное из теории бифуркаций поведение системы на границе устойчивости режима [5], позволяют качественно «синтезировать» возможные структуры этих узлов. Так, на фиг. 4 приведены две простейшие структуры. Здесь границы N_+ соответствуют слиянию устойчивого и неустойчивого режимов одного типа при обращении корня характеристического полинома в $+1$. Граница N_- соответствует мягкому удвоению периода при появлении корня $z = -1$. На границе C_1 происходит переход режима, включающего два участка работы ограничителя, в режим, включающий один участок, с сохранением периода колебаний и устойчивости.

Переход устойчивых вынужденных колебаний линейной системы на нелинейный режим работы, вызванный ограничителем, происходит на границах C_2 и C_3 . При этом на С-бифуркационной границе C_3 может быть либо мягкое (фиг. 4, а), либо жесткое (фиг. 4, б) удвоение периода колебаний. Для решения вопроса о том, какой из случаев

удвоения соответствует рассматриваемым вынужденным колебаниям, необходимо исследовать устойчивость двукратного периодического режима при С-бифуркации. Траектория этого режима движения (фиг. 3, з) состоит из участков M_0M_1 , M_2M_3 и M_3M_4 , определяемых уравнениями (3.3), и участка M_1M_2 , определяемого уравнением (3.8).



Фиг. 4

После несложной, но громоздкой процедуры получения и упрощения соответствующего характеристического полинома, приходим к следующему выражению:

$$\chi(z) = -\delta^{-1} z x_1' x_0' e^{-2\lambda T} (1 + x_1' \Phi - \Phi_1) \sin 2\delta T \quad (3.14)$$

Таким образом, и в случае удвоенного периода колебаний при $x_1' \rightarrow 0$ один из корней $\chi(z) = 0$ неограниченно возрастает, и режим оказывается неустойчивым. Следовательно, в областях изменения параметров, удовлетворяющих условию (3.12), следует ожидать жесткое удвоение периода колебаний (фиг. 4, б). Естественно, что в окрестности бифуркационных узлов возможна и более сложная, чем приведенная на фиг. 4, структура разбиения пространства параметров на области периодических движений разных типов.

4. Полученное условие удвоения периода колебаний при С-бифуркациях в виде (3.12) является достаточно грубым по отношению к характеристике нелинейности рассматриваемой колебательной системы. Поэтому интересно проверить, применимы ли результаты, полученные для кусочно-линейной системы, к системам с «гладкой» характеристикой нелинейности.

Для этого рассмотрим сначала линейную колебательную систему (3.1) с двумя симметрично расположенными неподвижными ограничителями. В качестве зависимости (3.8) между координатами начальной и конечной точек участка траектории M_1M_2 можно принять в этом случае закон мгновенного удара с коэффициентом восстановления скорости R ($0 < R < 1$)

$$\tau_2 - \tau_1 = 0, \quad [x_2'] = -R x_1' \quad (4.1)$$

Следовательно, в выражении (3.8)

$$\Phi(\tau_1) = 0, \quad \Phi_1(\tau_1) = -R$$

Характеристические полиномы, соответствующие симметричным периодическим режимам, приводятся к виду

$$\begin{aligned} \chi^+(z) &= x_0' (z^2 + 2ze^{-1/2\lambda T} \cos 1/2\delta T + e^{-\lambda T}) \\ \chi^-(z) &= \delta^{-1} z (1 + R) x_1'' e^{-1/2\lambda T} \sin 1/2\delta T \end{aligned} \quad (4.2)$$

и условие удвоения периода колебаний (1.11) сводится к выполнению $\sin \frac{1}{2}\delta T < 0$. Получаем, что рождение субгармонических колебаний порядка $\frac{1}{2}$ возможно, если отношение собственной частоты δ к частоте внешнего возбуждения $\omega = 2\pi / T$ удовлетворяет одному из условий

$$2n + 1 < \delta / \omega < 2(n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Рассмотрим систему с характеристикой нелинейности, представленной полиномом третьей степени [3]

$$\begin{aligned} x'' + \lambda x' + c_1 x + c_3 x^3 &= B \cos 2\tau \\ (\lambda \ll 1, c_1 + c_3 &= 1) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Приближенную зависимость частоты собственных колебаний от амплитуды получим из (4.4), если положим $B = 0$ и будем искать решение в форме $x = X \cos \delta t$

$$\delta^2 \approx c_1 + \frac{3}{4} c_3 X^2 \quad (4.5)$$

Амплитуду вынужденных колебаний с частотой внешней силы можно аппроксимировать выражением [3]

$$X \approx \frac{B}{|1 - \omega^2|} \quad (4.6)$$

Используем выражение (4.3), полученное для кусочно-линейной системы, чтобы оценить области возникновения субгармонических колебаний порядка $\frac{1}{2}$ в системе (4.4). Для этого подставим определяемое в соответствии с (4.5), (4.6) значение δ в условие (4.3)

$$2n + 1 < \frac{1}{\omega} \left[c_1 + \frac{3c_3 B^2}{4(1 - \omega^2)^2} \right]^{1/2} < 2(n + 1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.7)$$

Полученный результат представляется возможным сравнить с исследованиями субгармонических колебаний порядка $\frac{1}{2}$, проведенных Т. Хаяси экспериментально и на аналоговой машине [3]. Полагая $\omega = 2$, $c_1 \approx 0$ и приняв за единицу значение B^* соответствующее середине первой области, получаем из (4.7) следующие интервалы относительной амплитуды B/B^* , в которых возможны рассматриваемые субгармонические колебания

$$(0.66 - 1.33), (2.00 - 2.66), (3.33 - 4.00), \dots$$

В работе [3] для случая, когда отсутствует постоянная составляющая внешней силы, получены лишь два интервала (рис. 7.22 и 7.25 в работе [3]).

После аналогичного приведения относительно B^* это будут интервалы: (0,9—1.1), (2.0—2.3) по результатам моделирования на аналоговой машине и (0.8—1.2), (1.8—2.1) по результатам эксперимента. При этом следует отметить, что в обоих случаях исследовалась система с затуханием.

Поступила 9 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Б р у с и н В. А., Н е й м а р к Ю. И., Ф е й г и н М. И. О некоторых случаях зависимости периодических движений релейной системы от параметров. Изв. вузов. Радиофизика, 1963, № 4.
2. Б а у т и н Н. Н. Об аппроксимации и грубости пространства параметров динамической системы. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
3. Н а у а s h i С. Nonlinear oscillations in physical systems. New York, San Francisco, Toronto, London, McGraw-Hill book company, 1964 (Рус. перев.: Нелинейные колебания в физических системах. М., «Мир», 1968.)
4. Б а у т и н Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Л.—М., Гостехиздат, 1949.
5. Н е й м а р к Ю. И. Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний. Изв. вузов. Радиофизика, 1958, № 2.
6. А н д р о н о в А. А., Л е о н т о в и ч Е. А., Г о р д о н И. И., М а й е р А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., «Наука», 1966.