Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ОБ ОДНОЙ ИГРЕ СБЛИЖЕНИЯ

А. Г. Пашков

(Москва)

На заранее фиксированном отрезке времени $[t_0, \vartheta]$ рассматривается игровая задача сближения управляемых объектов к моменту $t = \vartheta$. Преследующий объект предполагается инерционной точкой, преследуемый объект — безынерционным. Изучается задача о построении оптимальной минимаксной стратегии преследователя, которая обеспечивает минимакс рассогласования координат в заданный момент времени. Доказано, что такой стратегией будет полученная в работе [3] смешанная стратегия специального вида, работающая в рамках математического аппарата дифференциальных уравнений в контингенциях.

1. Рассматривается дифференциальная игра двух объектов $m^{(1)}$ и $m^{(2)}$, перемещающихся в горизонтальной плоскости q_1q_2. Движение преследующего объекта $m^{(1)}(y_1, y_2)$, управляемого первым игроком, описывается системой уравнений

$$y_1^{\cdot} = y_3, \qquad y_2^{\cdot} = y_4, \qquad y_3^{\cdot} = u_3, \qquad y_4^{\cdot} = u_4 \tag{1.1}$$

где вектор управления $u = u^*(u_3, u_4)$ удовлетворяет неравенству

$$(u_3^2[t] + u_4^2[t])^{1/2} \leqslant \mu \tag{1.2}$$

Преследуемый объект $m^{(2)}(z_1, z_2)$, управляемый вторым игроком, движется согласно уравнениям

$$z_1^{\cdot} = v_1, \qquad z_2^{\cdot} = v_2 \tag{1.3}$$

где вектор управления $v = v(v_1, v_2)$ стеснен ограничением

$$(v_1^2[t] + v_2^2[t])^{1/2} \leqslant \nu \tag{1.4}$$

Платой игры γ будет расстояние между объектами $m^{(1)}$ и $m^{(2)}$ в заданный момент $t = \vartheta$, т. е.

$$\gamma = [(y_1[\vartheta] - z_1[\vartheta])^2 + (y_2[\vartheta] - z_2[\vartheta])^2]^{1/2} \tag{1.5}$$

Как известно, уравнениями (1.1), (1.3) при ограничениях (1.2), (1.4) описывается движение объектов в игровых задачах преследования, именуемых иногда задачами об «изотропных ракетах», или «о мальчике и крокодиле» [1–3].

Введем обозначения. Время во вспомогательных рассуждениях обозначим буквой τ; время, в котором развертывается исходная игра — буквой t. Аргумент τ в обозначениях тех функций, которые описывают движения и управления во вспомогательных задачах, будем заключать в круглые скобки. Прямые скобки, заключающие аргумент t, будут означать, что речь идет о движениях и управлениях, реализующихся на деле в процессе игры. Множество, состоящее из таких четырех мерных векторов $u = u(u_1, u_2, u_3, u_4) = u^*(u_3, u_4)$, у которых компоненты u_1 и u_2 удовлетворяют условию $u_1 \equiv u_2 \equiv 0$, а компоненты u_3 и u_4 стеснены неравенством (1.2), обозначим U_a. Множество векторов $v = v(v_1, v_2)$, у которых компоненты v_1 и v_2 стеснены неравенствами (1.4), обозначим через V_+.

Предполагается, что управляющее воздействие u формируется по принципу обратной связи и реализующееся значение его $u[t]$ в каждый текущий момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$ определяется реализующейся в этот момент позицией.

Будем придерживаться того определения стратегии игры, которое приведено в работе [3]. Таким образом, допустимые стратегии преследователя U будем отождествлять с множествами $U_* = U_*(t, y, z)$, сопоставляемыми каждой возможной позиции (t, y, z) и обладающими следующими свойствами:

1) выполняются включения

$$U_*(t, y, z) \subset U_a$$

2) множества $U_*(t, y, z)$ замкнуты и выпуклы;

3) множества $U_*(t, y, z)$ полунепрерывны сверху по включению при изменении (t, y, z) в окрестности каждой возможной позиции.

