Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

# О ФУНКЦИИ БЕЛЛМАНА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Н. Н. Петров

(Ленинград)

В работе приводится необходимое и достаточное условие принадлежности функции Беллмана для задачи оптимального быстродействия классу функций, удовлетворяющих условию Липшица.

**1.** Пусть управляемый процесс описывается системой уравнений

$$dx / dt = f(x, u) \tag{1.1}$$

где $x$ и $f$ — $n$-мерные векторы, а $u$ — $r$-мерный вектор управления.

Будем предполагать, что множество $U$ допустимых значений управляющих функций $u = u(t)$ есть непустое компактное подмножество $r$-мерного евклидова пространства $E_r$. В качестве допустимых управляющих функций будем рассматривать измеримые функции $u = u(t)$ со значениями в $U$. Кроме того, будем предполагать, что вектор-функция $f(x, u)$ определена и непрерывна по совокупности переменных на множестве $E_n \times U$ и удовлетворяет локальному условию Липшица по $x$ с константой, не зависящей от $u$. Целью управления является приведение системы в положение $x = 0$.

Пусть $G(< T)$ — множество всех точек $x_0 \in E_n$, из которых можно попасть в начало координат за время, меньшее чем $T$. Иначе говоря, $x_0 \in G(< T)$ означает, что существует такое допустимое управление $u = u(t)$, определенное для $t \in [0, \tau]$, $\tau < T$, что решение $x = x(t, x_0, u(t))$ уравнения (1.1) с начальными данными $(0, x_0)$, соответствующее этому управлению, обладает свойством $x(\tau, x_0, u(t)) = 0$.

Пусть $x \in G = UG(<T)$, $(0 < T < \infty)$. Тогда из точки $x$ можно попасть в начало за конечное время $\tau$. Множество всех таких $\tau$ обозначим через $\Delta(x)$.

Функцией Беллмана (для задачи оптимального быстродействия) будем называть функцию

$$T = T(x) = \inf \tau \qquad (\tau \in \Delta(x))$$

определенную для $x \in G$.

За одну из характеристик системы (1.1) можно принять величину

$$T_0 = \begin{cases} \infty, \text{ если } G \text{ ограничено} \\ \underline{\lim}\, T(x), \ |x| \to \infty,\ x \in G, \text{ если } G \text{ неограничено.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Можно показать [1], что $T_0$ есть точная верхняя граница всех $T$, для которых $G(< T)$ ограничено.

**2.** Известно, что уравнение Беллмана для задачи оптимального быстродействия

$$\min \frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x, u) = -1 \qquad (u \in U) \tag{2.1}$$

выводится при очень жестких априорных предположениях относительно функции $T = T(x)$ (требуется непрерывность $T(x)$ и существование у нее непрерывных частных производных всюду, за исключением точки $x = 0$) [2]. В связи с этим представляет интерес проверка этих предположений по уравнению (1.1). Некоторые теоремы о непрерывности функции $T = T(x)$ получены в работах [3,4]. В частности, в работе [4] сформулированы необходимые и достаточные условия непрерывности функции Беллмана в окрестности начала координат в случае, если $f(x, u)$ голоморфна по $x$ в окрестности начала ($n = 2$), а множество $U$ состоит из конечного числа векторов.

**3.** В этом пункте доказано вспомогательное утверждение, которое представляет и самостоятельный интерес.

*Лемма* 3.1. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_m \in U$ таковы, что векторы $f(0, u_1)$, $f(0, u_2), \ldots f(0, u_m)$ составляют положительный базис [3]. Тогда система (1.1) локально управляема и в некоторой окрестности начала справедливо неравенство:

$$T(x) \leqslant C \| x \| \tag{3.1}$$

где $\| x \|$ — евклидова норма вектора $x$, а $C$ — некоторая постоянная.

