Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМАХ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПО ВЕЛИЧИНЕ И ИМПУЛЬСУ УПРАВЛЯЮЩИМИ СИЛАМИ

А. М. Формальский

(Москва)

Рассматривается задача оптимального по времени управления в случае, когда управляющие силы ограничены одновременно по величине и по импульсу. Рассмотрение производится с помощью областей достижимости. Изучается случай, когда границы этих областей имеют плоские участки и угловые точки. Для некоторых систем второго порядка при указанных ограничениях на управление решается задача синтеза оптимального управления.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему управления, описываемую линейным матричным дифференциальным уравнением с действительными постоянными коэффициентами

$$dx/dt = Ax + Bu \tag{1.1}$$

Здесь $x = \| x_i \|$, $A = \| a_{ij} \|$, $B = \| b_{is} \|$, $u = \| u_s \|$ — матрицы порядка $(n \times 1)$, $(n \times n)$, $(n \times r)$, $(r \times 1)$ соответственно, $u_s = u_s(t)$ — измеримая функция времени, удовлетворяющая одновременно двум ограничениям

$$| u_s(t) | \leqslant M_s \qquad (M_s = \mathrm{const} > 0) \tag{1.2}$$

$$\int_0^\infty | u_s(\tau) | \, d\tau \leqslant C_s^\circ \qquad (C_s^\circ = \mathrm{const} > 0) \tag{1.3}$$

Через b_s $(s = 1, \ldots, r)$ будем в дальнейшем обозначать s-й столбец матрицы B $(b_s \neq 0$ при всех $s = 1, \ldots, r)$. Условие (1.2) соответствует ограниченности управляющей силы, а условие (1.3), с физической точки зрения, означает ограниченность импульса управляющей силы. Неравенство (1.3) в некоторых системах означает ограниченность запаса топлива двигателя, создающего управляющую силу.

Будем рассматривать задачу быстрейшего приведения системы (1.1) в начало координат с помощью управления, удовлетворяющего условиям (1.2), (1.3) (см., например, [1]), в частности, задачу синтеза оптимального по времени управления.

При наличии только ограничения (1.2) оптимальное по времени (минимальное время в этом случае обозначим через $\theta = \theta(x)$) управление является, как известно [2–5], релейным. Задача синтеза такого управления заключается в разбиении пространства X_n, состоящего из фазовых координат $x_1, \ldots, x_n$, поверхностями переключения на области, в которых управления $u_s(t)$ принимают значения M_s и $-M_s$ $(s = 1, \ldots, r)$. Если такое разбиение произведено, то известно оптимальное управление как функция фазовых координат $u = u'(x)$.

При наличии ограничений (1.2), (1.3) постановка задачи синтеза видоизменяется. В начальный момент оптимальное управление в этом случае зависит не только от вектора начального состояния x°, но также и от вектора $C^\circ = \| C_s^\circ \|$, т. е. $u = u(x^\circ, C^\circ)$. В текущий момент времени t имеем $u = u(x, C)$, где x — состояние системы в момент t, а вектор $C = \| C_s \|$ характеризует ограничение на величину импульса в этот момент

$$\int_t^\infty |u_s(\tau)| \, d\tau \leqslant C_s \qquad (s = 1, \ldots, r)$$

Введем координату x_{n+s} $(s = 1, \ldots, r)$, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_{n+s}}{dt} = -|u_s(t)|$$

Решение такого уравнения имеет вид

$$x_{n+s}(t) = x_{n+s}(0) - \int_0^t |u_s(\tau)| \, d\tau$$

Пусть $x_{n+s}(0) = C_s^\circ$, тогда из (1.3) получаем

$$\int_t^\infty |u_s(\tau)| \, d\tau \leqslant x_{n+s}(t)$$

т.е. величина $x_{n+s}(t)$ характеризует импульс или «запас топлива» двигателя, создающего силу u_s, в текущий момент времени t.

Таким образом, задача синтеза оптимального управления состоит в построении функции $u = u(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+r})$. Легко видеть, что в области

$$\theta(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \frac{1}{M_s} x_{n+s} \qquad (s = 1, \ldots, r) \tag{1.4}$$

пространства X_{n+r}, состоящего из фазовых координат $x_1, \ldots, x_n$ и координат $x_{n+1}, \ldots, x_{n+r}$, оптимальное управление не зависит от координат x_{n+s} $(s = 1, \ldots, r)$. В этой области (1.4) синтез осуществляется с помощью функции $u = u'(x)$.

2. Области достижимости. Решение уравнения (1.1) имеет вид

$$x(t) = e^{At}x^\circ + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) \, d\tau \tag{2.1}$$

Пусть $x(t) = 0$ при $t = T$, тогда из (2.1) имеем

$$-x^\circ = \int_0^T e^{-A\tau} Bu(\tau) \, d\tau \tag{2.2}$$

Предположим, что

$$\int_0^T |u_s(\tau)| \, d\tau \leqslant x_{n+s} = \mathrm{const} \qquad (s = 1, \ldots, r) \tag{2.3}$$

Множество измеримых функций $u_s(t)$, удовлетворяющих условиям (1.2) и (2.3), обозначим через $\Omega_s(T)$. Множество вектор-функций $u(t) = \| u_s(t) \|$, таких, что $u_s(t) \in \Omega_s(T)$, обозначим через $\Omega(T)$. Введем далее такие обозначения

$$v_s(T) = \int_0^T e^{-A\tau} b_s u_s(\tau)\, d\tau, \qquad v(T) = \sum_{s=1}^r v_s(T) = \int_0^T e^{-A\tau} Bu(\tau)\, d\tau \qquad (2.4)$$

и рассмотрим в пространстве X_n области достижимости

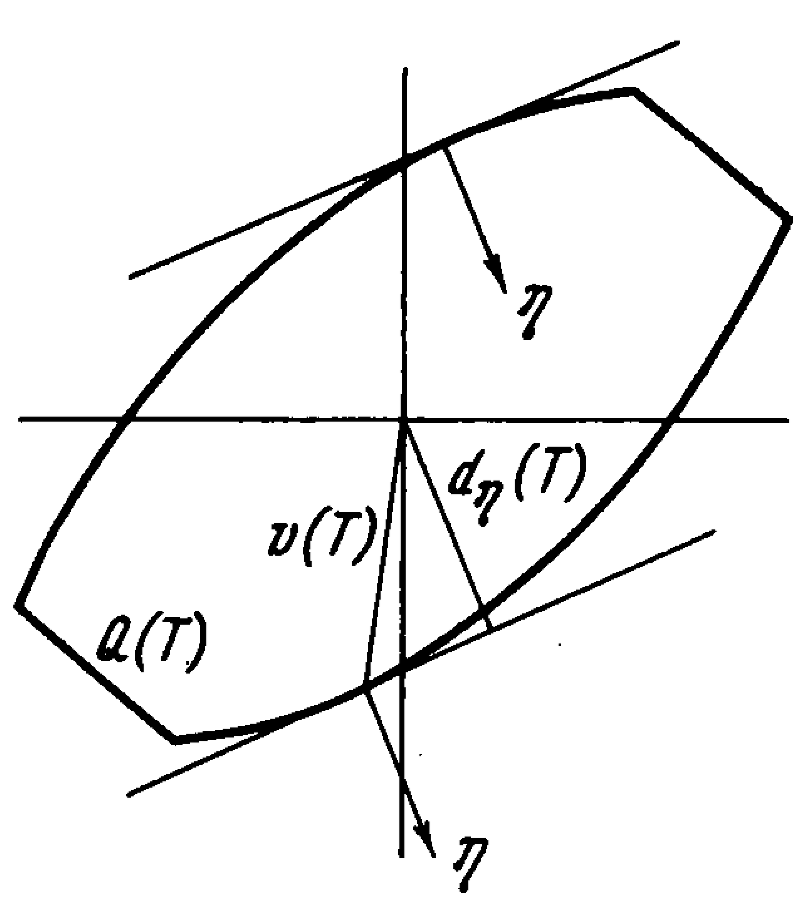
$$Q_s(T) = \{v_s(T): \quad u_s(t) \in \Omega_s(T)\}, \qquad Q(T) = \sum_{s=1}^r Q_s(T) = \{v(T): u(t) \in \Omega(T)\}$$

Каждое из множеств $Q_s(T)$, а следовательно, и область достижимости $Q(T)$, обладает следующими свойствами.