Для преследуемого допустим любые интегрируемые реализации $v[t]$, стесненные условием (1.4). При этом движением системы (1.1), (1.3), порожденным стратегией $U = U(t, y, z)$ и произвольной интегрируемой реализацией управления $v = v[t]$, называется всякая абсолютно непрерывная вектор-функция $(y[t], z[t])$, которая почти при всех $t \in [t_0, \vartheta]$ удовлетворяет системе уравнений

$$y_1^{\cdot} = y_3[t], \quad y_2^{\cdot} = y_4[t], \quad y_3^{\cdot}[t] = u_3[t], \quad y_4^{\cdot}[t] = u_4[t]$$

$$z_1^{\cdot} = v_1[t], \quad z_2^{\cdot} = v_2[t]$$

где

$$u[t] \in U_*(t, y[t], z[t])$$

Задача формулируется теперь следующим образом. Требуется найти допустимую стратегию $U^\circ(t, y, z)$, которая определяет минимум в следующем соотношении:

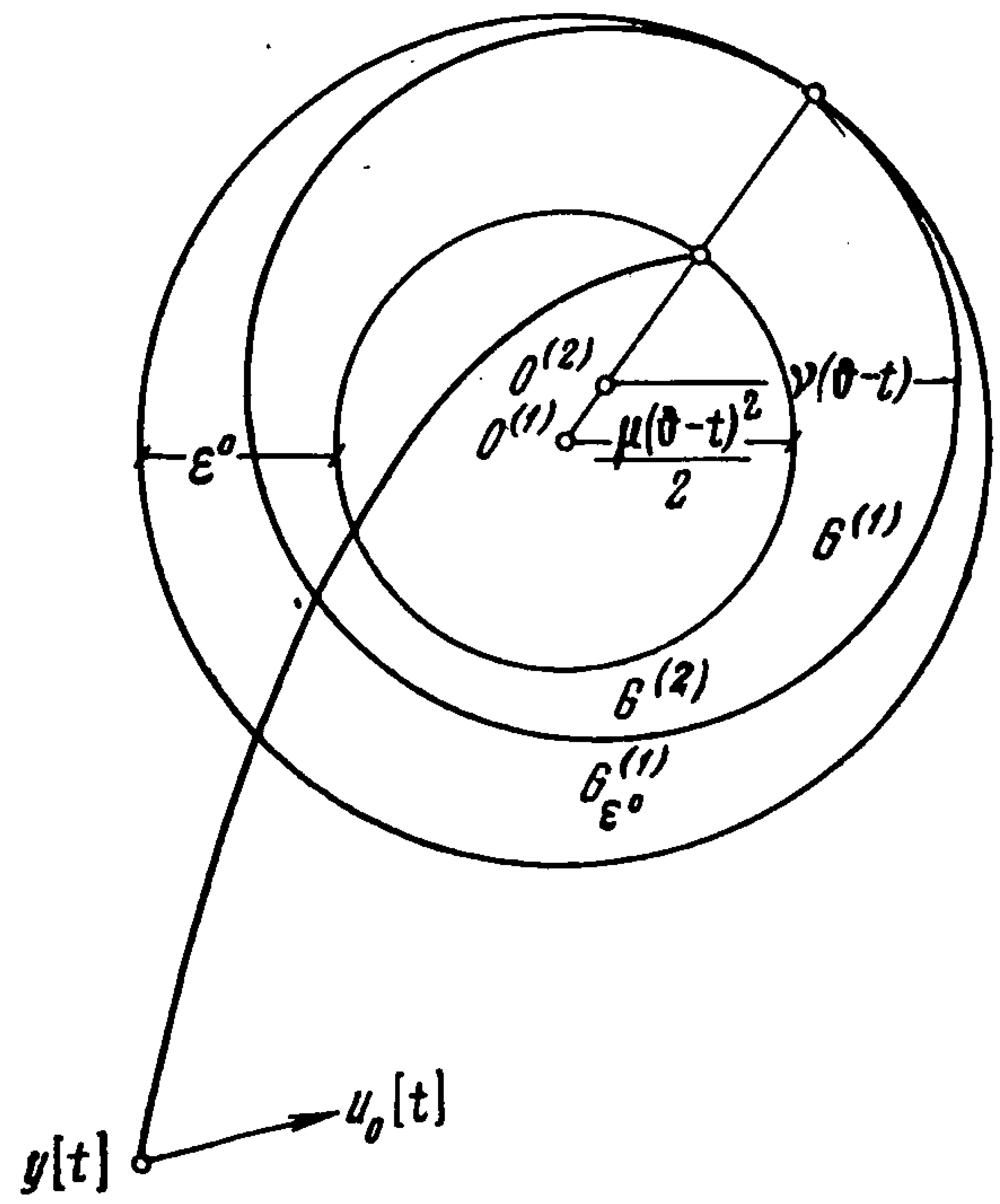
$$\gamma^* = \min_U \max_{v[t]} \max_{y[t]} \gamma =$$

$$= \min_U \max_{v[t]} \max_{y[t]} [(y_1[\vartheta] - z_1[\vartheta])^2 + (y_2[\vartheta] - z_2[\vartheta])^2]^{1/2} \qquad (1.6)$$

