Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ВЫБОРОМ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

В. Б. Колмановский

(Москва)

Рассматривается задача о выводе системы с последействием в заданное положение при помощи выбора начальных условий. Полученные условия разрешимости этой задачи формулируются в терминах коэффициентов уравнений.

Для простоты изложения будем рассматривать уравнения с постоянными коэффициентами, заданными в n-мерном евклидовом пространстве E_n

$$x^{\cdot}(t) = \sum_{i=1}^{m} x(t-h_i) B_i + x^{\cdot}(t-h) B_0 + f(t), \qquad t > 0 \tag{1}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор. Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют следующим условиям А): постоянные запаздывания h_i таковы, что $h_m > h_{m-1} \geqslant \ldots \geqslant h_1 \geqslant 0$, постоянная $h > 0$, непрерывная функция $f(t)$ принимает значения из пространства E_n, наконец, B_i, $i = 0, \ldots, m$-квадратные матрицы размером $n \times n$ с постоянными элементами. Условимся все, встречающиеся ниже, векторы из E_n понимать как вектор-строки, а j-ю координату вектора из E_n обозначать той же буквой, что и сам вектор с индексом j внизу. Например, вектор $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$.

Решение $x(t)$ уравнения (1) при $t > 0$ определяется начальными условиями

$$x(0) = x_0, \ x(t) = \varphi(t) \ \text{ при } -h_m \leqslant t < 0,$$
$$x^{\cdot}(t) = \psi(t) \ \text{ при } -h \leqslant t \leqslant 0 \tag{2}$$

Здесь вектор $x_0 \in E_n$ и начальные функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ со значениями из пространства E_n заданы, причем функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ измеримы по Борелю, функция $\psi(t)$ ограничена и $\|\varphi\| < \infty$, где

$$\|\varphi\| = \Big(\int_{-h_m}^{0} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(s)\, ds\Big)^{1/2} \tag{3}$$

Интегрируя последовательно уравнение (1) на интервалах $[kh, (k+1)h]$, $k = 0, 1, \ldots$, убеждаемся, что при сделанных предположениях А) существует и притом единственная пара функций $x(t)$, $x^{\cdot}(t)$, удовлетворяющая начальным условиям (2) при $t \leqslant 0$ и уравнению (1) при почти всех

$t > 0$ (по мере Лебега), причем $x^\cdot(t)$ ограничена и интегрируема по Лебегу на любом конечном интервале, а

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x^\cdot(s)\,ds \quad \text{при } t \geqslant 0$$

Обозначим символом $x(t, x_0, \varphi, \psi)$ решение уравнения (1) с начальными условиями (2).

Задача 1. Пусть даны векторы $x_0, x_1 \in E_n$, фиксированная начальная функция $\psi(t)$ и момент времени $T > 0$. Требуется определить начальную функцию $\varphi(\theta)$ (аргумент θ меняется в пределах $-h_m \leqslant \theta \leqslant 0$) с наименьшей возможной нормой (3) так, чтобы $x(T, x_0, \varphi, \psi) = x_1$.

Отметим, что на основании [1] § 12 полученные далее результаты справедливы и для норм начальных функций, заданных какой-либо из формул

$$\operatorname{vrai}\max \sum_{i=1}^n |\varphi_i(t)|, \quad \sup \sum_{i=1}^n \varphi_i^2(t), \quad -h_m \leqslant t \leqslant 0$$

Ограничимся, однако, ради определенности, лишь нормой, определенной равенством (3).

Установим формулу Коши, выражающую решение $x(t)$ уравнения (1) в виде функции начальных условий (2) и неоднородностей $f(t)$. Для этого введем в рассмотрение функцию $\chi(s)$, равную нулю при $s = 0$ и единице при $s > 0$ и положим $\alpha(t) = [t/h] + \chi(t - h[t/h])$, где $[t]$ — целая часть числа t. Определим теперь квадратную матрицу $y(s, t)$ размером $n \times n$ при помощи соотношений

$$\frac{\partial y(s,t)}{\partial s} = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha(t)-1} B_i B_0^j y(s + h_i + jh, t) \quad (0 \leqslant s < t)$$

$$y(t, t) = I, \quad y(s, t) \equiv 0 \quad (s > t) \tag{4}$$

где I — единичная матрица, а через B^j обозначена j-я степень матрицы B.