1°. Замкнутость. 2°. Выпуклость. 3°. $Q_s(T)$ «растет» с ростом T, т. е. $Q_s(T_1) \in Q_s(T_2)$, если $T_1 \leqslant T_2$. 4°. Симметричность относительно начала координат.

Свойство 1° следует из того, что множество $Q_s(T)$ есть линейное отображение множества $\Omega_s(T)$, которое в пространстве $L_2[0, T]$ является слабо компактным в себе. Последнее можно доказать, пользуясь тем, что в пространстве $L_2[0, T]$ сфера слабо компактна в себе [6]. Свойства 2°, 3°, 4° доказываются легко [3, 7, 8].

Возьмем произвольный единичный вектор η $(1 \times n)$ и построим опорные гиперплоскости множества $Q(T)$, ортогональные вектору η. Из свойств 2° и 4° следует, что таких плоскостей две и они симметричны друг другу относительно начала координат (фиг. 1). Расстояние $d_\eta(T)$ от начала координат до этих плоскостей определяется выражением [8, 9]



Фиг. 1

$$d_\eta(T) = \max_{v(T) \in Q(T)} (\eta v(T)) = \max_{u(t) \in \Omega(T)} \int_0^T \eta e^{-A\tau} Bu(\tau)\, d\tau \qquad (2.5)$$

Из свойств 1° и 2° следует, что множеству $Q(T)$ принадлежат те и только те точки x, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$|\eta x| \leqslant d_\eta(T) \qquad (2.6)$$

при всевозможных единичных векторах η.

Из определения множества $Q(T)$ следует, что за время T систему (1.1) можно привести в начало координат тогда и только тогда, когда $x^0 \in Q(T)$. Если в соотношениях (2.5), (2.6) перейти к пределу при $T \to \infty$, то можно определить область управляемости Q [8], т. е. множество точек пространства X_n, из которых система может быть приведена в начало координат с помощью управления, удовлетворяющего условиям (1.2), (1.3).

3. Определение расстояний $d_\eta(T)$. Если на функцию $u(t)$ наложены только ограничения (1.2) (ограничения (2.3) отсутствуют), то интеграл

$$J(u, \eta, T) = \sum_{s=1}^{r} J_s(u, \eta, T) = \sum_{s=1}^{r} \int_0^T \eta e^{-A\tau} b_s u_s(\tau)\, d\tau \tag{3.1}$$

достигает максимума при управлении

$$u_s(t) = M_s \operatorname{sgn}[\eta e^{-At} b_s] \qquad (s = 1, \ldots, r) \tag{3.2}$$

Если $M_s T \leqslant x_{n+s}$ $(s = 1, \ldots, r)$, то определяемое выражением (3.2) управление $u(t) \in \Omega(T)$.

Рассмотрим теперь вопрос о максимуме функционала $J_s(u, \eta, T)$ в предположении, что

$$M_s T > x_{n+s} \tag{3.3}$$

Введем обозначения

$$E^{\sigma_s} = \{t \in [0, T]: |\eta e^{-At} b_s| \geqslant \sigma_s\} \quad (\sigma_s = \text{const}) \tag{3.4}$$

$$F^{\sigma_s} = \{t \in [0, T]: |\eta e^{-At} b_s| = \sigma_s\}$$

$$G^{\sigma_s} = \{t \in [0, T]: |\eta e^{-At} b_s| < \sigma_s\} \; (E^{\sigma_s} + G^{\sigma_s} = [0, T]) \tag{3.5}$$

$$u_s(t, \sigma_s) = \begin{cases} M_s \operatorname{sgn}[\eta e^{-At} b_s] & \text{при } t \in E^{\sigma_s} \\ 0 & \text{при } t \in G^{\sigma_s} \end{cases} \tag{3.6}$$

Через $\mu\Phi$ обозначим меру в смысле Лебега [10] множества $\Phi \in \in [0, T]$.

Функция $\eta e^{-At} b_s$ является аналитической. Поэтому либо $|\eta e^{-At} b_s| \equiv \sigma_s$ для некоторого $\sigma_s \geqslant 0$ при всех $t \in [0, T]$ и, следовательно, $E^{\sigma_s} = F^{\sigma_s} = [0, T]$, $\mu E^{\sigma_s} = \mu F^{\sigma_s} = T$, либо при всяком $\sigma_s \geqslant 0$ равенство $|\eta e^{-At} b_s| = \sigma_s$ имеет место лишь для конечного числа точек $t \in [0, T]$ и, следовательно, $\mu F^{\sigma_s} = 0$.

Предположим сначала, что $\mu F^{\sigma_s} = 0$ для всякого $\sigma_s \geqslant 0$. Тогда при изменении величины σ_s от минимального на отрезке $[0, T]$ значения функции $|\eta e^{-At} b_s|$ до максимального величина μE^{σ_s}, как легко показать, изменяется непрерывно и монотонно от T до 0. Из условия (3.3) следует, что существует единственное σ_s°, при котором

$$\mu E^{\sigma_s^\circ} = \frac{1}{M_s} x_{n+s} \tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.7) видно, что $u_s(t, \sigma_s^\circ) \in \Omega_s(T)$. В [8,11] с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям при доказательстве леммы Неймана — Пирсона [3, 7], показано, что управление $u_s(t, \sigma_s^\circ)$ (и только оно) максимизирует функционал $J_s(u, \eta, T)$.

Предположим теперь, что $\mu F^{\sigma_s} = T$ для некоторого $\sigma_s \geqslant 0$, т. е.

$$\eta e^{-At} b_s \equiv D_s = \text{const} \qquad (\sigma_s = |D_s|)$$

В этом случае максимизирующими будут все управления из множества $\omega_s(\eta, T)$ функций, удовлетворяющих неравенству (1.2) и условиям

$$[D_s u_s(t)] \geqslant 0, \qquad \int_0^T u_s(\tau)\, d\tau = x_{n+s} \operatorname{sgn} D_s$$

Заметим, что выражение (3.2) получается из (3.6) при $\sigma_s = 0$. Поэтому можно считать, что при $M_s T \leqslant x_{n+s}$ максимизирующим будет управление $u_s(t, \sigma_s^\circ)$, где $\sigma_s^\circ = 0$ ($E^{\sigma_s^\circ} = [0, T]$).

Для расстояния $d_\eta(T)$ получается выражение

$$d_\eta(T) = \sum_{s=1}^{r} M_s \int_{E^{\sigma_s^\circ}} |\eta e^{-A\tau} b_s|\, d\tau \tag{3.8}$$

Можно показать, что расстояние $d_\eta(T)$ есть непрерывная функция вектора η и величины T. Отсюда и из неравенств (2.6) заключаем, что множества $Q_s(T)$ и $Q(T)$ обладают следующим свойством «непрерывности».

5°. Если точка v есть внутренняя точка множества $Q_s(T)$, то существует такое $T_1 < T$, что $v \in Q_s(T_1)$.

Заметим, что свойство 5° можно доказать почти так же, как в [5] (стр. 88) доказывается аналогичное свойство при наличии только ограничений типа (1.2).

4. Плоские участки границ областей достижимости $Q_s(T)$ и $Q(T)$. При подстановке в (2.4) управлений $u_s(t)$, максимизирующих функционалы $J_s(u, \eta, T)$ $(s = 1, \ldots, r)$, получается вектор $v(T)$ координат точки, являющейся общей для одной из двух опорных гиперплоскостей и множества $Q(T)$ (точки касания). При этом $v_s(T)$ — вектор координат точки касания множества $Q_s(T)$ с одной из опорных гиперплоскостей множества $O_s(T)$, ортогональных вектору η.

Множество $Q(T)$ имеет единственную точку касания тогда и только тогда, когда единственную точку касания имеют все множества $Q_s(T)$ $(s = 1, \ldots, r)$. Если управление, максимизирующее функционал $J_s(u, \eta, T)$, определяется однозначно, то множество $Q_s(T)$ имеет единственную точку касания. Максимизирующее управление $u_s(t)$ определяется неоднозначно в двух случаях

$$\eta e^{-At} b_s \equiv D_s = \text{const} \neq 0, \qquad M_s T > x_{n+s} \tag{4.1}$$

$$\eta e^{-At} b_s \equiv 0 \tag{4.2}$$

В наиболее простом случае (4.2) функционал $J_s(u, \eta, T) = 0$ при любом управлении $u_s(t)$. При этом множество $Q_s(T)$ целиком принадлежит плоскости $\eta x = 0$. Для того чтобы существовал вектор η, при котором имеет место условие (4.2), необходимо и достаточно [4,12], чтобы ранг ρ_s матрицы $W_s = \| b_s, Ab_s, \ldots, A^{n-1} b_s \|$ был меньше n. Множество $Q_s(T)$ принадлежит подпространству X_{ρ_s} размерности ρ_s. Такая же ситуация имеет место и при наличии только ограничений (1.2).