*Доказательство.* Введем в рассмотрение функции

$$X_1(\tau_1) = x(\tau_1, 0, u_1), \quad X_2(\tau_1, \tau_2) = x(\tau_2, X_1, u_2), \ldots X_m(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_m) = x(\tau_m, X_{m-1}, u_m) \tag{3.2}$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что уравнение

$$x = X_m(\tau) = X_m(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_m)$$

имеет неположительное решение $\tau = \tau(x)$, определенное в некоторой окрестности начала и удовлетворяющее неравенству

$$|\tau(x)| = |\tau_1(x)| + \ldots + |\tau_m(x)| \leqslant C \| x \|$$

где $C$ — некоторая постоянная. При помощи рекуррентных соотношений (3.2) нетрудно получить для $X_m(\tau)$ следующее представление:

$$X_m(\tau) = (A + A_0(\tau))\tau \tag{3.3}$$
$$A = (f(0, u_1), \ldots f(0, u_m)), \quad A_0(0) = 0$$

где $A_0(\tau)$ — непрерывная матрица.

Докажем существование непрерывного вектора $b(\tau)$, имеющего отрицательные компоненты, большие по абсолютной величине любого числа $M > 0$, и удовлетворяющего уравнению

$$(A + A_0(\tau))b(\tau) = 0 \tag{3.4}$$

По одному из свойств положительного базиса [3] существует вектор $b_0$, имеющий отрицательные компоненты, большие по абсолютной величине $M + 1$, и удовлетворяющий уравнению

$$Ab_0 = 0$$

Будем искать решение уравнения (3.4) в виде

$$b(\tau) = b_0 + \Delta b(\tau), \qquad \Delta b(0) = 0$$

Тогда относительно вектора $\Delta b$ получится следующее уравнение:

$$(A + A_0(\tau))\Delta b + A_0(\tau)b_0 = 0 \tag{3.5}$$

Так как ранг матрицы $A + A_0(\tau)$ при достаточно малом $|\tau|$ равен $n$, то уравнение (3.5) определяет неявную непрерывную функцию

$$\Delta b = \Delta b(\tau) \to 0 \qquad \text{при } \tau \to 0$$

Отсюда следует, что при достаточно малом $|\tau|$ вектор $b(\tau) = b_0 + \Delta b(\tau)$ будет непрерывным и компоненты его не будут превосходить $-M$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$(A + A_0(\tau))\beta = X, \qquad \| X \| = 1 \tag{3.6}$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\beta(\tau, X) = \beta(\tau) + c(\tau, X)$$

где $b(\tau)$ — некоторое решение уравнения (3.4). Тогда $c(\tau, X)$ удовлетворяет уравнению

$$(A + A_0(\tau))c(\tau, X) = X \tag{3.7}$$

Пусть для определенности $A + A_0(\tau) = (A_1(\tau), A_2(\tau))$, где $A_1(\tau)$ — квадратная неособенная матрица. Тогда решением уравнения (3.7) будет вектор

$$c(\tau, X) = \begin{pmatrix} A_1^{-1}(\tau) X \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для $-\delta \leqslant \tau_i \leqslant 0$, где $\delta$ достаточно мало, $\| X \| = 1$, вектор-функция $c(\tau, X)$ непрерывна и ограничена

$$| c_i(\tau, X) | \leqslant M \qquad (i = 1 \ldots m)$$

По доказанному выше $b(\tau)$ можно выбрать так, чтобы вектор

$$\beta(\tau, X) = b(\tau) + c(\tau, X)$$

имел отрицательные компоненты $\beta_i$. Кроме того, существует такая постоянная $K$, что для

$$-\delta \leqslant \tau_i \leqslant 0, \| X \| = 1, \quad | \beta_i(\tau, X) | \leqslant K \quad (i = 1 \ldots m)$$

Рассмотрим, наконец, уравнение

$$\tau = \rho\beta(\tau, X) \tag{3.8}$$

где $0 < \rho < \delta / K$. Отображение $\Phi(\tau) = \rho\beta(\tau, X)$ при фиксированных $\rho$ и $X$ непрерывно и переводит куб $\{-\delta \leqslant \tau_i \leqslant 0\}$ в себя. По известной теореме о неподвижной точке (см., например, [5]) уравнение (3.8) имеет отрицательное решение $\tau = \tau^*(\rho, X)$. По определению функции $\beta(\tau, X)$

$$(A + A_0(\tau^*))\tau^* = \rho X$$

Отсюда следует, что для $\| x \| < \delta / K$ уравнение

$$X_m(\tau) = x$$

имеет отрицательное решение $\tau = \tau(x)$. Оценка (3.1) следует из (3.8). Лемма 3.1 доказана.