Тогда решение $x(t)$ задачи (1), (2) допускает представление

$$x(t) = x_0 y(0, t) + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 \varphi(s) B_i \sum_{j=0}^{\alpha(t)-1} B_0^j y(s + h_i + jh, t)\,ds +$$

$$+ \int_{-h}^0 \psi(s) \sum_{j=1}^{\alpha(t)} B_0^j y(s + jh, t)\,ds + \sum_{j=0}^{\alpha(t)-1} \int_0^t f(s) B_0^j y(s + jh, t)\,ds \tag{5}$$

Для доказательства равенства (5) домножим обе части уравнения (1) справа на матрицу $y(s, t)$ и проинтегрируем полученное в пределах от нуля до t. Имеем

$$\int_0^t \Big[x^\cdot(s) - \sum_{i=1}^m x(s - h_i) B_i - f(s)\Big] y(s, t)\,ds = \int_0^t x^\cdot(s - h) B_0 y(s, t)\,ds$$

В левой части этого соотношения произведем с учетом (2) интегрирование по частям, что возможно ввиду отмеченной выше абсолютной непрерывности $x(t)$. Далее, на основании (2)

$$\int_0^t x^{\cdot}(s-h)\, B_0 y(s, t)\, ds = \int_{-h}^{0} \psi(s)\, B_0 y(s+h, t)\, ds + \int_0^t x^{\cdot}(s)\, B_0 y(s+h, t)\, ds$$

Заменим здесь производную $x^{\cdot}(t)$ ее выражением, даваемым правой частью уравнения (1), и преобразуем полученное как и выше. Продолжая указанный итеративный процесс, состоящий в последовательной замене производной $x^{\cdot}(t)$ в соответствии с уравнением (1) и содержащий в силу (4) лишь конечное число шагов $\alpha(t)$, убеждаемся в справедливости представления (5).

Полагая $t = T$ в формуле (5) и обозначая через α значение функции $\alpha(t)$ в точке T, заключаем, что если бы задача 1 имела решение, то имело бы место равенство

$$\beta = \sum_{i=1}^{m} \int_{-h_i}^{0} \varphi(s)\, B_i \sum_{j=0}^{\alpha-1} B_0^{\,j} y(s+h_i+jh, T)\, ds \tag{6}$$

Здесь вектор β определяется выражением

$$\beta = x_1 - x_0 y(0, T) - \int_{-h}^{0} \psi(s) \sum_{j=1}^{\alpha} B_0^{\,j} y(s+jh, T)\, ds - \sum_{j=0}^{\alpha-1} \int_0^T f(s)\, B_0^{\,j} y(s+jh, T)\, ds \tag{7}$$

Если вектор $\beta = 0$, то задача 1 всегда имеет решение, а именно $\varphi(\theta) \equiv 0$, поэтому в дальнейшем рассматривается лишь случай $\beta \neq 0$. Положим

$$r_i(T, s) = \sum_{j=0}^{\alpha-1} B_0^{\,j} y(s+h_i+jh, T), \qquad -h_i \leqslant s \leqslant 0$$

$$r_i(T, s) = 0, \qquad -h_m \leqslant s < -h_i$$

и перепишем соотношение (6) в виде

$$\beta = \int_{-h_m}^{0} \varphi(s) \sum_{i=1}^{m} B_i r_i(T, s)\, ds \tag{8}$$

Из равенства (8) вытекает, что задача 1 для уравнения (1) сведена к проблеме моментов (см., например, [1], §16).

Сформулируем условия разрешимости задачи 1, следуя результатам монографии [1]. Для этого определим множество L таких векторов $l \in E_n$, что

$$\beta_l' = l_1\beta_1 + \ldots + l_n\beta_n = 1$$

(здесь и далее штрих — знак транспонирования) и множество **P** функций вида

$$l_1\gamma_1(\theta) + \ldots + l_n\gamma_n \quad (\theta)\,(-h_m \leqslant \theta \leqslant 0, l \in L)$$

где γ_i (θ) — столбцы матрицы B_1r_1 $(T,\theta)+\ . \ . \ . + B_mr_m$ (T, θ).