В случае (4.1) максимизирующими являются все управления $u_s(t) \in \in \omega_s(\eta, T)$. Множество $P_s(\eta, T)$ точек касания определяется выражением

$$P_s(\eta, T) = \{v_s(T): \quad u_s(t) \in \omega_s(\eta, T)\}$$

Это множество принадлежит некоторой гиперплоскости $\Pi_s(\eta)$, ортогональной вектору η.

Множество $P_s(\eta, T)$ обладает свойствами 1°, 2°, 3°. Нетрудно показать, что размерность множества $P_s(\eta, T)$ равна $\rho_s - 1$. Если, например, $\rho_s = n$, то граница множества $Q_s(T)$, имеющего размерность n, содержит плоские участки размерности $n - 1$, т. е. множество $Q_s(T)$ не является строго выпуклым. При наличии только ограничений (1.2) такой ситуации быть не может, т. е. множество $Q_s(T)$ будет всегда строго выпуклым [5].

Множество $P_s(\eta, T)$ обладает свойством 5°, т. е. если v является внутренней в плоскости $\Pi_s(\eta)$ точкой множества $P_s(\eta, T)$, то существует такое $T_1 < T$, что $v \in P_s(\eta, T_1)$.

Возьмем произвольную точку, принадлежащую границе в плоскости $\Pi_s(\eta)$ множества $P_s(\eta, T)$, и построим в этой точке опорную гиперплоскость множества $P_s(\eta, T)$. Таких плоскостей в пространстве X_{ρ_s} — бесконечное количество. Среди них можно выбрать такую плоскость π, что ортогональный ей вектор η' будет сколь угодно мало отличаться от вектора η, не совпадая с ним. При этом можно добиться того, чтобы

$$\operatorname{sgn}[\eta' e^{-At} b_s] = \operatorname{sgn}[\eta e^{-At} b_s] = \operatorname{sgn} D_s \qquad \text{при } t \in [0, T]$$

Следовательно, для векторов η', достаточно близких к вектору η, управления $u_s(t) \in \Omega_s(T)$, максимизирующие функционал $J_s(u, \eta, T)$, принадлежат также и множеству $\omega_s(\eta, T)$. Точки $v_s(T)$, получающиеся при этих управлениях, принадлежат множеству $P_s(\eta, T)$.

Опорная гиперплоскость множества $Q_s(T)$, ортогональная вектору η', не может быть ближе к началу координат, нежели плоскость π. С другой стороны, эта опорная гиперплоскость не может быть дальше плоскости π от начала координат, поскольку она содержит точки множества $P_s(\eta, T)$. Следовательно, эта опорная гиперплоскость совпадает с плоскостью π.

Таким образом, доказано, что в точках границы множества $P_s(\eta, T)$ существует неединственная опорная гиперплоскость множества $Q_s(T)$, т. е. точки границы множества $P_s(\eta, T)$ являются «угловыми» для границы области $Q_s(T)$.

Размерность множества $Q(T)$ равна рангу R матрицы $W = \| W_1, \ldots \ldots, W_r \|$, т. е. множество $Q(T)$ расположено в некотором подпространстве X_R размерности R.

Пусть для некоторого вектора $\eta \in X_R$ имеют место условия (4.1) при $s = 1, \ldots, r_1$ и (4.2) при $s = r_1 + 1, \ldots, r$. Введем обозначения

$$P(\eta, T) = \sum_{s=1}^{r} P_s(\eta, T), \qquad P_s(\eta, T) = Q_s(T) \qquad (s = r_1 + 1, \ldots, r)$$

Расстояние $d_\eta(T)$ не зависит от T, обозначим его через d_η ($d_\eta \neq 0$). Множество $P(\eta, T)$ расположено в плоскости $\Pi(\eta)$ ($\eta x = d_\eta$). Размерность его не больше $R-1$. Множество $P(\eta, T)$ так же, как и $P_s(\eta, T)$, обладает свойствами 1°, 2°, 3°, 5°. Точки границы множества $P(\eta, T)$ являются угловыми для границы области $Q(T)$.

5. Оптимальное управление. Пусть начальное состояние $x^\circ \in Q \in X_R$. Обозначим через T° минимальное значение T, при котором $x^\circ \in Q(T)$. Другими словами, T° — минимальное значение T, при котором существует такое управление $u(t) \in \Omega(T)$, что выполняется соотношение (2.2). Из свойства 5° множества $Q(T)$ следует, что точка x° принадлежит границе множества $Q(T^\circ)$. Построим в пространстве X_R опорную гиперплоскость множества $Q(T^\circ)$, проходящую через точку x°. Эта плоскость делит пространство X_R на два полупространства. Пусть $\eta^{(1)} \in X_R$ — вектор, ортогональный этой плоскости и направленный в то полупространство, где расположено множество $Q(T^\circ)$. Оптимальное по времени управление максимизирует, очевидно, интеграл $J(u, \eta^{(1)}, T^\circ)$.

Предположим, что при всех $s = 1, \ldots, r$ управление, максимизирующее функционал $J_s(u, \eta^{(1)}, T^\circ)$, определяется неоднозначно, т. е.

$$\eta^{(1)} e^{-At} b_s \equiv D_s^{(1)} = \text{const} \neq 0, \qquad M_s T^\circ > x_{n+s} \qquad (s = 1, \ldots, r_1^{(1)})$$

$$\eta^{(1)} e^{-At} b_s \equiv 0 \qquad (s = r_1^{(1)} + 1, \ldots, r)$$

Тогда $x^\circ \in P(\eta^{(1)}, T^\circ) \in \Pi(\eta^{(1)})$. Из свойства 5° множества $P(\eta^{(1)}, T)$ следует, что точка x° принадлежит границе множества $P(\eta^{(1)}, T)$, т. е. является угловой точкой границы множества $Q(T^\circ)$. Тогда в точке x° можно построить еще одну опорную гиперплоскость множества $Q(T^\circ)$ с ортогональным вектором $\eta^{(2)} \in X_R$ ($\eta^{(2)} \neq \eta^{(1)}$). Если и для вектора $\eta^{(2)}$ максимизирующие управления при всех s определяются неоднозначно, то это означает, что $x^\circ \in P(\eta^{(2)}, T^\circ) \in \Pi(\eta^{(2)})$, где $\Pi(\eta^{(2)})$ — гиперплоскость, не совпадающая с $\Pi(\eta^{(1)})$. При этом точка x° принадлежит множеству $P(\eta^{(1)}, T^\circ) \times P(\eta^{(2)}, T^\circ)$, размерность которого не превосходит $R-2$, и, более того, границе этого множества. Тогда в точке x° можно построить еще одну опорную гиперплоскость множества $Q(T^\circ)$ с ортогональным вектором $\eta^{(3)} \in X_R$, причем вектора $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)}$ линейно независимы. Предположим, что, продолжая этот процесс, удалось построить линейно независимые вектора $\eta^{(k)} \in X_R$ ($k = 1, \ldots, R$), для каждого из которых

$$\eta^{(k)} e^{-At} b_s \equiv D_s^{(k)} = \text{const} \neq 0, \qquad M_s T^\circ > x_{n+s} \qquad (s = 1, \ldots, r_1^{(k)})$$

$$\eta^{(k)} e^{-At} b_s \equiv 0 \qquad (s = r_1^{(k)} + 1, \ldots, r)$$

Так как $b_s \neq 0$ ($s = 1, \ldots, r$), то для всякого s существует k, при котором $\eta^{(k)} e^{-At} b_s \not\equiv 0$. Тогда $M_s T^\circ > x_{n+s}$ при $s = 1, \ldots, r$, т. е.

$$T^\circ > N = \max_{1 \leqslant s \leqslant r} (x_{n+s}/M_s)$$

Множество $Q_s(T)$ $(s = 1, \ldots, r)$ представляет собой отрезок, который «растет» при изменении T от 0 до x_{n+s} / M_s, а при $T \geqslant x_{n+s} / M_s$ остается без изменения. Множество $Q(T)$ представляет собой многогранник, который не зависит от T при $T \geqslant N$. Отсюда следует, что оптимальное время $T^\circ \leqslant N$, что противоречит сказанному выше. Следовательно, в процессе построения векторов $\eta^{(k)}$ найдется такое $k \leqslant R$, при котором максимизирующее управление определяется однозначно хотя бы для одного значения индекса s. Пусть это управление $u_s^\circ(t)$, являющееся оптимальным, определяется однозначно при $s = 1, \ldots, r_1$. Из третьего параграфа следует, что управление $u_s^\circ(t) = u_s(t, \sigma_s^\circ)$ $(s = 1, \ldots, r_1)$ определяется соотношениями (3.4) — (3.6), в которых $T = T^\circ$.

