

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

Н. Н. Баутин

(Горький)

Методами теории бифуркаций [1], использующими элементарные свойства монотонного поворота поля направлений, дается качественное исследование уравнения, представляющего интерес для приложений. Прослежены все возможные бифуркации и дана оценка области существования двойного предельного цикла. Это уравнение рассматривалось разными авторами [2-6], однако полного качественного исследования не было дано.

Рассматривается система

$$d\varphi/dt = y, \quad dy/dt = \gamma - \sin \varphi - \lambda (1 - d \cos \varphi)y \quad (0.1)$$

Будем предполагать $\gamma \geq 0$ и $\lambda \geq 0$ (другие возможные случаи сводятся к рассматриваемому заменой переменных).

В цилиндрическом фазовом пространстве (на полосе $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ с отождествленными краями) состояния равновесия будут $O_1(\arcsin \gamma, 0)$ — фокус или узел, $O_2(\pi - \arcsin \gamma, 0)$ — седло.

Слияние и исчезновение особых точек — простейшая бифуркация, возможная в системе (0.1). Другие возможные бифуркации связаны со сменой устойчивости состояния равновесия O_1 , с бифуркациями сепаратрис, идущих из седла в седло (при этом появляются или исчезают предельные циклы) и появлением предельных циклов из сгущения траекторий, из сепаратрисы особой точки седло-узел и из бесконечности. Все эти бифуркации могут быть прослежены для системы (0.1). Знание всех бифуркаций позволяет дать разбиение пространства параметров $\gamma > 0$, $\lambda > 0$, d на области с различной качественной структурой разбиения фазового пространства на траектории.

1. Поворот поля. Плоскость параметров λ , d можно покрыть такой сеткой кривых, изменение параметров вдоль которых осуществляет монотонный поворот векторного поля системы (0.1). Разность полей направления системы (0.1) с параметрами λ_0 и d_0 и измененной системы с параметрами λ_1 и d_1 для $y \neq 0$ будет

$$\lambda_1 - \lambda_0 + (\lambda_0 d_0 - \lambda_1 d_1) \cos \varphi$$

Монотонный поворот будет осуществляться, если измененные значения параметров λ_1 и d_1 выбирать так, чтобы выполнялось условие

$$\lambda_0 d_0 - \lambda_1 d_1 = 0$$

Это условие будет выполнено, если λ и d изменять вдоль k -кривых

$$\lambda d = k, \quad k = \text{const} \quad (-\infty < k < +\infty)$$

Семейство k -кривых покрывает всю плоскость λd , за исключением самих осей λ и d . На прямой $y = 0$ контакт ложный. Кривые исходной и измененной системы пересекаются с касанием по оси φ . Разность полей направлений при изменении параметра γ будет $(\gamma_1 - \gamma_0) / y$. При изменении γ поле направлений на нижнем и верхнем полуцилиндрах поворачивается в противоположных направлениях. Прямая $y = 0$ в этом случае будет контактной кривой.

2. Рождение цикла из фокуса. Состояние равновесия O_1 будет сложным фокусом для точек поверхности

$$\sigma_1 = (F_\varphi' + Q_y')_1 = \lambda (d \sqrt{1 - \gamma^2} - 1) = 0$$

При переходе через поверхность $\sigma_1 = 0$ в направлении возрастающих σ_1 фокус из устойчивого становится неустойчивым и из него появляется единственный устойчивый предельный цикл (первая ляпуновская величина для точек поверхности $\sigma_1 = 0$ имеет значение $\alpha_3 = -1/8\pi\lambda(1 - \gamma^2)^{-1/2} < 0$).

3. Качественные структуры на «концах» k -кривых. Чтобы проследить за изменением качественной структуры фазового пространства и возможными бифуркациями при монотонном повороте поля с изменением параметров вдоль k -кривых, нужно знать структуры разбиения фазового пространства на концах k -кривых для малых и для больших λ (и соответственно для больших и малых d). Представим (0.1) в виде

$$y dy + \sin \varphi d\varphi = [\gamma - \lambda (1 - d \cos \varphi) y] d\varphi \quad (3.1)$$

Из (3.1) будет следовать

$$\int_c [\gamma - \lambda (1 - d \cos \varphi) y] d\varphi = 0$$

если c — предельный цикл (3.1). При малых γ и λ предельный цикл, охватывающий цилиндр, будет близок к одной из кривых [7,1]

$$y_0 = \pm \sqrt{2(\cos \varphi + h)} \quad (1 < h < \infty)$$

являющихся решением уравнения (3.1) при $\gamma = \lambda = 0$. Значению $h = 1$ соответствует сепаратриса, идущая из седла в седло. Значения константы h , выделяющей кривые консервативной системы, вблизи которых для малых γ и λ на верхнем и нижнем полуцилиндрах будут существовать предельные циклы системы (0.1), определяются соответственно как корни уравнений

$$\begin{aligned} \psi_1^*(h) = 0, \quad \psi_2^*(h) = 0 \quad (h > 1), \quad \left(\kappa^2 = \frac{2}{h+1} \right) \quad (3.2) \\ \psi_{1,2}^*(h) = \int_{-\pi}^{\pi} [\gamma - \lambda (1 - d \cos \varphi) y_0] d\varphi = \\ = 2\pi\gamma \mp \lambda \left\{ \frac{8E}{\kappa} - \frac{8d}{3\kappa^2} [2(\kappa^2 - 1)F + (2 - \kappa^2)E] \right\} \equiv \psi_{1,2}(\kappa) \end{aligned}$$

Здесь F и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; верхний знак для ψ_1 , нижний знак для ψ_2 . Предельный цикл, соответствующий корню $\kappa = \kappa_0$, будет устойчив, если $y_0 \psi_{1,2}'(\kappa_0) > 0$.