Лемма 1. Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют требованиям A) и вектор $\beta \neq 0$. Тогда

1) чтобы функция φ (θ) была решением уравнения (8), необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-h_m}^{0} g(s)\,\varphi(s)\,ds = 1, \qquad g(\theta) \in P$$

2) чтобы существовало решение задачи 1, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\rho_0 = \min\nolimits_{g(\theta)\in P} \| g \| > 0 \tag{9}$$

(здесь $\| g \|$ определяется равенством (3))

3) если $\rho_0 > 0$ и минимум (9) достигается на функции g_0 (θ), то норма функции, разрешающей задачу 1, не может быть сделана меньше ρ_0^{-1}, и оптимальная начальная функция φ_0 (θ), имеющая $\| \varphi_0 \| = \rho_0^{-1}$, обладает следующим свойством максимума:

$$\int_{-h_m}^{0} \varphi_0(s)\, g_0'(s)\,ds = \max\nolimits_{\varphi(\theta),\, \|\varphi\|=\rho_0^{-1}} \int_{-h_m}^{0} \varphi(s)\, g_0'(s)\,ds$$

Справедливость утверждений леммы 1 немедленно вытекает из решения проблемы моментов ([1], § 16).

Выведем теперь условия в терминах коэффициентов, позволяющие заключить о существовании решения задачи 1 для n-мерных уравнений

$$x^{\cdot}(t) = x(t)\,B_1 + x(t-h)\,B_2 + x^{\cdot}(t-h)\,B_0 \qquad (t > 0) \tag{10}$$

Теорема 1. Если $h > 0$ матрицы B_2 и $B_2 + B_0B_1$ невырождены и $B_0B_i = B_iB_0$, $i = 1,2$, то задача 1 для уравнения (10) разрешима при любых векторах x_0, x_1.

Доказательство. Пусть переменная τ меняется в пределах $0 \leqslant \tau \leqslant h$. Тогда на основании леммы 1 достаточно показать, что столбцы матрицы

$$B_2 \sum_{j=0}^{\alpha-1} B_0^{\,j}\, y(\tau + jh, T)$$

линейно независимы. Предположим противное, т. е. предположим существование такого ненулевого вектора c, для которого

$$B_2 \sum_{j=0}^{\alpha-1} B_0{}^j y(\tau + jh, T)\, c' \equiv 0 \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant h)$$

Отсюда и из условий теоремы 1 вытекает тождество

$$\sum_{j=0}^{\alpha-1} B_0{}^j y(\tau + jh, T)\, c' = 0 \tag{11}$$

Кроме того, используя соотношения (4) для фундаментальной матрицы $y(s, t)$ системы (10), убеждаемся в справедливости следующей цепочки уравнений:

$$\frac{\partial y(\tau + ih, T)}{\partial\tau} + B_1 \sum_{j=0}^{\alpha-i-1} B_0{}^j y(\tau + (i+j)h, T) = -B_2 \sum_{j=1}^{\alpha-i} B_0^{j-1} y(\tau + (i+j)h, T) \tag{12}$$

Здесь целое число i пробегает значения от 0 до $\alpha - 1$.

Домножая i-е уравнение (12) на $B_0{}^i$ слева и на c' справа и суммируя полученное по i в пределах от 0 до $\alpha - 1$, получаем в силу (11) что

$$\left(B_1 \sum_{i=1}^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\alpha-i-1} B_0^{i+j} y(\tau + (i+j)h, T) + B_2 \sum_{i=0}^{\alpha-1} \sum_{j=1}^{\alpha-i} B_0^{i+j-1} y(\tau + (i+j)h, T)\right) c' = 0 \tag{13}$$

Но

$$\sum_{i=1}^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\alpha-i-1} B_0^{i+j} y(\tau + (i+j)h, T) = \sum_{i=1}^{\alpha-1} \sum_{j=i}^{\alpha-1} B_0{}^j y(\tau + jh, T) = \sum_{j=1}^{\alpha-1} jB_0{}^j y(\tau + jh, T) \tag{14}$$

и аналогично с учетом (4)

$$\sum_{i=0}^{\alpha-1} \sum_{j=1}^{\alpha-i} B_0^{i+j-1} y(\tau + (i+j)h, T) = \sum_{i=0}^{\alpha-2} \sum_{j=i+1}^{\alpha-1} B_0^{j-1} y(\tau + jh, T) = \sum_{j=1}^{\alpha-1} jB_0^{j-1} y(\tau + jh, T)$$

Отсюда и из (13), (14) вытекает равенство

$$(B_2 + B_1 B_0) \sum_{j=1}^{\alpha-1} jB_0^{j-1} y(\tau + jh, T)\, c' = 0$$

Следовательно

$$\sum_{i=1}^{\alpha-1} iB_0^{i-1} y(\tau + ih, T)\, c' = 0, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant h \tag{15}$$