Отметим, что в доказательстве леммы 3.1 использовалась по существу лишь непрерывность функции $f(x, u)$ по $x$. В случае, если правые части системы (1.1) непрерывно дифференцируемы по $x$, лемма 3.1 следует из результатов статьи [3]. Однако метод доказательства, примененный в этой работе, не позволяет получить оценку (3.1).

В дальнейшем понадобится следующая лемма.

*Лемма* 3.2. Пусть $u = u(t)$ — допустимое управление, определенное для $t \in [0, T]$ и $x(T, x_0, u(t)) = 0$. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно указать кусочно-постоянное допустимое управление $u = U(t)$, $t \in [0, T]$, и вектор $x_0'$, обладающие свойством

$$x(T, x_0', U(t)) = 0, \qquad \| x_0 - x_0' \| < \varepsilon$$

Доказательство леммы 3.2 следует из теоремы о приближении измеримых функций кусочно-постоянными и из теоремы Курцвейля — Ворла о непрерывной зависимости решения от параметра [6].

4. *Теорема.* Функция $T = T(x)$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности начала тогда и только тогда, когда $x = 0$ является внутренней точкой выпуклой оболочки множества

$$F = \{f(0, u),\ u \in U\}$$

*Достаточность.* Покажем, что существуют такие $u_1, \ldots, u_m \in U$, что векторы $f(0, u_1) \ldots f(0, u_m)$ составляют положительный базис. Для этого достаточно доказать, что если $x_1 \ldots x_n$ образуют базис в пространстве $E_n$, то каждый из векторов $\pm x_1, \ldots, \pm x_n$ представим в виде линейной комбинации конечного числа $f(0, u_i)$ с неотрицательными коэффициентами. Рассмотрим, например, вектор $x_1$. По условию теоремы найдется такое положительное число $\lambda$, что $\lambda x_1 \in \operatorname{conv} F$, где символ $\operatorname{conv} F$ означает выпуклую оболочку множества $F$. Тогда найдутся такие постоянные $\alpha_1 \ldots \alpha_k$, что

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \ \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$$
$$\lambda x_1 = \alpha_1 r_1 + \ldots + \alpha_k r_k, \qquad r_i \in F$$

Следовательно, существуют такие $u_1, \ldots u_k$, что

$$x_1 = \gamma_1 f(0, u_1) + \ldots + \gamma_k f(0, u_k)$$

Аналогичные представления легко получить и для векторов

$$-x_1, \ \pm x_2, \ \ldots \pm x_n$$

Пусть $u_1, \ldots, u_m$ таковы, что векторы $f(0, u_1), \ldots f(0, u_m)$ составляют положительный базис. Тогда из леммы 3.1 следует, что система (1.1) локально управляема и существует такая окрестность начала $S_\eta(0)$ радиусом $\eta$, что для $x \in S_\eta(0)$ справедлива оценка

$$T(x) \leqslant C \| x \| \tag{4.1}$$

Покажем теперь, что функция $T = T(x)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности каждой точки $x_0 \in G(< T_0)$. Пусть $T < T_0$ таково, что $x_0 \in G(< T)$. Тогда $T$ конечно, а замыкание множества $G(< T)$ компактно (см. п. 1). В силу сделанных предположений относительно функции $f(x, u)$ существует такая постоянная $L$, что для любых $x_1 x_2 \in \bar{G}(< T)$ и $u \in U$ справедливо неравенство

$$\| f(x_1, u) - f(x_2, u) \| \leqslant L \| x_1 - x_2 \|$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\overline{S}_\delta(x_0) \subset G(< T_1), \quad \delta < {}^1/_2 \min(\eta, d)\, e^{-LT}, \quad T_1 < T$$

Здесь $d$ — столь малое положительное число, что $d$-окрестность множества $T = T(x)$ не пересекается с множеством $\overline{G}(< T_1)$. Покажем, что для любых $x_1, x_2 \in \overline{S}_\delta(x_0)$ справедливо неравенство

$$|T(x_1) - T(x_2)| \leqslant M \| x_1 - x_2 \| \qquad (M = \mathrm{const}) \tag{4.2}$$