Функции $\psi_{1,2}$ доопределяются для $\kappa = 1$ их предельными значениями $\psi_1(1) = 2\pi\gamma + \frac{8}{3}\lambda(d-3)$ и $\psi_2(1) = 2\pi\gamma - \frac{8}{3}\lambda(d-3)$. Из (3.2) следует, что для любых d будет $\psi_1(0) = -\infty$, $\psi_2(0) = +\infty$, а также, что при $d \geq 0$ производная $\psi_{1,2}'$ не меняет знак в интервале $0 \leq \kappa \leq 1$ (приложение 1). Отсюда сразу следует, что если для $d \geq 0$ выполняется условие

$$\psi_1(1) = 2\pi\gamma + \frac{8}{3}\lambda(d-3) > 0 \quad (3.3)$$

то на верхнем полуцилиндре есть единственный устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр, а если выполняется условие

$$\psi_2(1) = 2\pi\gamma - \frac{8}{3}\lambda(d-3) < 0 \quad (3.4)$$

то на нижнем полуцилиндре есть единственный устойчивый предельный цикл. Если выполняется условие (3.4), то заведомо выполняется и условие (3.3). Требование малости правой части (3.1) [$\gamma < \varepsilon$, $\lambda < \varepsilon$, $\lambda|d| < \varepsilon$] выделяет на плоскости λd неограниченную по d область, примыкающую к оси $\lambda = 0$ и содержащую кривые $\psi_1(1) = 0$ и $\psi_2(1) = 0$. Уравнение $\psi_2(1) = 0$ при малом γ в плоскости параметров λ , d (не малых) дает при $\lambda \rightarrow 0$ асимптотическое представление кривой, выделяющей область плоскости параметров, для точек которой в фазовом пространстве системы (0.1) есть устойчивый предельный цикл как на нижнем, так и на верхнем полуцилиндрах. При этом $d > 0$ и состояние равновесия O_1 будет неустойчивым. Качественная структура фазового пространства в этой области будет представлена ниже, на фиг. 2 (1).

Замечание. Качественная картина на фиг. 2 (1) по использованной информации определяется неполно, лишь с точностью до четного числа предельных циклов, возможно охватывающих состояние равновесия. Не представляет труда расширить эту информацию и, построив функцию ψ_3 аналогично ψ_2 и ψ_1 , обнаружить, что при малых γ и λ предельный цикл (единственный) может существовать лишь вокруг устойчивого фокуса и что, следовательно, качественная картина на фиг. 2(1) является точной. Расширение информации здесь, однако, лишено смысла, так как изучение бифуркаций при не малых γ и λ такую неполноту все равно не может устранить.

Проследим за поведением α - и ω -сепаратрис седла на верхнем полуцилиндре при больших λ , $0 < |d| < 1$ и $0 \leq \gamma \leq 1$. Если ω -сепаратриса седла попадает в область выше максимума изоклины горизонтальных наклонов $y_{\max} = (1 + \gamma) / (1 - |d|)\lambda$, то, очевидно, предельные циклы, охватывающие цилиндр, не могут существовать. Такие значения параметров можно выбрать при больших λ . Направления, по которым траектории системы (0.1) входят в седло O_2 , определяются уравнением

$$\zeta^2 + \lambda(1 + d\sqrt{1 - \gamma^2})\zeta - \sqrt{1 - \gamma^2} = 0$$

Для $0 \leq \gamma \leq 1$ один корень всегда отрицателен и соответствует направлению, по которому ω -сепаратриса входит в седло. Пусть на некоторой прямой $\varphi = \varphi_0$ отмечена координата η_0 точки пересечения прямой с ω -сепаратрисой седла. Если с возрастанием λ двигаться в пространстве параметров вдоль k -кривых, то векторное поле будет монотонно поворачиваться по часовой стрелке и координата η_0 на прямой $\varphi = \varphi_0$ будет расти, а максимум изоклины убывать. Поэтому всегда можно выбрать λ и d так, чтобы неравенство $(1 + \gamma) / \lambda (1 - |d|) < \eta_0$ выполнялось.

Для указанных значений параметров предельные циклы не могут существовать также и на нижнем полуцилиндре, так как если там существует замкнутый контур, составленный из траекторий системы (0.1), то должно быть

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\gamma - \lambda (1 - d \cos \varphi) y] d\varphi = 0$$

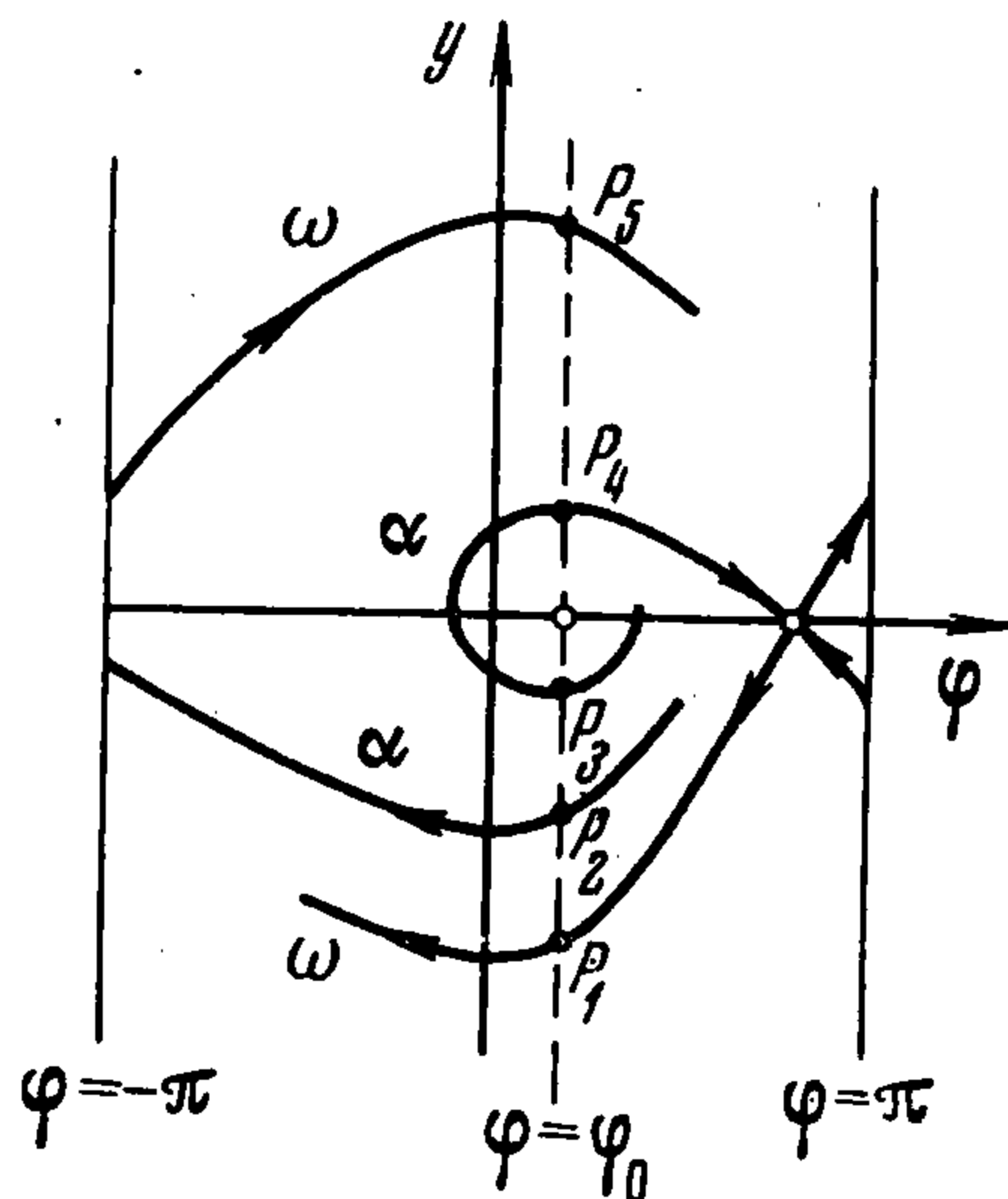
Но это невозможно при $y(\varphi) < 0$, $|d| < 1$ и положительных λ и γ . При $d < 1$ состояние равновесия O_1 — неустойчивый фокус или узел. Предельные циклы вокруг состояния равновесия не могут существовать при $|d| < 1$, так как здесь $P'_\varphi + Q'_y = -\lambda (1 - d \cos \varphi) \neq 0$. Качественная картина фазового пространства для достаточно больших λ на любой кривой $\lambda d = k$ представлена на фиг. 2 (б).