Присоединим к тождеству (15) систему уравнений (12), где на этот раз индекс i пробегает значения от 1 до $\alpha-1$. Домножая i-е уравнение (12) на iB_0^{i-1} слева и на c' справа и суммируя полученное в пределах от 1 до $\alpha - 1$, приходим аналогично (13)—) к формуле

$$\sum_{i=2}^{\alpha-1} B_0^{i-2} y(\tau + ih, T)\, \frac{i(i-1)}{2}\, c' = 0 \tag{16}$$

Продолжая процесс, примененный при выводе (15), (16), убеждаемся при помощи метода математической индукции и условий теоремы 1, что результатом k-го шага будут соотношения

$$(B_2 + B_1 B_0) \sum_{i=k}^{\alpha-1} \gamma_{ki} B_0^{i-k} y(\tau + ih, T) c' = 0, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant h \tag{17}$$

где числа γ_{kj} равны нулю при $k > j$, а при $k \leqslant j$ определяются следующим образом

$$\gamma_{0j} \equiv 1, \qquad \gamma_{kj} = \sum_{i=k}^{j} \gamma_{k-1,\ i-1}, \qquad k \geqslant 1$$

При $i \geqslant 0$ все $\gamma_{ii} = 1$, поэтому, полагая $k = \alpha - 1$ в формуле (17), получаем согласно (4), что $I c' = 0$. Это, однако, невозможно, так как противоречит сделанному выше предположению о том, что $cc' \neq 0$. Полученным противоречием теорема 1 доказана.

Замечание 1. При доказательстве теоремы 1 установлено, что столбцы матрицы

$$r(\tau) = B_2 \sum_{j=0}^{\alpha-1} B_0^j y(\tau + jh, t) \qquad (-h \leqslant \tau \leqslant 0)$$

линейно независимы. Поэтому матрица

$$G = \int_{-h}^{0} r'(s) r(s) ds \tag{18}$$

невырождена. Следовательно, используя метод неопределенных множителей Лагранжа ([1] § 18), получаем, что в условиях теоремы 1 оптимальная начальная функция $\varphi(\tau)$, разрешающая задачу 1 для уравнения (10), равняется

$$\varphi(\tau) = \beta G^{-1} r'(\tau)$$

Теорема 2. Пусть $B_2 B_i = B_i B_2$, $i = 0, 1$ и постоянная $h > 0$. Тогда из разрешимости задачи 1 для уравнения (10) при любых векторах $x_0, x_1 \in E_n$ вытекает невырожденность матрицы B_2.

Доказательство. На основании леммы 1 необходимым условием разрешимости задачи 1 для уравнения (10) при любых векторах x_0, x_1 является требование (9). Предположим теперь, что ранг матрицы B_2 равен $m < n$, и покажем, что при этом условие (9) нарушается. Поскольку в силу формулы (7) для любого наперед заданного вектора $\beta \in E_n$ можно подобрать соответствующие значения x_0, x_1, то выберем такой вектор β, не содержащийся в пространстве, порожденном строками матрицы B_2 (размерность которого $m < n$) и такой ненулевой вектор $l_0 \in L$, что

$$\beta l'_0 = 1, \qquad B_2 l'_0 = 0$$

Отсюда и из (4) вытекает равенство

$$B_2 y(s, T) l'_0 \equiv 0 \text{ при } s \geqslant T \tag{19}$$

Домножая уравнение (4) на B_2 слева и на l'_0 справа, получаем, что при $s < T$ функция $r(s) = B_2 y(s, T)\, l'_0$ есть решение уравнения

$$r^{\cdot}(s) = -\sum_{j=0}^{\alpha-1} [B_1 B_0{}^j r(s + jh) + B_2 B_0{}^j r(s + h + jh)]$$

с нулевыми начальными условиями (19). Значит $B_2 y(s, T)\, l'_0 \equiv 0$ при всех $s < T$, что невозможно, ибо противоречит требованию (9). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. **Пусть $B_i B_0 = B_0 B_i$, $i = 1, 2$ и постоянная $h > 0$. Тогда из разрешимости задачи 1 для уравнения (10) при любых x_0, x_1 вытекает, что ранг матрицы**

$$K = \{B_2, B_2 B_1, \ldots, B_2 B_1^{n-1}, B_2 + B_1 B_0, (B_2 + B_1 B_0) B_1, \ldots, (B_2 + B_1 B_0) B_1{}^{n-1}\}$$

равен числу n-размерности системы (10).