Здесь $\max_{y[t]}$ берется по всем решениям $y[t]$, отвечающим стратегии $U = U(t, y, z)$ и управлению $v = v[t]$, $\min_U$ и $\max_v$ вычисляются соответственно по всевозможным допустимым стратегиям $U = U(t, y, z)$ и интегрируемым вектор-функциям $v = v[t]$ $(v[t] \in V_+)$.

2. Обратимся теперь к решению поставленной задачи. Для этого рассмотрим области достижимости ([4], стр. 331) объектов (1.1), (1.2) и (1.3), (1.4) из позиции $(t, y[t])$ и $(t, z[t])$ соответственно к моменту $t = \vartheta$, кото-

рые будем строить на плоскости q_1q_2. Обозначим через $G_\varepsilon^{(1)}(t, y, \vartheta)$ — замкнутую ε-окрестность области $G^{(1)}(t, y, \vartheta)$. Область $G^{(1)}(t, y, \vartheta)$ есть множество точек, лежащих в плоскости q_1q_2 и достижимых из положения $(t, y[t])$ первым игроком к моменту $t=\vartheta$. Аналогично областью достижимости $G^{(2)}(t, z, \vartheta)$ называется множество точек, расположенных в плоскости q_1q_2 и достижимых из положения $(t, z[t])$ к моменту $t=\vartheta$ вторым игроком. Областями достижимости $G_\varepsilon^{(1)}(t, y, \vartheta)$ и $G^{(2)}(t, z, \vartheta)$ на плоскости q_1q_2 будут круги. Радиус $r_\varepsilon^{(1)}(t, \vartheta)$ области $G_\varepsilon^{(1)}(t, y, \vartheta)$ будет изображаться равенством



$$r^{(1)}(t, \vartheta) = {}^1/_2\mu(\vartheta - t)^2 + \varepsilon \quad (\varepsilon \geqslant 0) \tag{2.1}$$

а радиус $r^{(2)}(t, \vartheta)$ области $G^{(2)}(t, z, \vartheta)$ будет задаваться равенством

$$r^{(2)}(t, \vartheta) = \nu(\vartheta - t) \tag{2.2}$$

Центр области $G_\varepsilon^{(1)}$ точка $O^{(1)}$ в момент t имеет координаты

$$y_c = \{y_{1c}[t], y_{2c}[t]\} = \{y_1[t] + (\vartheta - t)y_3[t], y_2[t] + (\vartheta - t)y_4[t]\}$$

Координаты центра области $G^{(2)}$ точки $O^{(2)}$, очевидно, совпадают с координатами точки $\{z_1[t], z_2[t]\}$.

Пусть $\Delta = \Delta(t, y, z)$ — расстояние между центрами кругов $O^{(1)}$ и $O^{(2)}$, так что

$$\Delta^2 = \{z_1[t] - y_1[t] - (\vartheta - t)y_3[t]\}^2 + \{z_2[t] - y_2[t] - (\vartheta - t)y_4[t]\}^2$$

Из выражений (2.1) и (2.2) с очевидностью вытекает возможность подбора таких исходных состояний $y[t_0]$ и $z[t_0]$, когда никак невозможно будет удержать область $G^{(2)}(t, z[t], \vartheta)$ в сколь угодно малой окрестности области $G_{\varepsilon^0}^{(1)}(t, y[t], \vartheta)$ при всех $t \in [t_0, \vartheta]$, ибо при уменьшении разности $\vartheta - t$ радиус $r^{(1)}$ убывает как квадрат величины $\vartheta - t$, радиус $r^{(2)}$ имеет порядок величины $\vartheta - t$, а начальное значение $\varepsilon^\circ = \varepsilon(t_0, y[t_0], z[t_0])$ подходящим подбором исходной позиции $(t_0, y_0 = y[t_0], z_0 = z[t_0])$ всегда можно сделать сколь угодно малым и даже — нулем.