4. Качественные картины фазового пространства и возможные бифуркации при малых γ . Рассмотрим случай $d > 0$. Условие $\psi_2(1) \equiv \equiv 2\pi\gamma - \frac{8}{3}\lambda(d-3) = 0$ для малых γ и λ дает в плоскости λd асимптотическое представление кривой, выделяющей область плоскости параметров, соответствующую качественной структуре, представленной на фиг. 2 (1). Для $k < \frac{3}{4}\pi\gamma$ кривые не входят в область, выделяемую условием (3.4). Для $k > \frac{3}{4}\pi\gamma$ существуют k -кривые, принадлежащие своей частью к области, выделяемой требованием малости величин γ , λ и λd и соединяющие области пространства параметров, соответствующие структурам разбиения фазового пространства, представленным на фиг. 2 (1, б).

Нетрудно обнаружить, проследив за появлением предельных циклов из бесконечности при малых γ и λ , что любая k -кривая, не принадлежащая к области $\lambda d < \varepsilon$, также соединяет области пространства параметров, соответствующие структурам фазового пространства на фиг. 2 (1, б) (приложение 2). Изменение параметров λ и d вдоль k -кривых осуществляет монотонный поворот векторного поля.

Проследим за поведением при этом сепаратрис седла. Для структуры разбиения фазового пространства, представленной на фиг. 2 (1), на прямой $\varphi = \varphi_0$, проходящей через точку O_1 , отметим ближайшие к седлу точки пересечения с α - и ω -сепаратрисами: P_1 — на ω -сепаратрисе на нижнем полуцилиндре, P_2 — на α -сепаратрисе на нижнем полуцилиндре, P_3 — на ω -сепаратрисе на верхнем полуцилиндре, P_4 — на α -сепаратрисе на верхнем полуцилиндре и P_5 — вторую точку пересечения на α -сепаратрисе, идущей к состоянию равновесия O_1 (фиг. 1). При возрастании λ вдоль k -кривых поле направлений поворачивается по часовой стрелке и точки

P_1 и P_4 монотонно поднимаются, а точки P_2, P_3 и P_5 монотонно опускаются. Возможные бифуркации соответствуют совпадению точек P_2 и P_1 и (после этого) точек P_3 и P_1 , а также точек P_4 и P_5 . Эти бифуркации действительно осуществляются,