Доказательство. Предположим, что ранг матрицы K равен $m < n$ и покажем, что при этом неравенство (9), являющееся на основании леммы 1 необходимым условием разрешимости задачи 1 для уравнения (10), нарушается. Как и при доказательстве теоремы 2, из сделанного предположения вытекает существование такого ненулевого вектора $l_0 \in L$, что

$$\beta l_0' = 1, \qquad B_2 B_1{}^i l_0' = 0, \quad (B_2 + B_1 B_0) B_1{}^i l_0' = 0, \; i = 0, \ldots, n-1$$

Следовательно (см. [1], стр. 139), и при всех целых $i \geqslant 0$

$$B_2 B_1{}^i l_0' = 0, \qquad (B_2 + B_1 B_0) B_1{}^i l_0' = 0 \tag{20}$$

Рассмотрим аналитическую функцию $r(s) = B_2 e^{B_1(T-s)} l'_0$ переменной s. В силу (20) имеют место равенства

$$\left.\frac{d^i r(s)}{ds}\right|_{s=T} = B_2 B_1{}^i l_0' (-1)^i = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots$$

из которых видно, что все производные аналитической функции $r(s)$ равны нулю при $s = T$. Значит (см., например, [2]), $r(s) \equiv 0$ при всех s. Аналогично доказывается справедливость для любого s тождества

$$r_1(s) = (B_2 + B_0 B_1)\, e^{B_1(T-s)}\, l_0' \equiv 0. \tag{21}$$

На основании (4) функции $r(s)$ и $r_1(s)$ совпадают на отрезке $T - h \leqslant s \leqslant T$ соответственно с функциями $B_2 y(s, T)\, l'_0$ и $(B_2 + B_0 B_1) y(s, T)\, l'_0$, поэтому для $T - h \leqslant s \leqslant T$

$$B_2 y(s,T)\, l_0' = (B_2 + B_0 B_1)\, y(s,T)\, l_0' = 0 \tag{22}$$

Далее с учетом (4) получаем, что при $T - 2h \leqslant s \leqslant T - h$

$$y(s,T) = e^{B_1(T-s)} - \int_{T-h}^{s} e^{B_1(t-s)} (B_1 B_0 + B_2)\, y(t + h, T)\, dt \tag{23}$$

Отсюда и из формул (21), (22) следует соотношения

$$y(s,T)\,l_0' = e^{B_1(T-s)}\,l_0', \qquad T-2h \leqslant s \leqslant T-h \tag{24}$$

позволяющие ввиду равенств $r(s) = r_1(s) = 0$ заключить, что тождества (22) справедливы и для $s \in [T-2h,\ T]$. Предположим теперь, что тождества (22) имеют место при $T - kh \leqslant s \leqslant T$ (целое число $k \geqslant 2$). Тогда, принимая во внимание, что в силу (4) и условий теоремы 3

$$y(T-kh,T) = e^{kB_1h} + V[(B_2 + B_0B_1)\,y(\tau_1 T)]$$

где $V(Z(\tau_1))$ — линейный функционал, определенный на функциях $Z(\tau_1)$ аргумента $\tau_1 \in [T-kh,\ T]$, убеждаемся подобно (23), (24) в справедливости формул (22) и на интервале $[T-(k+1)\,h,\ T]$. Отсюда на основании метода математической индукции заключаем, что равенства (22) справедливы при всех $s \leqslant T$, что, однако, невозможно, так как из них вытекает соотношение

$$B_2 \sum_{j=0}^{\alpha-1} B_0^{\,j}\, y(\tau + jh,T)\, l_0' \equiv 0, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant h$$

противоречащее условию (9). Теорема 3 доказана.

Замечание 2. На основании [2] при $B_0 \equiv 0$ и $0 < T \leqslant h$ требования теоремы 3 являются не только необходимыми, но и достаточными условиями разрешимости задачи 1 для уравнения (10).

Приведем, наконец, некоторые условия разрешимости задачи 1 для одномерных уравнений с постоянными коэффициентами

$$x^{\cdot}(t) = \sum_{i=1}^{m} b_i x(t-h_i) + ax(t) + b_0 x^{\cdot}(t-h), \qquad t > 0$$

Теорема 4. Если $b_i > 0$, $h_i > 0$ $i = 1, \ldots, m$ и постоянные $h > 0$, $b_0 \geqslant 0$, $ab_0 \geqslant 0$, то задача 1 для уравнения (24) разрешима при любых x_0, x_1.