Действительно, рассмотрим $x_1, x_2 \in S_\delta(x_0)$: пусть для определенности $T(x_1) \geqslant T(x_2)$. По любому $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < T_1 - T(x_2)$ найдется такое допустимое управление $u = u_\varepsilon(t)$, определенное на $[0, T_\varepsilon]$, что $x(T_\varepsilon, x_2, u_\varepsilon(t)) = 0$ и $T_\varepsilon - T(x_2) < \varepsilon$. Ясно, что при этом

$$x(t, x_2, u_\varepsilon(t)) \in G(< T_1)$$

для $t \in [0, T_\varepsilon]$. Рассмотрим теперь решение $x = x(t, x_1, u_\varepsilon(t))$ и покажем, что

$$x(t, x, u_\varepsilon(t)) \in G(< T)$$

для $t \in [0, T_\varepsilon]$. Действительно, предположив противное, получим, что существует такой момент времени $T^\circ < T_\varepsilon$, что $T(x(T^\circ, x_1, u_\varepsilon(t))) = T$ и для $t \in [0, T]$

$$x(t, x_1, u_\varepsilon(t)) \in G(< T)$$

Тогда для $t \in [0, T^\circ]$ справедлива оценка

$$\|x(t, x_1, u_\varepsilon(t)) - x(t, x_2, u_\varepsilon(t))\| \leqslant \|x_1 - x_2\| e^{LT} < d$$

Отсюда следует, что $x(T^\circ, x_2, u_\varepsilon(t))$ принадлежит $d$-окрестности множества $T(x) = T$, что невозможно в силу выбора числа $d$. Итак

$$x(t, x_1, u_\varepsilon(t)) \in G(< T)$$

для всех $t \in [0, T_\varepsilon]$.

Тогда

$$\| x(T_\varepsilon, x_1, u_\varepsilon(t)) - x(T_\varepsilon, x_2, u_\varepsilon(t)\| = \|x(T_\varepsilon, x_1, u_\varepsilon(t))\| \leqslant \|x_1 - x_2\| e^{LT} < \eta \tag{4.3}$$

Оценим разность

$$0 \leqslant T(x_1) - T(x_2) < T(x_1) - T_\varepsilon + \varepsilon \leqslant T(x(T_\varepsilon, x_1, u_\varepsilon(t))) + \varepsilon$$

Так как $x(T_\varepsilon, x_1, u_\varepsilon(t) \in S_\eta(0)$ в силу (4.3), то согласно (4.1) получим

$$|T(x_1) - T(x_2)| \leqslant C \|x(T_\varepsilon, x_1, u_\varepsilon(t)) - x(T_\varepsilon, x_2, u_\varepsilon(t)\| + \\ + \varepsilon \leqslant C \|x_1 - x_2\| e^{LT} + \varepsilon$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то, полагая $M = Ce^{LT}$, получаем неравенство (4.2). Достаточность доказана.

*Необходимость.* Пусть функция $T = T(x)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности начала, но $x = 0$ не является внутренней точкой conv $F$. Тогда существует такой вектор $\alpha$, $\|\alpha\| = 1$, что $(\alpha, r) \geqslant 0$ для любого вектора $r \in \operatorname{conv} F$. Так как функция $T = T(x)$ непрерывна в окрестности начала, то для $x_k = \rho_k\alpha$, $\rho_k \to 0$ $k \to \infty$ справедливо предельное соотношение $T(x_k) \to 0$.

По лемме 3.2 существуют такие кусочно-постоянные управления $u = u_k(t)$, определенные для $t \in [0, T_k]$, и векторы $x_k'$, что

$$x(T_k, x_k', u_k(t)) = 0, \quad |T(x_k) - T_k| < \rho_k^2, \quad \|x_k' - x_k\| < \rho_k^2 \tag{4.4}$$

Тогда

$$x_k' = X_{m_k}(\tau_1^{(k)} \ldots \tau_{m_k}^{(k)}) = X_{m_k}(\tau^{(k)}),$$

$$|\tau^{(k)}| = |\tau_1^{(k)}| + \ldots + |\tau_{m_k}^{(k)}| = T_k, \qquad \tau_i^{(k)} < 0$$

где функции $X_{m_k}$ определены в лемме 3.1. При помощи (3.3) нетрудно получить следующее представление:

$$x_k' = -T_k\left(r_k - \frac{A_0(\tau^{(k)})\,\tau^{(k)}}{T_k}\right), \qquad r_k \in \operatorname{conv} F$$