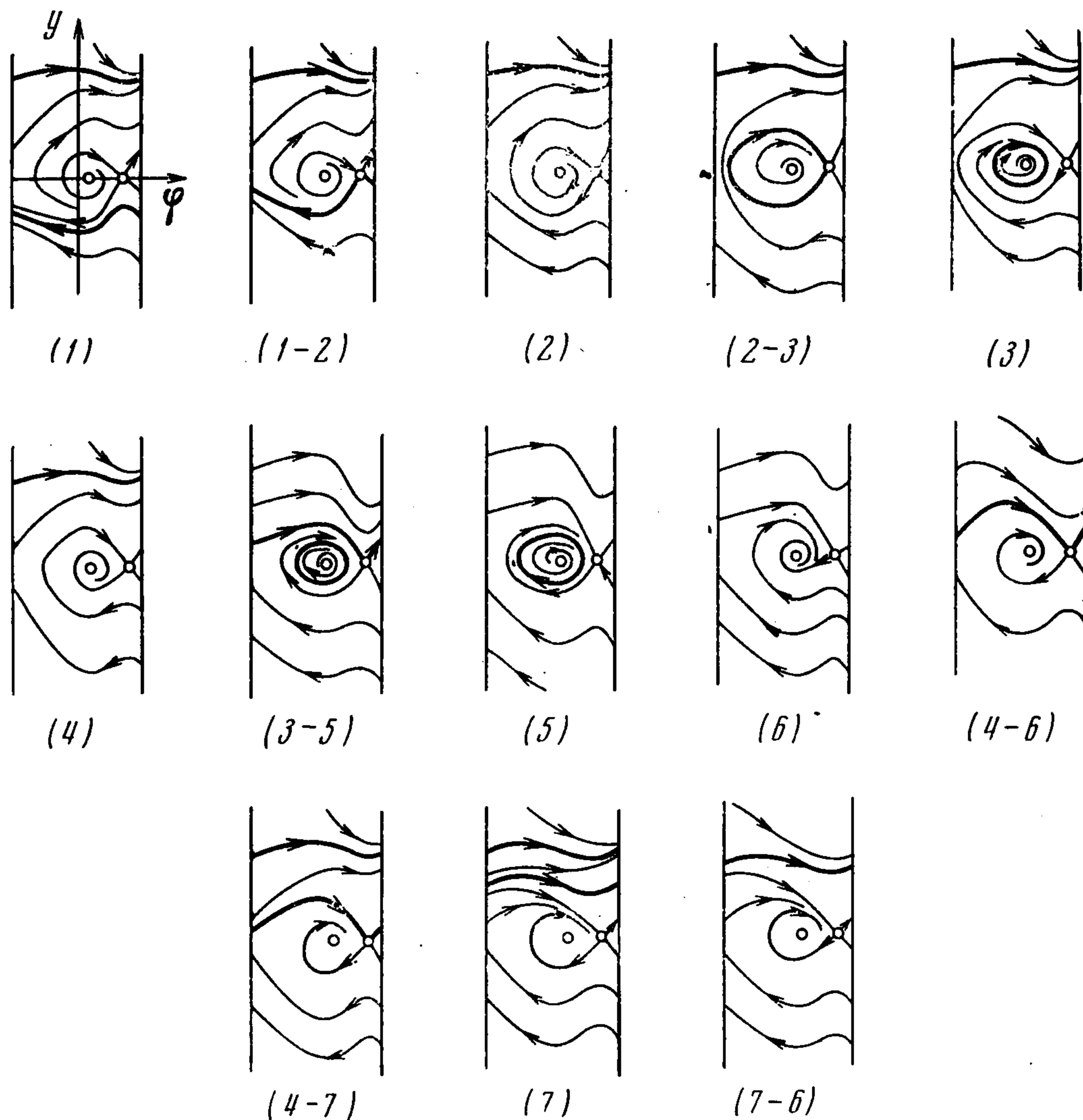


Фиг. 1

так как при возрастании λ вдоль k -кривых происходит переход от структуры, представленной на фиг. 2 (1), к структуре, представленной на фиг. 2 (6), и при этом разности координат $y_3 - y_1$ и $y_5 - y_4$ меняют знак (индексы при координатах соответствуют индексам точек).

Множества точек на плоскости λd , для которых осуществляются совпадения точек P_2 и P_1 (существует петля сепаратрисы снизу), P_3 и P_1 (существует петля вокруг точки O_1) или P_4 и P_5 (существует петля сверху) образуют бифуркационные кривые L^-, L^0 и L^+ , разделяющие плоскость λd на области, для которых качественные структуры различаются поведением сепаратрис седла.

Поведение сепаратрис с точностью до четного числа предельных циклов определяет структуру разбиения фазового пространства на траектории.



Фиг. 2

Уравнение $\psi_2(1)=0$ дает для малых γ и λ асимптотическое представление L^- -кривой; L^+ -кривая (та ее часть, которая соответствует $d \geq 0$) начи-

нается на оси $d = 0$ (при $d = 0$ для малых и для больших λ будут соответственно существовать структуры фиг. 2 (4, 6); при возрастании λ поле монотонно поворачивается и, следовательно, существует единственное бифуркационное значение, соответствующее точке L^+ -кривой).

Кривая L^0 располагается между L^- и L^+ . Для малых γ и λ кривая L^0 представляется уравнением $d = 3$ (приложение 3). Кривые L^- , L^0 и L^+ с каждой из k -кривых пересекаются в одной точке и уходят в бесконечность. Они не могут пересекаться, так как при $\gamma > 0$ и любых λ и d не может осуществляться структура разбиения на траектории, при которой сепаратрисы седла образуют две петли на нижнем и верхнем полуцилиндрах (такой структуре соответствовала бы точка, в которой пересекаются три кривые L^- , L^0 и L^+).

Если предположить, что такая структура при некотором $\gamma > 0$ осуществляется, то при убывании γ в силу монотонности поворота векторного поля на верхнем и нижнем полуцилиндрах (соответственно по- и против часовой стрелки) обе петли разрушатся и возникнет структура, в которой и на нижнем и на верхнем полуцилиндрах α -сепаратриса располагается ниже ω -сепаратрисы. Только от такого расположения сепаратрис может появиться при возрастании γ двойная петля, образованная сепаратрисами седел. При $\gamma = 0$ и любых λ и d такого расположения сепаратрис не может быть из-за симметрии поля направлений относительно начала координат и при возрастании γ оно не может возникнуть, так как из-за различного направления поворота поля на нижнем и верхнем полуцилиндрах при возрастании γ точки α -сепаратрис на каждом полуцилиндре могут только подниматься, а точки ω -сепаратрис — только опускаться.

Из сказанного следует, что при возрастании λ вдоль k -кривых, соединяющих структуры, представленные на фиг. 2 (1, 6) ($k > \frac{3}{4}\pi\gamma$), осуществляется такая последовательность бифуркаций, при которой сначала сливаются точки P_2 и P_1 , затем точки P_3 и P_1 и, наконец, точки P_4 и P_5 . Кривые L^+ и $\sigma_1 = 0$ пересекаются (это следует из асимптотического представления L^+ -кривой уравнением $\psi_1(1) = 0$) и поэтому при движении вдоль k -кривых стягивание предельного цикла к точке (при пересечении линии $\sigma_1 = 0$) может как предшествовать стягиванию предельного цикла к петле сепаратрисы (при пересечении кривой L^+), так и происходить после него. Кривая L^0 не пересекает прямую $\sigma_1 = 0$, на которой фокус меняет устойчивость, на отрезке между осью d и L^+ -кривой (пересечение невозможно при $\gamma = 0$, так как $P_\varphi' + Q_\nu'$ не меняет знак на $\sigma_1 = 0$, и, следовательно, невозможно и при малых γ).

Последовательность качественных структур, переходящих одна в другую при описанном изменении параметров, представлена на фиг. 2 двумя возможными последовательностями грубых структур: 1—4, 6 или 1—3, 5, 6. Негрубые структуры, соответствующие бифуркационным значениям параметра, обозначены двумя цифрами, указывающими на грубые структуры, которые они разделяют. При движении вдоль k_1 -кривых ($0 < k_1 < \frac{3}{4}\pi\gamma$) структура 1 выпадает из последовательности (k_1 -кривые не пересекают кривую $\psi_2(1) = 0$).

Обратимся к случаю $d < 0$. Условие (3.3) выделяет на плоскости λd область, для точек которой в фазовом пространстве системы (0.1) есть устойчивый предельный цикл на верхнем полуцилиндре. При $d < 0$ состояние равновесия O_1 устойчивое. Качественная структура фазового пространства в этой области будет такой, как на фиг. 2 (4). Кривые k (для $-\frac{3}{4}\pi\gamma < k < 0$) соединяют области пространства параметров, соответствующие структурам, представленным на фиг. 2 (4,6). При возрастании λ вдоль k -кривых точки P_4 и P_5 на α - и ω -сепаратрисах седла на верхнем полуцилиндре (фиг. 1) монотонно сближаются, сливаются при некотором значении $\lambda = \lambda_0(k)$ (соответственно $d = d_0(k)$) и затем монотонно расходятся. Множество точек $\lambda_0(k)$, $d_0(k)$, соответствующее негрубой бифуркационной структуре, для которой α - и ω -сепаратрисы седла образуют петлю на верхнем полуцилиндре, образует непрерывную кривую — продолжение L^+ -кривой в область $d < 0$. Через любую точку L^+ проходит одна из k -кривых ($-\frac{3}{4}\pi\gamma < k < 0$).