Если $r_1 = r$, то оптимальное управление определено полностью. Предположим, что $r_1 < r$, и найдем управления $u_s^\circ(t)$ $(s = r_1 + 1, \ldots, r)$, при которых осуществляется равенство (2.2) для $T = T^\circ$. Для этого подставим в (2.2) найденные функции $u_s^\circ(t)$ $(s = 1, \ldots, r_1)$ и запишем вместо (2.2) соотношение

$$-\xi^\circ = \sum_{s=r_1+1}^{r} \int_0^T e^{-A\tau} b_s u_s(\tau)\, d\tau \qquad \left(\xi^\circ = x^\circ + \sum_{s=1}^{r_1} \xi_s, \qquad \xi_s = \int_0^{T^\circ} e^{-A\tau} b_s u_s^\circ(\tau)\, d\tau\right) \tag{5.1}$$

Множество

$$Q^{r_1}(T) = \sum_{s=r_1+1}^{r} Q_s(T)$$

обладает свойствами 1° — 5°. Обозначим через T^1 минимальное значение T, при котором $\xi^\circ \in Q^{r_1}(T)$; очевидно, что $T^1 \leqslant T^\circ$. Точка ξ° принадлежит границе множества $Q^{r_1}(T^1)$. Так же, как и выше, можно доказать, что существует опорная гиперплоскость этого множества, проходящая через точку ξ°, с таким вектором η, для которого хотя бы при одном из последовательности $r_1 + 1, \ldots, r$ значении индекса s максимизирующее управление определяется однозначно. Если однозначное определение возможно при всех $s = r_1 + 1, \ldots, r$, тогда управления, осуществляющие равенства (5.1) при $T = T^\circ$, можно выбрать в виде

$$u_s^\circ(t) = \begin{cases} u_s(t, \sigma_s^\circ) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T^1 \\ 0 & \text{при } T^1 < t \leqslant T^\circ \end{cases} \tag{5.2}$$

Функция $u_s(t, \sigma_s^\circ)$ $(s = r_1 + 1, \ldots, r)$ определяется здесь соотношениями (3.4)—(3.6), в которых $T = T^1$.

При $T^1 < T^\circ$ управления $u_s(t)$ $(s = r_1 + 1, \ldots, r)$, осуществляющие равенство (5.1) для $T = T^\circ$, не являются единственными и их можно определить не только по формуле (5.2).

Если максимизирующее управление определяется однозначно только при $s = r_1 + 1, \ldots, r_2$ $(r_2 < r)$, то для определения управлений $u_s^\circ(t)$ $(s = r_2 + 1, \ldots, r)$ нужно подставить в (5.1) управления (5.2) при $s = r_1 + 1, \ldots, r_2$ и провести рассуждения, аналогичные приведенным выше. Действуя таким образом, можно найти все управления $u_s^\circ(t)$ $(s = 1, \ldots, r)$, осуществляющие равенство (2.2) при $T = T^\circ$, а тем самым определить оптимальное управление для состояния x°.

Таким образом, оптимальное управление $u_s^\circ(t)$ принимает значения $-M_s$, 0, M_s. Задача синтеза состоит в разбиении пространства X_{n+r} поверхностями переключения на области, в которых управление принимает соответствующие значения.

6. Системы второго порядка [1]. Рассмотрим систему вида

$$x_1^{\bullet} = x_2, \quad x_2^{\bullet} = \lambda x_2 + \nu x_1 + u \tag{6.1}$$

Здесь $r = 1$, поэтому индекс s опустим. Не ограничивая общности, можно считать, что $M = 1$.

Пусть сначала $\lambda = \nu = 0$, тогда

$$\eta e^{-At} b = \sin \varphi - t \cos \varphi \qquad (\cos \varphi = \eta_1, \ \sin \varphi = \eta_2) \tag{6.2}$$

Построим область достижимости $Q(T)$ при $T > x_3$.

Пусть $\varphi \neq {}^1/_2\,\pi$. После элементарных выкладок получаем, что множество E^{σ° состоит из отрезков

$$[T - x_3, \ T] \qquad \text{при } \operatorname{tg}\varphi \leqslant {}^1/_2\,(T - x_3)$$

$$[0, \ \operatorname{tg}\varphi - {}^1/_2\,(T - x_3)], \ [\operatorname{tg}\varphi + {}^1/_2\,(T - x_3), \ T] \ \text{при } {}^1/_2\,(T - x_3) < \operatorname{tg}\varphi < {}^1/_2\,(T + x_3)$$

$$[0, \ x_3] \qquad \text{при } {}^1/_2\,(T + x_3) \leqslant \operatorname{tg}\varphi$$

Отсюда получаем

если $-{}^1/_2\pi < \varphi \leqslant \operatorname{arctg}\,[{}^1/_2\,(T - x_3)]$, $\quad$ (6.3)

$$u(t, \sigma^\circ) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant t < T - x_3 \\ -1 & \text{при } T - x_3 \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{6.4}$$

если $\operatorname{arctg}\,[{}^1/_2\,(T - x_3)] < \varphi < \operatorname{arctg}\,[{}^1/_2\,(T + x_3)]$, $\quad$ (6.5)

$$u(t, \sigma^\circ) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant t < \operatorname{tg}\varphi - {}^1/_2\,(T - x_3) \\ 0 & \text{при } \operatorname{tg}\varphi - {}^1/_2\,(T - x_3) \leqslant t < \operatorname{tg}\varphi + {}^1/_2\,(T - x_3) \\ -1 & \text{при } \operatorname{tg}\varphi + {}^1/_2\,(T - x_3) \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{6.6}$$

если $\operatorname{arctg}\,[{}^1/_2\,(T + x_3)] < \varphi < {}^1/_2\pi$, $\quad$ (6.7)

$$u(t, \sigma^\circ) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant x_3 \\ 0 & \text{при } x_3 < t \leqslant T \end{cases} \tag{6.8}$$

Для ${}^1/_2\,\pi < \varphi < {}^3/_2\pi$ управление $u(t, \sigma^\circ)$ получается умножением функций (6.4), (6.6), (6.8) на -1. Таким образом, вследствие монотонности функции (6.2) получается, что управление $u(t, \sigma^\circ)$ принимает на отрезке $[0, T]$ каждое из трех значений $-1, 0$ и 1 не более одного раза.