Пусть в некоторый момент $t \in [t_0, \vartheta]$ имеет место поглощение области $G^{(2)}(t, z, \vartheta)$ областью $G_{\varepsilon[t]}^{(1)}(t, y, \vartheta)$ (фигура), где

$$\varepsilon[t] = \nu(\vartheta - t) - {}^1/_2\mu(\vartheta - t)^2 + \Delta(t, y, z) \tag{2.3}$$

Покажем, что искомой стратегией $U^\circ(t, y, z)$, доставляющей $\min_U \max_v \max_y \gamma$ будет так называемая смешанная экстремальная стратегия U^-, задаваемая некоторыми множествами U_-. Эта стратегия U^- строится следующим образом [3].

Известно [3], что функция $\varepsilon^\circ(t, y[t], z[t])$ задается равенством

$$\varepsilon^\circ(t, y[t], z[t]) = \max_{\|l\|=1} [\rho^{(2)}(t, z, \vartheta, l) - \rho^{(1)}(t, y, \vartheta, l)] \tag{2.4}$$

где $\rho^{(2)}(t, z, \vartheta, l)$ и $\rho^{(1)}(t, y, \vartheta, l)$ — опорные функции множеств $G^{(2)}(t, z, \vartheta)$ и $G^{(1)}(t, y, \vartheta)$.

В случае, когда позиция игры $(t, y[t], z[t])$ такова, что максимум в (2.4) доставляет единственный вектор $l = l^\circ(t, y, z, \vartheta)$ этой позиции, ставим в соответствие множество $U_* = U_-(t, y, z)$ — совокупность всех векторов u_0, для которых имеет место условие максимума

$$l^{\circ\prime}(t, y, z, \vartheta) Y(\vartheta, t)\, u_0 = \max_{u \in U_a} l^{\circ\prime}(t, y, z, \vartheta) Y(\vartheta, t)\, u$$

Здесь $Y(\vartheta, t)$ — фундаментальная матрица системы (1.1) при $u \equiv 0$, а штрих означает транспонирование вектора-столбца l°.

В рассматриваемом случае множество $U_-(t, y, z)$ состоит из единственного вектора

$$U_-(t, y, z) = \{0, 0, \mu(z_1 - y_1 - (\vartheta - t) y_3) \Delta^{-1}, \quad \mu(z_2 - y_2 - (\vartheta - t) y_4) \Delta^{-1}\}$$
$$(\Delta \neq 0)$$

Если максимум в (2.4) доставляется не единственным вектором l°, то полагаем

$$U_-(t, y, z) = U_a$$

Заметим, что для рассматриваемой задачи единственность вектора l° имеет место при $\Delta > 0$, а неединственность при $\Delta = 0$.

Таким образом, определена стратегия U^-, задаваемая множествами

$$U_-(t, y, z) = \{0, 0, \mu(z_1 - y_1 - (\vartheta - t) y_3) \Delta^{-1}, \mu(z_2 - y_2 - (\vartheta - t) y_4) \Delta^{-1}\}$$
$$(\Delta > 0)$$
$$U_-(t, y, z) = U_a \qquad (\Delta = 0) \tag{2.5}$$

3. Пусть время игры (1.1) — (1.6) удовлетворяет условию $\vartheta - t_0 > \nu / \mu$.

Разобьем интервал $[t_0, \vartheta]$ точкой $t^* = \vartheta - \nu / \mu$ на интервал $[t^*, \vartheta]$ и полуинтервал $[t_0, t^*)$.

Выведем вспомогательное утверждение.

Для любой начальной позиции $(t^\circ, y[t^\circ], z[t^\circ])$, где $t^* \leqslant t^\circ \leqslant \vartheta$, выполняется равенство

$$\min_U \max_{v[t]} \max_{y[t]} \gamma = r^{(2)}(t^\circ) - r^{(1)}(t^\circ) + \Delta(t^\circ, y[t^\circ], z[t^\circ]) \ (\Delta \geqslant 0)$$

Этот минимакс доставляет стратегия U^-.

Доказательство. Пусть в момент t°, $t^* \leqslant t^\circ < \vartheta$ имеет место поглощение области $G^{(2)}(t^\circ, z, \vartheta)$ областью $G^{(1)}_{\varepsilon[t^\circ]}(t^\circ, y, \vartheta)$, где функция $\varepsilon[t]$ имеет вид согласно (2.3).