Седловая величина $\sigma_2 = (P_\bullet' + Q_y')_2 \equiv -\lambda(1 + d\sqrt{1 - \gamma^2})$ меняет знак в плоскости параметров λ, d на прямой $1 + d\sqrt{1 - \gamma^2} = 0$. Эта прямая имеет лишь одну точку пересечения с L^+ -кривой (так как L^+ не может иметь с k -кривыми более одной точки пересечения).

Существует единственное значение $k = k_0$, разделяющее k -кривые на два класса: k_1 -кривые ($k_0 < k_1 < 0$), пересекающие L^+ при $\sigma_2 < 0$ и k_2 -кривые ($-\frac{3}{4}\pi\gamma < k_2 < k_0$), пересекающие L^+ при $\sigma_2 > 0$. При малых λ осуществляется структура, представленная на фиг. 2 (4). При возрастании λ вдоль k_1 -кривых предельный цикл опускается, а сепаратрисы на верхнем полуцилиндре сближаются.

При переходе через значение λ , соответствующее пересечению кривых k_1 и L^+ , возникает и затем разрушается петля сепаратрисы на верхнем полуцилиндре, к которой стягивается устойчивый предельный цикл (так как седловая величина $\sigma_2 < 0$). При дальнейшем изменении параметров вдоль k_1 -кривых изменения качественной структуры не происходит. Последовательность качественных структур при возрастании λ вдоль k_1 -кривых представлена на фиг. 2 (4), 2 (4—6), 2 (6).

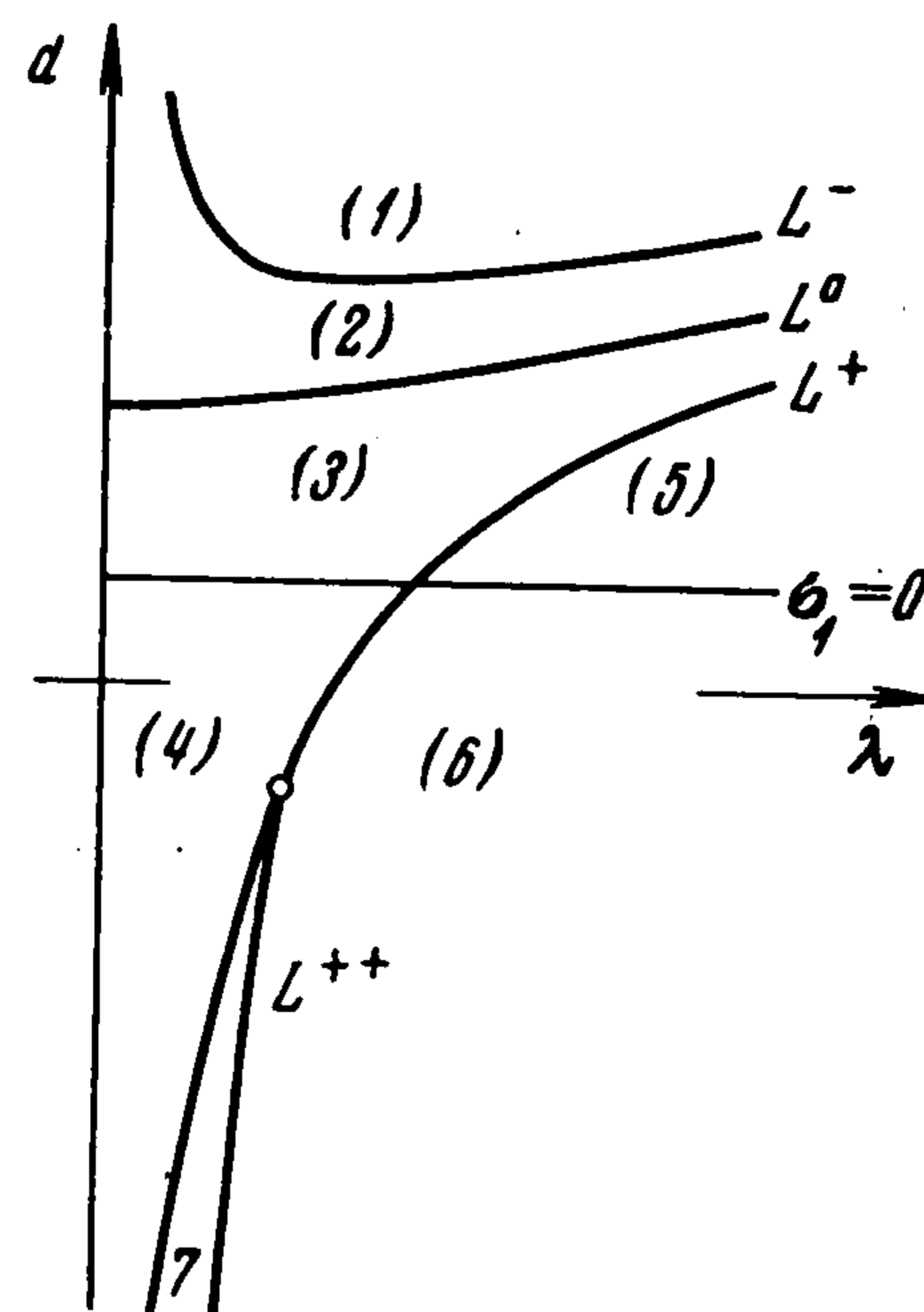
При возрастании λ вдоль k_2 -кривых предельный цикл опускается и сепаратрисы на верхнем полуцилиндре сближаются, но при переходе через значение λ , соответствующее пересечению кривых k_2 и L^+ , при разрушении петли сепаратрисы появляется неустойчивый предельный цикл на верхнем полуцилиндре (устойчивый предельный цикл не может стянуться к петле сепаратрисы, так как седловая величина $\sigma_2 > 0$) и возникает структура, представленная на фиг. 2 (7), с двумя предельными циклами, охватывающими верхний полуцилиндр.