Для расстояния $d_\eta(T)$ получается выражение

$$d_\eta(T) = \begin{cases} {}^1/_2 x_3 (2T - x_3) \cos\varphi - x_3 \sin\varphi & \text{при условии (6.3)} \\ (\operatorname{tg}\varphi - T)\sin\varphi + {}^1/_2\,[T^2 - {}^1/_2\,(T - x_3)^2] \cos\varphi & \text{при условии (6.5)} \\ x_3 \sin\varphi - {}^1/_2 x_3^2 \cos\varphi & \text{при условии (6.7)} \\ x_3 & \text{при } \varphi = \pm {}^1/_2\pi \end{cases} \tag{6.9}$$

Граница области $Q(T)$ есть огибающая опорных прямых. Пользуясь выражением (6.9), эту огибающую легко найти. В результате получается, что область $Q(T)$ ограничена двумя прямыми

$$x_2 = \pm\, x_3 \tag{6.10}$$

и двумя параболами, уравнения которых имеют вид

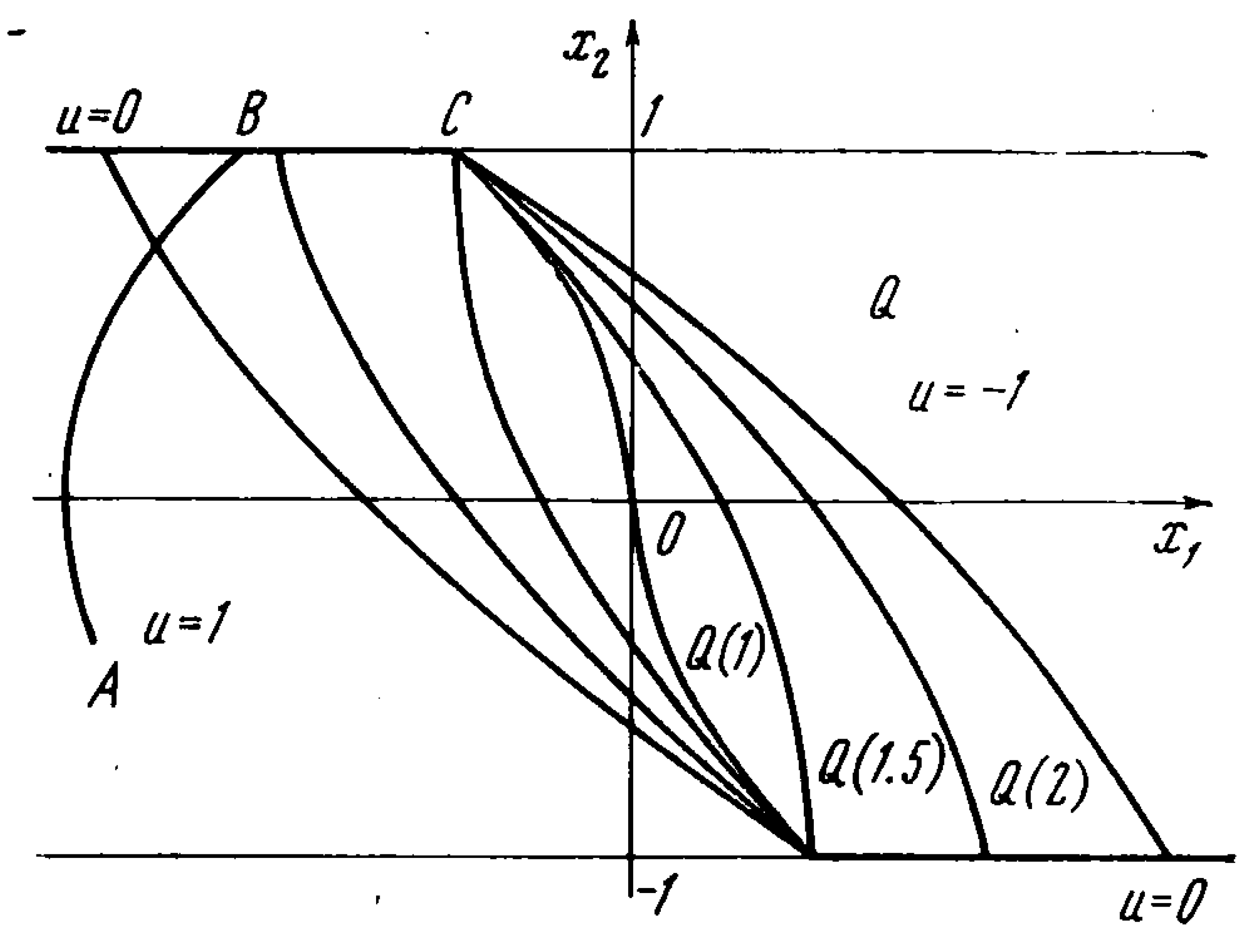
$$x_1 = \pm\,[{}^1/_2\,(x_2 \mp T)]^2 \mp {}^1/_2\,[T^2 - {}^1/_2\,(T - x_3)^2]$$

[1] В проведении выкладок, необходимых в этом параграфе, принимали участие студенты А. Ершов, В. Трофимов, С. Наумов, Н. Горушкина, В. Карандеев.

На фиг. 2 показаны области $Q(T)$ при $T = 1.0,\ 1.5,\ 2.0$ для $x_3 = 1$. При $T > x_3$ границы этих областей имеют два плоских участка и четыре угловые точки. Область управляемости Q, получающаяся из $Q(T)$ при $T \to \infty$, представляет собой множество точек, расположенных между прямыми (6.10). Кроме того, области Q принадлежат части прямых (6.10) (на фиг. 2 — жирные линии)

$$x_1 \leqslant -{}^1/_2\, x_3^2, \quad x_2 = x_3$$

$$x_1 \geqslant {}^1/_2\, x_3^2, \quad x_2 = -x_3 \qquad (6.11)$$



Фиг. 2

Для точек, принадлежащих области $Q(T)$ при $T \leqslant x_3$, оптимальное управление является чисто релейным и линией переключения будет кривая [5]

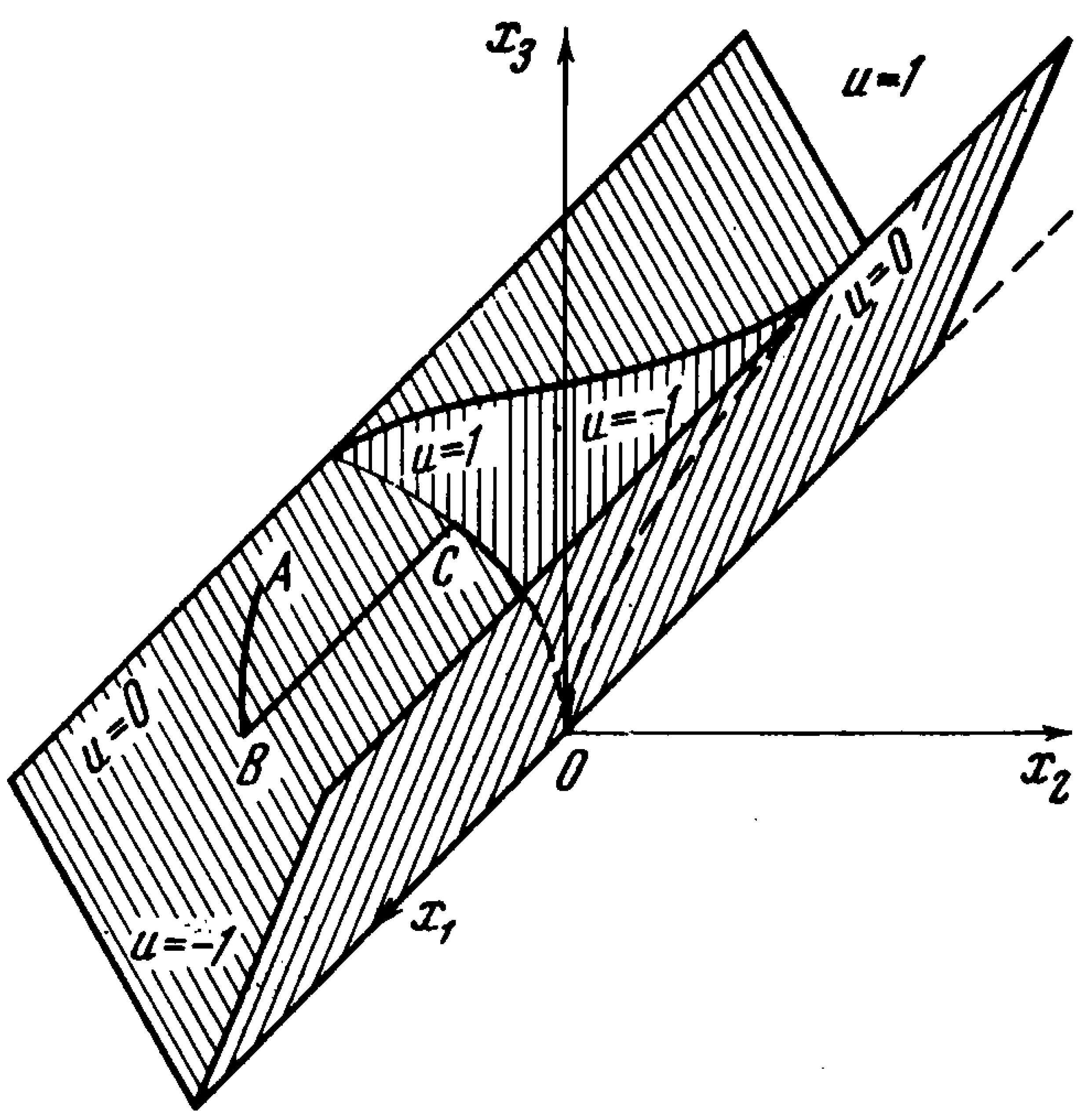
$$x_1 = -{}^1/_2\, x_2 \mid x_2 \mid \qquad (6.12)$$