Доказательство. Поскольку коэффициенты уравнения (24) постоянны, фундаментальное решение $y(t-s)$ этого уравнения, зависящее лишь от разности аргументов, определяется соотношениями

$$y^{\cdot}(t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\alpha-1} b_i b_0^{\,j} y(t-h_i-jh) + \sum_{i=0}^{\alpha-1} ab_0^{\,i} y(t-ih) \qquad 0 < t \leqslant T \tag{25}$$

$$y(0) = 1, \qquad y(t) = 0, \quad t < 0$$

Ввиду леммы 1 достаточно установить положительность функции $y(t)$ при любом $0 < t \leqslant T$. Для этого обозначим через $\xi_{ij}(t)$ взаимно независимые для любых различных значений индексов одномерные винеровские процессы и зададим случайный процесс $z(t)$ при помощи стохастического дифференциального уравнения Ито с запаздыванием [3]

$$dz(t) = \frac{1}{2}\, az(t)\,dt + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\alpha-1} \sqrt{b_i b_0^{\,j}}\, z(t-h_i-jh)\,d\xi_{ij}(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\alpha-1} \sqrt{ab_0^{\,i}}\, z(t-ih)\,d\xi_{0i}(t), \quad 0 < t \leqslant T \tag{26}$$

и начальных условий

$$z(0) = 1, \quad z(t) = 0, \quad t < 0 \tag{27}$$

Аналогично доказательству теоремы 1 из [3] устанавливается, что решение $z(t)$ задачи (26), (27) удовлетворяет при некоторых постоянных c_1, c_2 оценке

$$\mathrm{M}z^4(t) \leqslant c_1 e^{c_2 t} \tag{28}$$

(M — знак математического ожидания), из которой на основании формулы Ито ([4], стр. 506) следует, что $y(t) = Mz^2(t)$. Но $Mz^2(t) \geqslant [Mz(t)]^2$, поэтому для доказательства теоремы 4 достаточно установить неравенство $r(t) = Mz(t) > 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. В силу формулы Ито и соотношений (26) —(28) получаем, что функция $r(t)$ есть решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$r^{\cdot}(t) = 1/2\, ar(t), \quad 0 < t \leqslant T$$

с начальным условием $r(0) = 1$. Следовательно, для любого $0 \leqslant t \leqslant T$ функция $r(t) > 0$. Теорема 5 доказана.

Замечание 3. Дословно повторяя рассуждения, использованные при доказательстве теорем 2—4, убеждаемся, что их утверждения остаются в силе и для неоднородных уравнений вида (10).

Замечание 4. Некоторые результаты этой работы нетрудно распространить и на уравнения с переменными коэффициентами.

Пример 1. Рассмотрим одномерное уравнение

$$x^{\cdot}(t) = x(t-h) + x^{\cdot}(t-2h), \quad t > 0,\ h > 0$$

Пусть число $x_0 = 1$, $x_1 = 2 + h$, начальная функция $\psi(\theta) \equiv 0$ и момент времени $T = 2h$. Тогда $y(\theta + h, 2h) = 1 - \theta$ при $-h \leqslant \theta \leqslant 0$ и постоянная $\beta = 1$ (см. формулу (6)). Отсюда и из (9) получаем, что $\rho^2_0 = h + h^2 + {}^1/_3\, h^3 > 0$. Поэтому оптимальная разрешающая функция $\varphi(\theta)$, которая должна удовлетворять условиям

$$\int_{-h}^{0} \varphi^2(s)\, ds = \rho_0^{-2}, \qquad \int_{-h}^{0} \varphi(s)\, y(s+h, 2h)\, ds = 1$$

равняется

$$\varphi(\theta) = \rho_0^{-2}(1 - \theta), \quad -h \leqslant \theta \leqslant 0$$

Пример 2. Пусть дано одномерное уравнение $x^{\cdot}(t) = x(t) + x^{\cdot}(t-h) + x(t-h)$, $t > 0$, $h > 0$.

Предположим, что $x_0 = 1$, $x_1 = 2e^h$, постоянная $T = h$ и начальная функция $\psi(\theta) = 1$, $(-h \leqslant \theta \leqslant 0)$. Нетрудно вычислить, что $y(\theta + h, h) = e^{-\theta}$. В соответствии с пп 1), 2) леммы 1, оптимальная начальная функция $\varphi(\theta)$ равняется $\varphi(\theta) = \rho_\theta^{-2} e^{-\theta}$, так как постоянная $\rho = 1$ и $2\rho^2_0 = e^{2h} - 1$.

Поступила 11 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1968.
3. Ито К., Нисио М. Стационарные решения стохастического дифференциального уравнения. Математика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1967, т. 11. № 5.
4. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.