При дальнейшем возрастании параметра λ вдоль k_2 -кривых предельные циклы монотонно сближаются. Так как для структуры на фиг. 2 (6) предельных циклов нет, то существует на каждой k_2 -кривой точка с координатами $\lambda^{++}(k)$, $d^{++}(k)$, для которой устойчивый и неустойчивый предельные циклы сливаются, образуя полуустойчивый предельный цикл. Соответствующая негрубая бифуркационная структура представлена на

фиг. 2 (7 — 6). Множество точек $\lambda^{++}(\mathbf{k})$, $d^{++}(\mathbf{k})$ образует непрерывную L^{++} кривую, пересекающуюся с каждой из k_2 -кривых в одной точке справа от L^+ -кривой и начинающуюся в точке пересечения L^+ -кривой с прямой $\sigma_2 = 0$ (фиг. 3). Последовательность качественных структур при возрастании λ вдоль k_2 -кривых представлена на фиг. 2 (4), 2 (4—7), 2 (7), 2 (7—6) и 2 (6).

Кривые k_3 ($k_3 < -3/4\pi\gamma$) не пересекают L^+ -кривую и, следовательно, также L^{++} -кривую. Поэтому L^{++} -кривая имеет для больших $|d|$ одинаковое с L^+ -кривой асимптотическое представление. На k_3 -кривых структура фазового пространства эквивалентна изображенной на фиг. 2 (6).

Разбиение пространства параметров λ, d при малых γ представлено на фиг. 3; цифрами 1—7 отмечены области в пространстве параметров, соответствующие грубым структурам в фазовом пространстве, помеченным теми же цифрами на фиг. 2. Негрубые структуры на фиг. 2, помеченные двумя цифрами, соответствуют бифуркационным кривым фиг. 3, разделяющим соответствующие области.



Фиг. 3

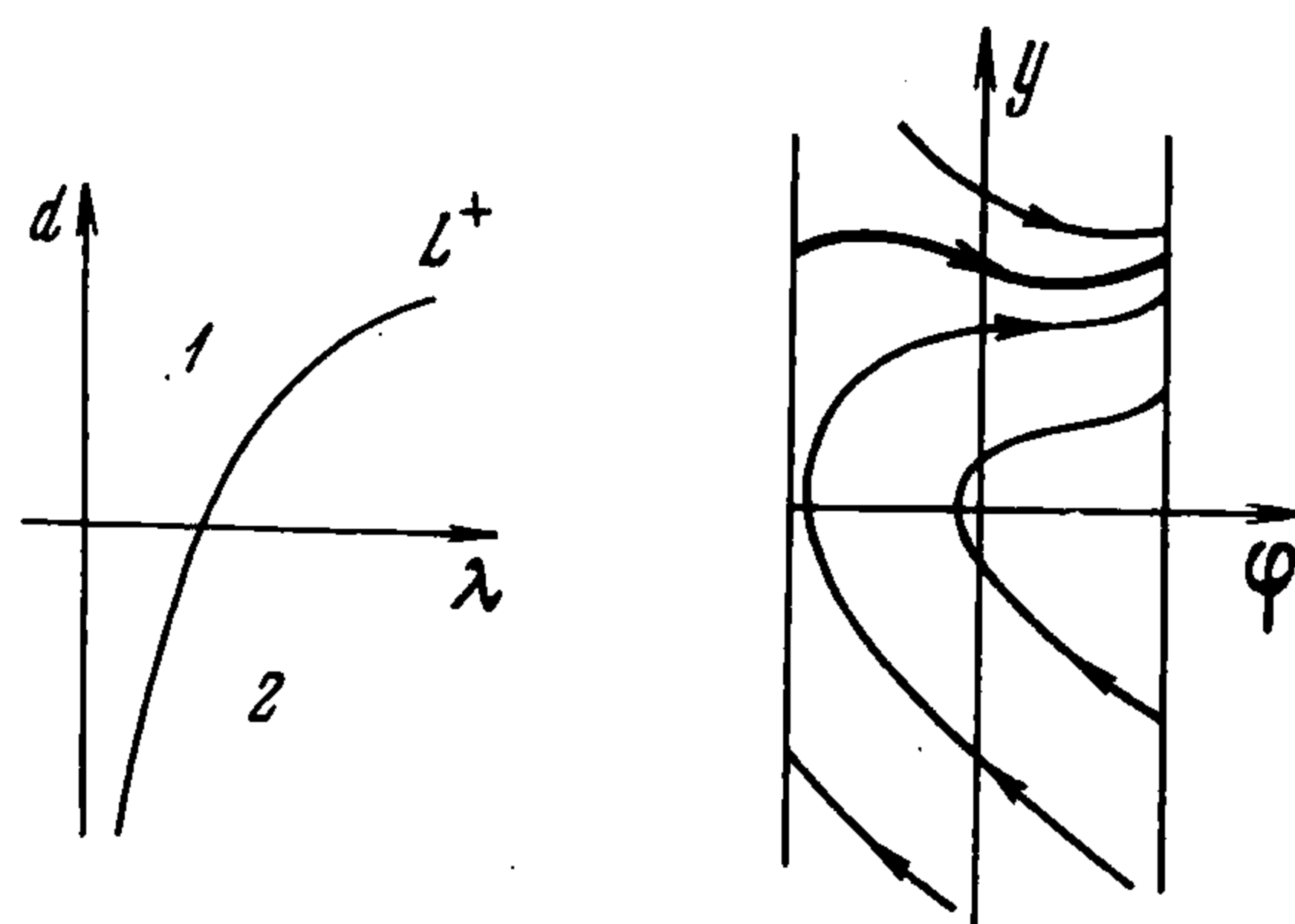
5. Поведение бифуркационных кривых в зависимости от γ . Другие возможные бифуркации. Проследим за изменениями в фазовом пространстве и поведением бифуркационных кривых при переходе от малых положительных значений γ к не малым в интервале $0 \leq \gamma \leq 1$. При возрастании γ состояния равновесия O_1 и O_2 сближаются. Поле направлений на нижнем и верхнем полуцилиндрах монотонно поворачивается соответственно по и против часовой стрелки и при этом устойчивые предельные циклы на верхнем и на нижнем полуцилиндрах поднимаются. Если устойчивый предельный цикл на верхнем полуцилиндре существует для некоторого γ_0 , то он будет существовать и для всех $\gamma > \gamma_0$. Если для некоторого γ_0 существует петля на нижнем или верхнем полуцилиндрах, то при возрастании γ петля снизу разрушается без возникновения предельного цикла, а петля сверху — с возникновением устойчивого предельного цикла. Точки L^- -кривой, разделяющей области 1 и 2 на фиг. 2, при возрастании γ становятся внутренними точками области 2. При возрастании γ точки L^+ -кривой становятся внутренними точками областей 3 и 4, а точки L^{++} -кривой — внутренними точками областей 4 и 7 (либо принадлежат их границе). Кривая L^{++} , начинающаяся в точке пересечения L^+ с прямой $1 + d\sqrt{1 - \gamma^2} = 0$, не существует выше прямой (предположение о существовании таких точек приводит к необходимости существования для двух значений γ_1 и γ_0 точек пересечения кривых $L^{++}(\gamma_1)$ и $L^{++}(\gamma_0)$, что невозможно из-за монотонности поворота поля на полуцилиндре при монотонном изменении γ), и поэтому условие $1 + d\sqrt{1 - \gamma^2} < 0$ может служить оценкой области существования структуры разбиения фазового

цилиндра с двумя предельными циклами на верхнем полуцилиндре, представленной на фиг. 2 (7). Область 7 пространства параметров, соответствующая структуре на фиг. 2 (7), с возрастанием γ опускается.