Пользуясь выражениями (6.3) — (6.8), можно найти значение $u(t, \sigma^\circ)$ оптимального управления при $t = 0$, что позволяет решить задачу синтеза. При этом получается, что $u(0, \sigma^\circ) = 1$ на множестве точек, удовлетворяющих условиям

$$x_1 < -{}^1/_2\, x_2 \mid x_2 \mid, \quad \mid x_2 \mid < x_3 \qquad (6.13)$$

или условиям

$$x_1 = -{}^1/_2\, x_2 \mid x_2 \mid, \qquad -x_3 \leqslant x_2 < 0 \qquad (6.14)$$



Фиг. 3

На множестве точек, удовлетворяющих условиям

$$x_1 < -{}^1/_2\, x_3^2, \qquad x_2 = x_3 \qquad (6.15)$$

имеем $u(0, \sigma^\circ) = 0$. Поскольку фазовый портрет оптимальной системы симметричен относительно начала координат, легко найти $u(0, \sigma^\circ)$ в точках, симметричных точкам множества (6.13) — (6.15). На фиг. 2 показана одна из возможных оптимальных траекторий (кривая $ABCO$).

Рассматривая соотношения (6.10) — (6.15) в полупространстве $x_3 > 0$ пространства X_3 и зная значение $u(0)$ в каждой точке этого полупространства, можно полностью представить себе картину синтеза оптимального управления. На фиг. 3 изображена картина синтеза и показана возможная оптимальная траектория $ABCO$ (на фиг. 2 показана проекция этой траектории на плоскость $x_3 = 0$).

Рассмотрим теперь систему (6.1) при $\lambda \neq 0$, $\nu = 0$. В канонических переменных (для них оставлены обозначения x_1 и x_2) эта система имеет вид

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2, \qquad \dot{x}_2 = u$$

Не проводя таких подробных рассуждений, как в случае $\lambda = 0$, опишем получающиеся результаты.

Области $Q(T)$ при $T > x_3$ так же, как и в случае $\lambda = 0$, имеют два плоских участка и четыре угловые точки. При $\lambda < 0$ область управляемости Q состоит из точек, удовлетворяющих условию

$$|x_2| < x_3 \tag{6.16}$$

а также из точек, принадлежащих некоторым участкам границы множества (6.16). В случае $\lambda > 0$ область Q ограничена, кроме того, кривыми

$$x_1 = -\lambda^{-1}x_2 \pm \lambda^{-2}\{1 - \exp[-{}^1/_2\lambda(x_3 \pm x_2)]\} \tag{6.17}$$

Точки этих кривых не принадлежат области Q. Вывод уравнения (6.17) здесь не приводится за неимением места.

Картина синтеза оптимального управления в полупространстве $x_3 > 0$ пространства X_3 при $\lambda \neq 0$, с качественной точки зрения, имеет тот же вид, что и при $\lambda = 0$. Роль поверхности (6.12) в данном случае играет поверхность [5]

$$x_1 = -\lambda^{-1}x_2 + \lambda^{-2}[1 - \exp(-\lambda|x_2|)]\operatorname{sgn}x_2 \tag{6.18}$$

Оптимальное управление $u(x_1, x_2, x_3) = 0$ в точках границы множества (6.16), принадлежащих области Q и не принадлежащих поверхности (6.18). В точках области (6.16), лежащих с одной стороны от поверхности (6.18) и на части поверхности (6.18), принадлежащей области Q, оптимальное управление $u(x_1, x_2, x_3) = 1$. В остальных точках области Q имеем $u(x_1, x_2, x_3) = -1$.

Рассмотрим систему (6.1) при $\lambda = 0$, $\nu < 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\nu = -1$, тогда система (6.1) принимает вид

$$x_1^{\bullet} = x_2, \qquad x_2^{\bullet} = -x_1 + u \tag{6.19}$$

Функция $\eta e^{-At}b$ имеет вид

$$\eta e^{-At}b = \sin(\varphi - t) \tag{6.20}$$

В отличие от предыдущих примеров ни при каких значениях φ тождество $|\eta e^{-At}b| \equiv \sigma$ невозможно, какое бы ни было $\sigma = \text{const}$. Поэтому управление $u(t, \sigma^\circ)$ определяется с помощью (6.20) однозначно для любого φ

$$u(t, \sigma^\circ) = \begin{cases} \operatorname{sgn}[\sin(\varphi - t)] & \text{при } |\sin(\varphi - t)| \geqslant \sigma^\circ \\ 0 & \text{при } |\sin(\varphi - t)| < \sigma^\circ \end{cases} \tag{6.21}$$

и граница области $Q(T)$ не имеет плоских участков.

В [13] при $\lambda = \nu = 0$ и в [14] при $\lambda = 0$, $\nu = -1$ решается задача минимизации интеграла (1.3) при $|u| \leqslant 1$. Оптимальное управление в этой задаче имеет ту же структуру, что и управление (6.4), (6.6), (6.8) и (6.21). Пусть

$$k_1 = \left[\frac{x_3}{\pi - 2\arcsin\sigma^\circ}\right]$$

(k_1 — целая часть выражения, стоящего в квадратных скобках), k_2 — число нулей уравнения $|\sin\delta| = \sigma^\circ$, где $\delta = \varphi - t$, на отрезке $[\varphi - T, \varphi]$. Будем считать, что $|\varphi| < {}^1/_2\pi$, тогда σ° удовлетворяет одной из следующих пар соотношений:

$$2k_1 = k_2, \qquad x_3 = (\pi - 2\arcsin\sigma^\circ)k_1 \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned} &2k_1 = k_2, && x_3 = T - 2k_1\arcsin\sigma^\circ \\ &2k_1 = k_2 - 1, && x_3 = \pi k_1 - (2k_1 + 1)\arcsin\sigma^\circ + \varphi \\ &2k_1 = k_2 - 1, && x_3 = T - \varphi - (2k_1 + 1)\arcsin\sigma^\circ \\ &2k_1 = k_2 - 2, && x_3 = T - 2(k_1 + 1)\arcsin\sigma^\circ \end{aligned} \tag{6.23}$$

Эти соотношения легко устанавливаются при рассмотрении фиг. 4, на которой изображен график функции $|\sin\delta|$. На этом графике показан случай, соответствующий условию (6.23). В случае (6.23) множество E^{σ° состоит из k_1 отрезков длиной $\pi - 2\arcsin\sigma^\circ$ и одного отрезка длиной $T - \varphi - \pi k_1 - \arcsin\sigma^\circ$ (на фиг. 4 множество E^{σ° показано жирными линиями).

Найдем область управляемости Q. При $T \to \infty$ имеем $\sigma^\circ \to 1$, $k_1 \to \infty$. Пусть $T - \varphi = \pi k_1 + {}^1/_2\,\pi$, тогда для каждого фиксированного φ, как видно из фиг. 4, при достаточно больших T величина σ° удовлетворяет соотношениям (6.23). Для таких значений T после несложных выкладок получаем

$$d_\eta(T) = \int_0^T \sin(\varphi - \tau)\, u(\tau, \sigma^\circ)\, d\tau = (2k_1 + 1)\sin\frac{x_3}{2k_1+1}$$

