Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

О НЕПРЕРЫВНЫХ СТРАТЕГИЯХ УКЛОНЕНИЯ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ О ВСТРЕЧЕ ДВИЖЕНИЙ

Н. Н. Барабанова, А. И. Субботин

(Свердловск)

Исследуются соотношения между некоторыми типами множеств поглощения, определенными для игровой задачи о приведении конфликтно управляемого движения на заданное множество. Рассмотрение этих вопросов показало, что стратегии уклонения, вообще говоря, нельзя аппроксимировать непрерывными вектор-функциями позиции игры. Материал этой статьи примыкает к исследованиям [1-9].

1. Одним из методов исследования дифференциальных игр является подход, предложенный в работах [1, 2, 7]. В этих работах при построении оптимальных стратегий игроков вводится в рассмотрение вспомогательная экстремальная конструкция, основанная на понятии поглощения. При этом в зависимости от класса рассматриваемых задач понятие поглощения требуется определять различным образом. Ниже приводится предложенная Н. Н. Красовским классификация различных определений поглощения, рассмотрение которой позволяет более точно определить предмет исследования данной статьи.

Ограничимся рассмотрением линейной дифференциальной игры наведения. Пусть движение управляемой системы описывается уравнением

$$dx \,/\, dt = A\,(t)x + B\,(t)u - C\,(t)v \tag{1.1}$$

Здесь x — k-мерный фазовый вектор системы, u, v — векторные управления первого и второго игроков, $A\,(t)$, $B\,(t)$, $C\,(t)$ — непрерывные матрицы-функции соответствующих размерностей. Предполагается, что реализации управляющих воздействий игроков $u\,[t]$ и $v\,[t]$ стеснены ограничениями вида

$$u\,[t] \in P, \qquad v\,[t] \in Q \tag{1.2}$$

где P, Q — замкнутые, ограниченные и выпуклые множества в соответствующих векторных пространствах. В фазовом пространстве игры E_k задано некоторое выпуклое и замкнутое множество M, на которое стремится перевести точку $x\,[t]$ первый игрок; второй игрок, распоряжающийся управлением v, не заинтересован в осуществлении условия $x\,[t] \in M$. При этом обычно предполагается, что каждому из игроков неизвестно будущее поведение партнера, но известна реализовавшаяся в каждый текущий момент времени t позиция игры $p\,[t] = \{t,\ x\ [t]\}$.

Определим основные классы стратегий игроков, при помощи которых введем в рассмотрение некоторые типы множеств поглощения.

Первый класс стратегий составляют программные управления игроков, т. е. произвольные измеримые вектор-функции $u(t)$ и $v(t)$, удовлетворяющие ограничениям (1. 2). Совокупность программных управлений первого и второго игроков будем обозначать символами $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$.

Второй класс стратегий игроков составляют непрерывные вектор-функции $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$, при всех $\{t, x\}$ удовлетворяющие условиям $u(t, x) \in P$, $v(t, x) \in Q$. Множества таких вектор-функций обозначаются символами $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{V}_2$.

Рассмотрим еще один вспомогательный класс стратегий игроков. Пусть $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$ вектор-функции, удовлетворяющие следующим условиям: при каждом фиксированном x функции $u(t, x)$, $v(t, x)$ являются измеримыми по t; существует суммируемая на каждом конечном интервале функция $L(t)$ такая, что выполняются неравенства (условие Липшица)

$$\| u(t, x_1) - u(t, x_2) \| \leqslant L(t) \| x_1 - x_2 \|$$
$$\| v(t, x_1) - v(t, x_2) \| \leqslant L(t) \| x_1 - x_2 \|$$

при любых значениях $\{t, x\}$ имеют место включения

$$u(t, x) \in P, \qquad v(t, x) \in Q \tag{1.3}$$

Совокупности вектор-функций $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$, удовлетворяющих этим условиям, обозначаются символами $\mathbf{U}_2^*$, $\mathbf{V}_2^*$. Заметим, что в силу теоремы Каратеодори ([10], стр. 120) пара управлений $u(\cdot) \in \mathbf{U}_2^*$, $v(\cdot) \in \mathbf{V}_2^*$ порождает единственное движение системы (1.1).