В области (t, y, z), определяемой неравенством $\Delta(t, y, z) > 0$, производная $d\Delta / dt$, вычисляемая вдоль движения системы (1.1), (1.3), порожденного стратегией U^- первого игрока и интегрируемой реализацией $v[t]$ второго игрока, будет иметь вид

$$d\Delta / dt = \{(z_1 - y_1 - (\vartheta - t)y_3)(v_1[t] - (\vartheta - t)u_3[t]) + \tag{3.1}$$

$$+ (z_2 - y_2 - (\vartheta - t)y_4)(v_2[t] - (\vartheta - t)u_4[t])\}\Delta^{-1} \leqslant \nu - \mu(\vartheta - t)$$

$$\nu - \mu(\vartheta - t) = \min_u \max_v d\Delta / dt \qquad (\Delta > 0) \tag{3.2}$$

причем управление u, доставляющее минимум выражению (3.2), совпадает с управлением, которое диктует стратегия U^- при $\Delta > 0$. Управление $v^*[t]$, доставляющее максимум по v выражению $d\Delta / dt$ в области, где $\Delta > 0$, имеет вид

$$v^*[t] = \{\nu(z_1 - y_1 - (\vartheta - t)y_3)\Delta^{-1}, \nu(z_2 - y_2 - (\vartheta - t)y_4)\Delta^{-1}\} \quad (\Delta > 0)$$

Функция $\Delta(t, y, z)$, определенная вдоль движения системы (1.1), (1.3), порожденного стратегией U^- и произвольной интегрируемой реализацией $v[t]$ второго игрока, есть, очевидно, непрерывная функция аргумента t. Следовательно, функция $\Delta[t]$ мажорируется следующим образом:

$$\Delta[t] \leqslant \int_{t^\circ}^{t} (\nu - \mu(\vartheta - \tau))\, d\tau + \Delta[t^\circ], \quad \text{где } t^\circ \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{3.3}$$

Из неравенства (3.3) получаем, что

$$\varepsilon[\vartheta] = r^{(2)}(\vartheta) - r^{(1)}(\vartheta) + \Delta[\vartheta] \leqslant \nu(\vartheta - t^\circ) - {}^1/_2\mu(\vartheta - t^\circ)^2 +$$

$$+ \Delta[t^\circ] = r^{(2)}(t^\circ) - r^{(1)}(t^\circ) + \Delta[t^\circ] \tag{3.4}$$

При $t = \vartheta$, очевидно

$$\varepsilon(\vartheta, y[\vartheta], z[\vartheta]) = \{(y_1[\vartheta] - z_1[\vartheta])^2 + (y_2[\vartheta] - z_2[\vartheta])^2\}^{1/2} \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) следует

$$\gamma \leqslant r^{(2)}(t^\circ) - r^{(1)}(t^\circ) + \Delta[t^\circ] \tag{3.6}$$

Так как второй игрок, начиная с момента $t = t^\circ$ и до момента $t = \vartheta$, может реализовать некоторое постоянное максимальное по модулю управление v, которое переводит точку $z[t^\circ]$ на пересечение границ областей $G^{(1)}_{\varepsilon[t^\circ]}(t^\circ, y, \vartheta)$ и $G^{(2)}(t^\circ, z, \vartheta)$ и обеспечивает, следовательно, в момент $t = \vartheta$ неравенство

$$\gamma \geqslant r^{(2)}(t^\circ) - r^{(1)}(t^\circ) + \Delta[t^\circ]$$

то, очевидно, стратегия $U = U^-$ есть оптимальная минимаксная стратегия для первого игрока на отрезке $t^\circ \leqslant t \leqslant \vartheta$. Эта стратегия доставляет первому игроку результат игры не хуже, чем

$$\gamma = r^{(2)}(t^\circ) - r^{(1)}(t^\circ) + \Delta[t^\circ] \tag{3.7}$$

Рассмотрим теперь случай, когда в момент $t = t^\circ$ выполняется равенство $\Delta(t^\circ, y[t^\circ], z[t^\circ]) = 0$. В этом случае, используя непрерывность функции $\Delta(t, y, z)$ от аргументов y и z, а также то, что, как следует из (3.2)

$$\min_u \max_v d\Delta / dt = \nu - \mu(\vartheta - t) > 0 \quad (t \in [t^\circ, \vartheta], \ \Delta > 0)$$