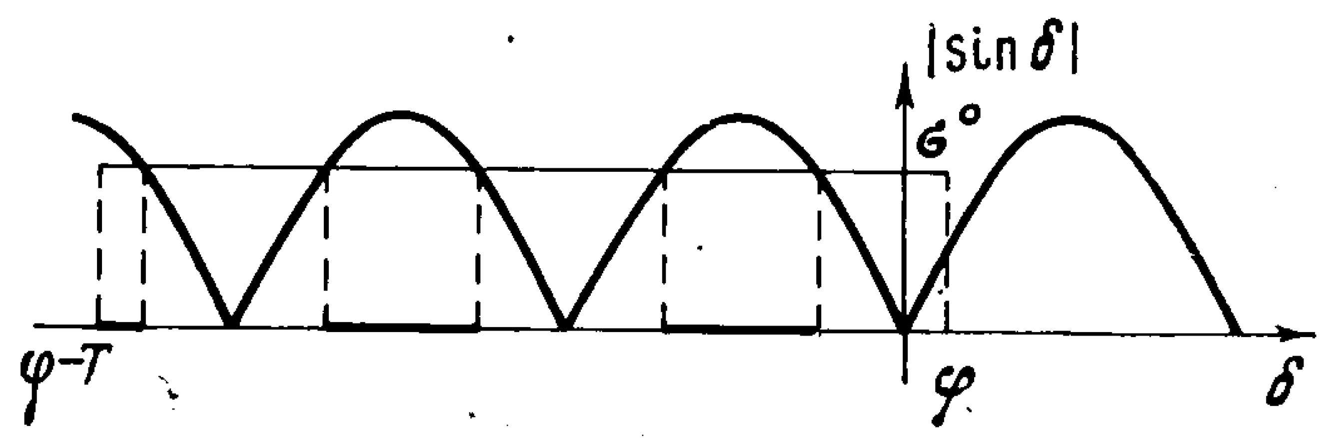
Отсюда следует

$$\lim_{T\to\infty} d_\eta(T) = \lim_{k_1\to\infty}(2k_1+1)\sin\frac{x_3}{2k_1+1} = x_3$$

При $|\varphi| = {}^1/_2\pi$ получается такой же результат.

Таким образом, область управляемости Q представляет собой внутренность круга радиуса x_3, т. е. описывается неравенством

$$x_1^2 + x_2^2 < x_3^2 \qquad (6.24)$$



Фиг. 4

Тот факт, что область Q не может быть ни чем иным, кроме круга, следует также из того, что фазовые траектории системы (6.19) при $u(t) \equiv 0$ представляют собой окружности. В полупространстве $x_3 > 0$ пространства X_3 область (6.24) представляет собой внутренность конуса.

Рассмотрим теперь задачу синтеза.

Для этого найдем на плоскости X_2 множество D_0 точек x°, в которых оптимальное управление в начальный момент равно нулю. Будем предполагать, что $|\varphi| < {}^1/_2\,\pi$. Тогда из рассмотрения фиг. 4 следует, что $u(0, \sigma^\circ) = 0$ при тех и только тех значениях T и φ, при которых $|\varphi| < \arcsin\sigma^\circ$. Это неравенство имеет место только при условии (6.22) или (6.23). Для определения множества D_0 нужно подставить функцию (6.21) в (2.2), учитывая при этом условия (6.22) и (6.23). Пользуясь симметрией фазового портрета оптимальной системы, получаем, что множество точек $x \in D_0$ удовлетворяет соотношениям

$$x_1 = \pm\int_0^T \sin\tau\, u(\tau, \sigma^\circ)\, d\tau, \qquad x_2 = \mp\int_0^T \cos\tau\, u(\tau, \sigma^\circ)\, d\tau \qquad (6.25)$$

При условии (6.22) для $\pi k_1 - \arcsin\sigma^\circ + \varphi < t < \pi k_1 + \arcsin\sigma^\circ + \varphi$ управление $u(t, \sigma^\circ) = 0$. Поэтому, как следует из (6.25), это условие можно не рассматривать. Итак, будем считать, что в (6.25) T и σ° удовлетворяют условию (6.23). Множество D_0 двухпараметрическое : одним параметром является величина φ, удовлетворяющая неравенству $|\varphi| < \arcsin\sigma^\circ$, другим — либо T, либо σ°. При подстановке в (6.25) соотношений $\arcsin\sigma^\circ = \pm\,\varphi$ получаются границы множества D_0.

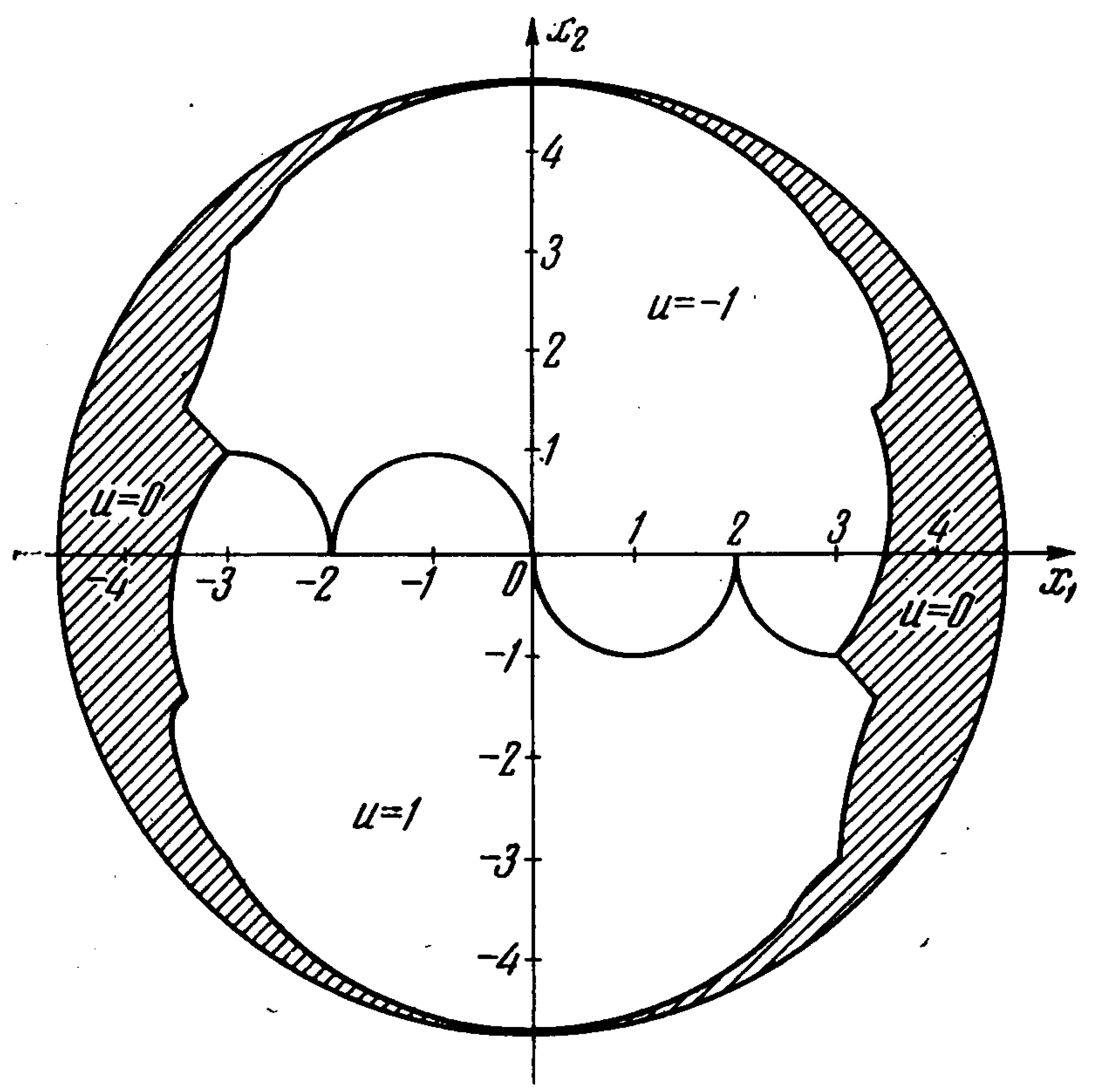
При подстановке равенства $\arcsin\sigma^{\circ} = \varphi$ после некоторых выкладок получаем параметрические уравнения одной из границ множества D_0

$$x_1 = \mp \{(k_1+1)\cos 2\varphi + k_1 + (-1)^{k_1+1}\cos[x_3 + 2(k_1+1)\varphi]\} \quad k_1 = \left[\frac{x_3}{\pi - 2|\varphi|}\right]$$
$$x_2 = \mp \{(k_1+1)\sin 2\varphi + (-1)^{k_1+1}\sin[x_3 + 2(k_1+1)\varphi]\} \quad \varphi \in [0, {}^1/_2\pi) \qquad (6.26)$$