или

$$-\alpha + \frac{x_k - x_k'}{\rho_k} = \frac{T_k}{\rho_k}\left(r_k - \frac{A_0(\tau^{(k)})\,\tau^{(k)}}{T_k}\right) \tag{4.5}$$

Так как $T = T(x)$ удовлетворяет в окрестности начала условию Липшица и $T(0) = 0$, то $T(x_k) \leqslant C\rho_k$; отсюда при помощи (4.4) нетрудно получить, что $T_k \leqslant M\rho_k$. Учитывая (4.4) и (4.5), имеем

$$T_k \to 0, \quad \frac{\|x_k - x'_k\|}{\rho_k} \to 0, \quad \frac{\|A_0(\tau^{(k)})\,\tau^{(k)}\|}{T_k} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty$$

Следовательно, существуют такие $0 \leqslant M_0 \leqslant M$ и $r_0 \in \operatorname{conv} F$, что $-\alpha = M_0 r_0$. Умножая последнее равенство скалярно на $\alpha$, получаем $(\alpha, r_0) < 0$, что противоречит выбору вектора $\alpha$. Необходимость доказана.

*Замечание* 4.1. Условие, сформулированное в теореме, очень ограничительно. Нетрудно показать, что для линейных систем

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \qquad |u| \leqslant 1$$

это условие выполняется лишь при $r = n$ и $\det B \neq 0$.

*Замечание* 4.2. Из доказательства теоремы следует, что функция $T = T(x)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности каждой точки области $G_\ast(< T_0)$. В частности, для линейных систем при $r = n$, $\det B \neq 0$ она удовлетворяет условию Липшица в окрестности каждой точки множества управляемости.

5. Сделаем несколько замечаний о дифференцируемости функции Беллмана $T = T(x)$.

1°. Для локально управляемых систем функция $T = T(x)$ не может быть дифференцируемой в точке $x = 0$. Действительно, в противном случае оказалось бы, что $\partial T(0) / dx = 0$, что противоречит очевидному неравенству $\alpha \|x\| \leqslant T(x)$, $\alpha > 0$.

2°. Функция $T = T(x)$ может иметь ограниченные первые частные производные в некоторой окрестности начала (исключая само начало) лишь в том случае, когда точка $x = 0$ является внутренней для $\operatorname{conv} F$.

3°. Условие основной теоремы данной работы не влечет за собой дифференцируемости функции $T = T(x)$ в некоторой окрестности начала (исключая само начало). Действительно, для системы

$$dx / dt = u_1, \qquad dy / dt = u_2 \tag{5.1}$$

в которой вектор $u = (u_1, u_2)$ принимает значения $\{+1,0\}$, $\{-1,0\}$, $\{0, +1\}$, $\{0, -1\}$, функция Беллмана равна

$$T(x, y) = |x| + |y|$$

и, следовательно, недифференцируема на осях координат, хотя $\{x = 0, y = 0\} \in \operatorname{conv} F$.

Если же для системы (5.1) предположить, что ограничение на $u$ имеет вид $\|u\| \leqslant 1$, то в этом случае

$$T(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Отсюда видно, что эта функция дифференцируема всюду, за исключением начала.

4°. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = u_1, \quad \frac{dy}{dt} = u_2(x^2 + y^2), \qquad \sqrt{(u_1^2 + u_2^2)} \leqslant 1$$

Нетрудно показать, что точка $x = 0$, $y = 0$ не будет внутренней для множества $F : \{|x| \leqslant 1, y = 0\}$, но функция Беллмана удовлетворяет условию Липшица в окрестности каждой точки пространства, кроме, разумеется, начала координат.

Поступила 26 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Н. Н. Об одном обобщении понятия функции Беллмана. Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 2.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Изд. 2, М., «Наука», 1969.
3. Петров Н. Н. Об управляемости автономных систем. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, № 4, стр. 606—617.
4. Петров Н. Н. Решение одной задачи теории управляемости. Дифференциальные уравнения, 1969, т. 5, № 5.
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959, стр. 574.
6. Курцвейль Я, Ворел З. О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра. Чехосл. матем. ж., 1957, т. 6, № 82.