и дословно повторяя приведенные выше рассуждения для области $\Delta > 0$, получим, что стратегия U^- есть оптимальная минимаксная стратегия первого игрока и доставляет ему результат игры не хуже, чем

$$\gamma = r^{(2)}(t^\circ) - r^{(1)}(t^\circ) \tag{3.8}$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что если время игры (1.1) — (1.6) удовлетворяет условию $\vartheta - t_0 < \nu / \mu$, то стратегия U^- обеспечивает первому игроку результат игры не хуже, чем (3.7) или (3.8) в случае, если $\Delta(t_0, y[t_0], z[t_0]) > 0$ или $\Delta(t_0, y[t_0], z[t_0]) = 0$ соответственно.

4. Рассмотрим игру (1.1) — (1.6) на полуинтервале $[t_0, t^*)$. Заметим сначала, что в соответствии с (3.1) и (3.2) в области (t, y, z), где $\Delta(t, y, z) > 0$, производная $d\Delta / dt$, вычисляемая вдоль движения системы (1.1), (1.3), порожденного стратегией U^- первого игрока и произвольной интегрируемой реализацией $v[t]$ второго игрока, будет удовлетворять условию

$$d\Delta / dt \leqslant \nu - \mu(\vartheta - t) < 0 \qquad (t \in [t_0, t^*), \ \Delta > 0) \tag{4.1}$$

Пусть первый игрок на полуинтервале $[t_0, t^*)$ выбирает управление u, диктуемое стратегией U^-, а второй игрок реализует некоторое интегрируемое управление $v[t]$. Тогда в зависимости от значений функции $\Delta(t, y, z)$, вычисляемой вдоль движения системы (1.1), (1.3), порожденного стратегией U^- первого игрока и произвольной интегрируемой реализацией управления v второго игрока, на рассматриваемом полуинтервале возможны три случая игры (1.1) — (1.6). Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно и покажем, что в каждом из них стратегия U^- есть оптимальная минимаксная стратегия для первого игрока.

Первый случай имеет место, когда вдоль рассматриваемого движения системы (1.1), (1.3), неравенство $\Delta(t, y, z) > 0$ выполняется при всех $t \in [t_0, t^*)$.

В этом случае, вычисляя вдоль рассматриваемого движения системы (1.1), (1.3) производную $d\varepsilon(t, y[t], z[t]) / dt$ при $t < t^*$, убедимся, что $d\varepsilon(t, y[t], z[t]) / dt \leqslant 0$ и затем при $t \geqslant t^*$, повторяя рассуждения, использованные при доказательстве вспомогательного утверждения, получим, что стратегия U^- есть оптимальная минимаксная стратегия, обеспечивающая первому игроку результат игры γ не худший, чем

$$\min_U \max_{v[t]} \max_{y[t]} \gamma = r^{(2)}(t^*) - r^{(1)}(t^*) + \Delta^* \leqslant \varepsilon^\circ(t_0)$$
$$\Delta^* = \Delta(t^*, y[t^*], z[t^*])$$

Второй случай имеет место, если в момент $t = t_0$ выполняется равенство $\Delta(t_0, y_0, z_0) = 0$. Заметим, что из вспомогательного утверждения следует, что если время игры (1.1) — (1.6) удовлетворяет условию $\vartheta - t_0 > \nu / \mu$, то имеет место неравенство

$$\min_U \max_{v[t]} \max_{y[t]} \gamma \geqslant {}^1/_2 \nu^2 \mu^{-1}$$

Но из (4.1) следует, что движение системы (1.1), (1.3), порожденное стратегией U^- первого игрока и произвольной интегрируемой реализацией управления v второго игрока, будет оставаться на множестве $\Delta(t, y, z) \equiv 0$ при $t \in [t_0, t^*)$. Следовательно, из предыдущих рассуждений видно, что стратегия U^- обеспечивает первому игроку результат игры (1.1) — (1.6) не хуже, чем $\min_U \max_{v[t]} \max_{y[t]} \gamma = {}^1/_2 \nu^2 \mu^{-1}$ и является оптимальной минимаксной стратегией для первого игрока в рассматриваемом случае игры.