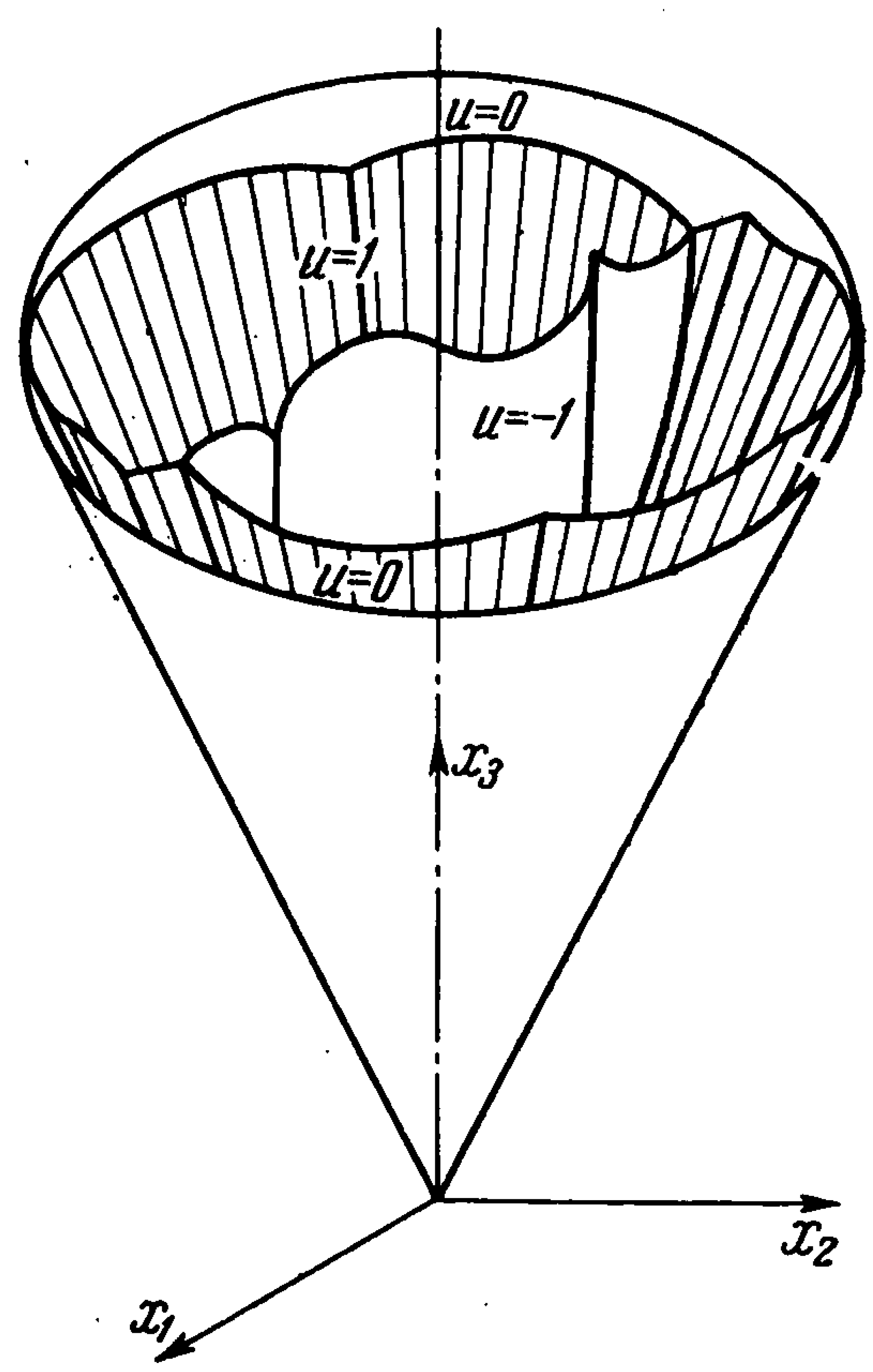
После подстановки равенства $\arcsin\sigma^{\circ} = -\varphi$ получаем уравнения другой границы множества D_0

$$x_1 = \mp \{k_1\cos 2\varphi + k_1 + 1 + (-1)^{k_1+1}\cos(x_3 - 2k_1\varphi)\} \qquad (6.27)$$
$$x_2 = \mp \{k_1\sin 2\varphi + (-1)^{k_1+1}\sin(x_3 - 2k_1\varphi)\} \qquad \varphi \in (-{}^1/_2\pi, 0]$$

Части кривых (6.26), (6.27), соответствующие тем диапазонам значений φ, в которых значение k_1 остается постоянным, являются гладкими.



Фиг. 5



Фиг. 6

При $\varphi \to {}^1/_2\pi$ из (6.26) получается $x_2 \to \mp x_3$, $x_1 \to 0$, при $\varphi \to -{}^1/_2\pi$ из (6.27) получается $x_2 \to \pm x_3$, $x_1 \to 0$. При $\varphi = 0$ уравнения (6.26) и (6.27) принимают один и тот же вид

$$x_1 = \mp [2k_1 + 1 + (-1)^{k_1+1}\cos x_3], \qquad x_2 = \mp [(-1)^{k_1+1}\sin x_3] \qquad (6.28)$$

Здесь

$$k_1 = \left[\frac{x_3}{\pi}\right]$$

Если в (6.28) положить $x_3 = \pi k_1 + \alpha$, где $0 \leqslant \alpha < \pi$, то получится

$$x_1 = \mp [2k_1 + 1 - \cos\alpha], \qquad x_2 = \pm \sin\alpha \qquad (6.29)$$

Если рассматривать x_3 как параметр, то кривая (6.28) или (6.29) представляет собой линию L переключения [5] для системы (6.19) при наличии только ограничения $|u| \leqslant 1$. Следовательно, при $x_3 = \mathrm{const}$ все четыре кривые (6.26), (6.27) начинаются при $\varphi = 0$ с линии L и при $|\varphi| \to {}^1/_2\pi$ оканчиваются на границе области Q.

На фиг. 5 для значения $x_3 = {}^3/_2\pi$ область управляемости Q разделена кривыми (6.26) — (6.28) на области, в которых оптимальное управление в начальный момент времени равно —1,0 (область заштрихована) и 1.

Рассматривая соотношения (6.24), (6.26) — (6.28) в полупространстве $x_3 > 0$, можно полностью понять картину синтеза оптимального управления. Эта картина синтеза изображена на фиг. 6 (на фиг. 5 показана проекция на плоскость x_1, x_2 сечения $x_3 = {}^3/_2\pi$).

Синтез оптимального управления для системы (6.1) в случае $\nu = 0$ отличается от случая $\lambda = 0$, $\nu < 0$ тем, что при $\nu = 0$ множество точек, в которых $u = 0$, имеет в пространстве X_3 нулевую меру.

Поступила 12 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. S i n g h R. N. P. Functional analysis approach to optimal control problems with multiple constraints on the controlling function. Internat. J. Control, 1969, vol. 9, No 1.
2. П о н т р я г и н Л. С., Б о л т я н с к и й В. Г., Г а м к р е л и д з е Р. В., М и щ е н к о Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
3. Б е л л м а н Р., Г л и к с б е р г И., Г р о с с О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
4. К р а с о в с к и й Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
5. Б о л т я н с к и й В. Г. Математические методы оптимального управления. М., «Наука», 1969.
6. Л ю с т е р н и к Л. А., С о б о л е в В. И., Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
7. Б е к к е н б а х Э., Б е л л м а н Р. Неравенства, М., «Мир», 1965.
8. Ф о р м а л ь с к и й А. М. Область управляемости систем с ограниченными ресурсами управления. Автоматика и телемеханика, 1968, № 3.
9. E a t o n J. H. An Iterative Solution to Time Opimal Control. J. Math. Anal. and Applic. October, 1962, vol. 5, No 2.
10. Ш и л о в Г. Е. Математический анализ. М., Физматгиз, 1961.
11. Г а б а с о в Р., Г и н д е с В. Б. К оптимальным процессам в линейных системах с двумя ограничениями на управляющие воздействия. Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 6.
12. К а л м а н. Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. I Междунар. конгр. ИФАК, М., Изд-во АН СССР, 1961, т. 2.
13. А т а н с М., Ф а л б П. Оптимальное управление. М., «Машиностроение», 1968.
14. К р а с о в с к и й Н. Н. Лекции по теории управления. Свердловск, 1968, вып. 1 (Уральский ун-т им. А. М. Горького).