При возрастании γ до значения $\gamma = 1$ состояния равновесия O_1 и O_2 сливаются, образуя сложную особую точку седло-узел, а области 1—3, 5 и 7 на фиг. 3 уходят в бесконечность. На плоскости λd единственной бифуркационной кривой будет L^+ -кривая (ее существование следует из рассуждений, аналогичных рассуждениям для случая малых γ , опирающихся на существование при $\gamma = 1$ некоторой окрестности оси d , для точек которой есть устойчивый предельный цикл на верхнем полуцилиндре). Пространство параметров и структуры разбиения фазового пространства изображены на фиг. 4.



Фиг. 4

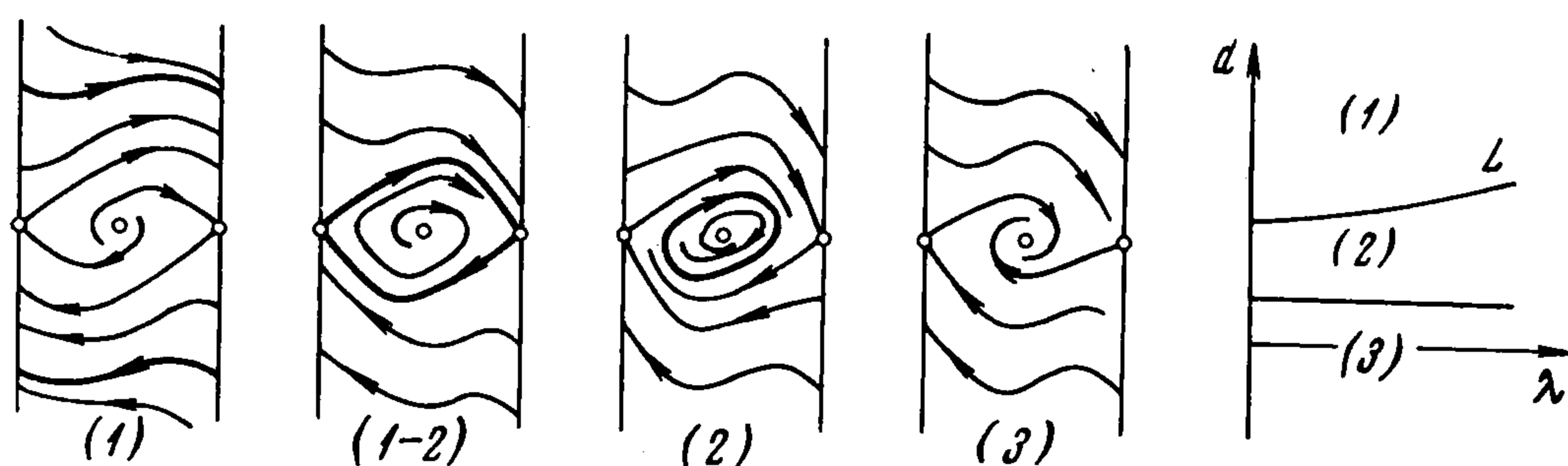


Фиг. 5

При $\gamma > 1$ существует единственная структура разбиения фазового пространства на траектории. Все траектории накручиваются на устойчивый предельный цикл на верхнем полуцилиндре (фиг. 5). При возрастании γ от значения $\gamma = 1$ при λ и d , взятых из области 1 фиг. 4, исчезает состояние равновесия седло-узел. При значениях λ и d , взятых из области 2, происходит появление устойчивого предельного цикла из α -сепаратрисы седло-узла.

При $\gamma = 0$ фазовое пространство симметрично относительно начала координат. Состояния равновесия будут $O_1(0, 0)$ и $O_2(0, \pm \pi)$. Если существует петля сепаратрисы на верхнем полуцилиндре, то существует и петля снизу. Такая двойная петля образует также замкнутый контур вокруг состояния равновесия O_1 . Это значит, что кривые L^- , L^0 и L^+ совпадают. При $\gamma \rightarrow 0$ кривые L^- и L^+ сближаются и сливаются при $\gamma = 0$ с осью d и L^0 -кривой. Точки L^{++} -кривой при убывании γ становятся внутренними точками области 6. Область 7 не может сохраниться при $\gamma = 0$, так как это означало бы, что и при достаточно малых γ будет существовать четыре цикла. При $\gamma \rightarrow 0$ кривая L^{++} влипает в полупрямую $\lambda = 0, d < -1$. При $\gamma = 0$ на плоскости параметров λ, d будет единственная бифуркационная L -кривая, возникающая из слияния кривых L^-, L^0 и L^+ . Кривая L начинается в точке $\lambda = 0, d = 3$ и уходит в бесконечность. Она не может пересечь ни прямую $d = 1$ (так как $P_\varphi' + Q_y' = -\lambda(1 - d \cos \varphi)$ не меняет знак при $|d| \leq 1$), ни прямую $\lambda = 0$ (так как с κ -кривыми не может

быть более одной точки пересечения). При переходе через L-кривую вдоль k-кривых при возрастании λ и возникновении двойной петли к каждой полупетле стягивается устойчивый предельный цикл (так как седловая величина $(P_\varphi' + Q_\psi')_2 = -\lambda(1+d)$ отрицательна, а векторное поле поворачивается по часовой стрелке). При дальнейшем изменении λ и разрушении петли от двойной петли, рассматриваемой как замкнутый контур,



Фиг. 6

охватывающий состояние равновесия O_1 , появляется устойчивый предельный цикл, охватывающий это состояние равновесия. Предельный цикл стягивается в точку при $d = 1$ и фокус становится устойчивым. Пространство параметров и структуры разбиения фазового пространства для $\gamma = 0$ изображены на фиг. 6.