И, наконец, имеет место третий случай игры (1.1) — (1.6), если при $t = t_0$ выполняется неравенство $\Delta(t_0, y_0, z_0) > 0$, а при некотором $t = t_0^*$ $(t_0 < t_0^* \leqslant t^*)$ впервые вдоль рассматриваемого движения системы (1.1), (1.3) выполняется равенство $\Delta(t_0^*, y_0^*, z_0^*) = 0$, где $y_0^* = y[t_0^*]$, $z_0^* = z[t_0^*]$.

Покажем, что и в этом случае стратегия U^- является оптимальной минимаксной стратегией для первого игрока.

Из вспомогательного утверждения, учитывая, что время игры (1.1) — (1.6) удовлетворяет условию $\vartheta - t_0 > \nu / \mu$, следует что

$$\min_U \max_{v[t]} \max_{y[t]} \gamma \geqslant {}^1/_2 \nu^2 \mu^{-1} \tag{4.2}$$

Из (3.2) и (4.1) следует, что стратегия U^- обеспечивает к моменту $t = t_0^*$ равенство

$$\Delta_0^* = \min_U \max_{v[t]} \max_{y[t]} \Delta(t^*_0, y[t_0^*], z[t_0^*]) = 0$$

Но из (4.1) следует, что на отрезке $t_0^* \leqslant t \leqslant t^*$ движение системы (1.1), (1.3), порожденное стратегией U^- первого игрока и произвольной интегрируемой реализацией $v[t]$ второго игрока, будет оставаться на множестве (t, y, z), определяемом условием $\Delta(t, y, z) \equiv 0$ при $t \in [t_0^*, t^*]$.

Таким образом, стратегия U^- обеспечивает первому игроку равенство в выражении (4.2). Следовательно, стратегия U^- обеспечивает первому игроку результат игры не хуже, чем

$$\min_U \max_{v[t]} \max_{y[t]} \gamma = {}^1/_2 \nu^2 \mu^{-1}$$

и является оптимальной минимаксной стратегией и для этого случая игры.

Найденное решение $(y[t], z[t])$ системы уравнений (1.1), (1.3), отвечающее стратегии $U = U^- = U^\circ$ и произвольной интегрируемой реализации $v = v[t]$, можно аппроксимировать следующей дискретной схемой.

Разобьем отрезок $[t_0, \vartheta]$ точками τ_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ на полуинтервалы $\delta = [\tau_i, \tau_{i+1})$. Дискретная стратегия $U^{\circ(\delta)}(\tau_i, y[\tau_i], z[\tau_i])$ формирует управление $u[t]$ следующим образом. Пусть в момент $t = \tau_i$ реализовалась позиция $(\tau_i, y[\tau_i], z[\tau_i])$. Если $\Delta(\tau_i, y[\tau_i], z[\tau_i]) > 0$, то полагаем на полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ управление $u[t]$ $(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1})$ постоянным и равным

$$u_i[t] = \{0,\ 0,\ \mu(z_1[\tau_i] - y_1[\tau_i] - (\vartheta - \tau_i)y_3[\tau_i])\,\Delta^{-1}[\tau_i]$$
$$\mu(z_2[\tau_i] - y_2[\tau_i] - (\vartheta - \tau_i)y_4[\tau_i])\Delta^{-1}[\tau_i]\}$$

Если же $\Delta(\tau_i, y[\tau_i], z[\tau_i]) = 0$, то полагаем управление $u[t]$ $(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1})$ равным произвольному постоянному вектору, удовлетворяющему условию $u[t] = u[\tau_i] \in U_a$. Второй игрок действует как и раньше, выбирая произвольные интегрируемые реализации $v[t]$.

Можно показать, что при δ, стремящемся к нулю, порождаемые таким образом траектории $(y[t], z[t])$ системы (1.1), (1.3) сходятся к некоторому из решений уравнений в контингенциях, отвечающему стратегии U° и произвольной интегрируемой реализации $v[t]$.

Поэтому справедливо утверждение, что для любого $\alpha > 0$ найдется $\delta^\circ > 0$ такое, что при выборе дискретной схемы с шагом δ, где $0 < \delta \leqslant \delta^\circ$ и при любом поведении второго игрока реализуется плата игры $\gamma^{(\delta)}$, которая удовлетворяет неравенству

$$\gamma^{(\delta)} \leqslant \min_U \max_{v[t]} \max_{y[t]} \gamma + \alpha$$

Автор благодарит Н. Н. Красовского за постановку задачи и полезную критику полученных результатов, а А. И. Субботина за внимание к работе и ценные замечания.

Поступила 7 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого. Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 4.
3. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.