Приложение 1. а). Используя разложения

$$F = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\kappa^2}{4} + \frac{9}{4.16} \kappa^4 + \dots \right), \quad E = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\kappa^2}{4} - \frac{3}{4.16} \kappa^4 - \dots \right)$$

для малых κ находим

$$\psi_{1,2}(\kappa) = 2\pi\gamma \mp \lambda \left(\frac{4\pi}{\kappa} - \frac{\pi d}{2} \kappa + \dots \right) \approx \mp \frac{4\pi\lambda}{\kappa}$$

и, следовательно, $\psi_1(0) = -\infty$, $\psi_2(0) = +\infty$

б). Из (3.2) находим

$$\psi'_{1,2}(\kappa) = \mp 8\lambda \left[-\frac{F}{\kappa^2} - \frac{d}{\kappa^4} \Phi(\kappa) \right], \quad \Phi(\kappa) = (2 - \kappa^2)F - 2E$$

Выражение $\Phi(\kappa)$ для $\kappa \neq 0$ всегда положительно и, следовательно, при $d > 0$ будет

$$\text{sgn } \psi'_{1,2}(\kappa) = \text{sgn } (\pm \lambda)$$

В самом деле

$$\Phi'(\kappa) = \frac{\kappa}{1 - \kappa^2} \left[E - (1 - \kappa^2)F \right] \equiv \frac{\kappa}{1 - \kappa^2} \Phi_1(\kappa), \quad \Phi_1'(\kappa) = \kappa F \geq 0$$

Так как $\Phi_1(0) = 0$ и $\Phi_1'(\kappa) \geq 0$, то $\Phi_1(\kappa) \geq 0$ (и $\Phi'(\kappa) \geq 0$)

Но, так как $\Phi(0) = 0$ и $\Phi'(\kappa) \geq 0$, то $\Phi(\kappa) \geq 0$

Приложение 2. Для исследования поведения траекторий при больших $y > 0$ полагаем $y = 1/\rho$. Система (0.1) переходит в систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{d\rho}{dt} = \rho(\lambda - k \cos \varphi) + \rho^2(\sin \varphi - \gamma)$$

или в уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho^2 (\lambda - k \cos \varphi) + \rho^3 (\sin \varphi - \gamma) \quad (A)$$

где ρ и φ можно рассматривать как обычные полярные координаты на плоскости, перпендикулярной оси фазового цилиндра. Преобразование $y = 1/\rho$ переводит спирали, охватывающие цилиндр, в спирали, охватывающие состояние равновесия в точке $\rho = 0$. Решение уравнения (A), определяемое начальным условием $\rho = \rho_0 > 0$ при $\varphi = 0$, можно искать в виде ряда

$$\rho = \rho_0 u_1(\varphi) + \rho_0^2 u_2(\varphi) + \rho_0^3 u_3(\varphi) + \rho_0^4 u_4(\varphi) + \dots$$

сходящегося для всех φ в интервале $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ и для всех достаточно малых значений ρ_0 . Последовательно определяя обычным путем из рекуррентных уравнений функции $u_1(\varphi) \equiv 1$, $u_2(\varphi)$, ... и полагая затем $\varphi = 2\pi$, получаем на отрезке $\varphi = 0$ функцию последования. Уравнение

$$\rho_1 - \rho_0 = \rho_0^2 u_2(2\pi) + \rho_0^3 u_3(2\pi) + \rho_0^4 u_4(2\pi) + \dots \equiv \rho_0^2 \{2\pi\lambda + [(2\pi\lambda)^2 - 2\pi\gamma]\rho_0 + [(2\pi\lambda)^3 - 2\pi\lambda(5\pi\gamma + 1) - k\pi]\rho_0^2 + \dots\} = 0$$

при $\gamma = 0$ и малых λ (для любого $k > 0$) имеет положительный корень, соответствующий устойчивому предельному циклу на верхнем фазовом полуцилиндре. При $\gamma = 0$ в силу симметрии траекторий фазового пространства (полосы $-\pi \leq \varphi \leq \pi$) относительно начала координат будет существовать и симметрично расположенный устойчивый предельный цикл на нижнем полуцилиндре. Оба предельных цикла сохранятся и при малых γ . При малых γ и λ и любых $k > 3/4 \pi\gamma$ будет осуществляться структура разбиения фазового цилиндра, представленная на фиг. 2(1).

Приложение 3. Значения константы h , выделяющие кривые консервативной системы, вблизи которых для малых γ и λ будут существовать предельные циклы, охватывающие состояние равновесия, определяются как корни уравнения

$$\psi_3^*(h) = \int_c [\gamma - \lambda(1 - d \cos \varphi)] y d\varphi = 0$$

где c — одна из кривых $y^2 = 2(\cos \varphi + h)$ при $-1 < h < 1$. Так как

$$\psi_3^*(h) = -2\sqrt{2}\lambda \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (1 - d \cos \varphi) (\cos \varphi + h)^{1/2} d\varphi \quad (\cos \varphi_0 + h = 0)$$

и, следовательно, корни уравнения $\psi_3^*(h) = 0$ не зависят от γ и λ , то область плоскости λd , для которой есть предельный цикл, охватывающий состояние равновесия, ограничивается прямой $d = d_1$ (с точностью до членов порядка μ , если положить $\gamma = \mu\gamma_0$ и $\lambda = \mu\lambda_0$). Значение d_1 легко находится для предельного случая $h = 1$ (замкнутый контур составлен из двух сепаратрис, идущих из седла в седло). Отсюда $d_1 = 3$.

Поступила 6 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1967.
2. Guen W. J. Theory of AFC synchronization. Proc. Inst. Radio Engrs., 1953, vol. 41 No. 8, pp. 1043—1048.
3. Капранов М. В. Полоса захвата при фазовой автоподстройке частоты. Радиотехника, 1956, т. 11, № 12.
4. Белюстина Л. Н. Исследование нелинейной системы фазовой автоподстройки частоты. Радиофизика, 1959, т. 2, № 2.
5. Reu T. J. Automatic phasecontrol: Theory and design. Proc. Inst. Radio Engrs., 1960, vol. 48, No. 10, pp. 1760—1771.
6. Brunk M. Der Fangbereich von Nachlaufsynchronisationsschaltung mit sinusförmiger Charakteristik des Phasendiskriminators. Arch. der Elektr. Übertrag., 1965, Bd 19, H. 12, S. 649—663.
7. Poincaré L. S. Autoschwingungssysteme, die den Hamiltonschen nahe liegen. Phys. Z. Sowjetunion, 1934, Bd 6, H. 1—2, S. 25—28.