Введем теперь понятие аппроксимационной стратегии. Пусть $U = U(t, x)$ — функция, которая вектору $p = \{t, x\}$ ставит в соответствие замкнутое множество $U(t, x)$, удовлетворяющее включению $U(t, x) \subset P$. Предполагается также, что функция $U = U(t, x)$ является полунепрерывной сверху относительно включения по переменной x. При помощи функции $U = U(t, x)$ можно задать следующий способ формирования управлений первого игрока, который будем называть аппроксимационной стратегией [7].

Пусть $\delta > 0$ — произвольное число (шаг аппроксимационной схемы); во множестве $U(t_0, x_0)$, которое функция $U = U(t, x)$ сопоставляет начальной позиции игры $p_0 = \{t_0, x_0\}$, выбирается произвольный вектор u_0, затем на полуинтервале $[t_0, t_0 + \delta)$ управление первого игрока полагается постоянным $u[t] = u_0 \in U(t_0, x_0)$, это постоянное управление первого игрока в паре с произвольной измеримой реализацией управления второго игрока осуществляет движение системы на промежутке времени $[t_0, t_0 + \delta)$. В момент времени $t = t_0 + \delta$ реализовавшейся позиции игры $p = \{t_0 + \delta, x[t_0 + \delta]\}$ ставится в соответствие множество $U(t_0 + \delta, x[t_0 + \delta])$, выбирается произвольное постоянное управление $u[t] = u_1 \in U(t_0 + \delta, x[t_0 + \delta])$, которое определяет движение на следующем интервале времени $[t_0 + \delta, t_0 + 2\delta)$ и т. д.

Аналогично вводится понятие аппроксимационной стратегии второго игрока. Совокупности аппроксимационных стратегий первого и второго игроков обозначим символами $\mathbf{U}_3$, $\mathbf{V}_3$ соответственно. Таким образом, множество $\mathbf{U}_3$ содержит всевозможные способы формирования кусочно-постоянных управлений первого игрока, которые задаются описанными выше функциями $U = U(t, x)$ и отвечают всевозможным значениям $\delta > 0$.

Используя введенные классы стратегий игроков, можно определить следующие типы множеств поглощения. Первое из этих множеств — множество программного поглощения $W_1(\tau, \vartheta)$ определяется как совокупность точек $w \in E_k$, для которых выполняется следующее условие: для любого программного управления второго игрока $v(\cdot) \in \mathbf{V}_1$ можно указать управление первого игрока $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$ такое, что пара управлений $u(t)$, $v(t)$ $(\tau \leqslant t \leqslant \vartheta)$ переведет систему (1.1) из положения $x(\tau) = w$ в состояние $x(\vartheta) \in M$.

Аналогично определяется множество $W_2^*(\tau, \vartheta)$ — совокупность точек w, удовлетворяющих условию: для любого управления второго игрока $v(\cdot) \in \mathbf{V}_2^*$ можно указать программное управление первого игрока $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$ такое, что пара управлений $u(t)$, $v(t, x)$ переведет систему (1.1) из положения $x(\tau) = w$ в состояние $x(\vartheta) \in M$.

При определении множеств поглощения $W_2(\tau, \vartheta)$ и $W_3(\tau, \vartheta)$ следует учитывать неединственность решений системы (1.1), порождаемых стратегиями из классов $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}_3$. В связи с этим множества $W_2(\tau, \vartheta)$ и $W_3(\tau, \vartheta)$ определяются следующим образом. Множество $W_3(\tau, \vartheta)$ $(W_2(\tau, \vartheta))$ есть совокупность точек $w \in E_k$, для которых выполняется следующее условие: для любой аппроксимационной стратегии второго игрока (для любой стратегии $v(\cdot) \in \mathbf{V}_2$) можно указать программное управление первого игрока $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$ такое, что среди решений системы (1.1), порожденных программным управлением первого игрока $u = u(t)$ и аппроксимационной стратегией второго игрока (стратегией $v(\cdot) \in \mathbf{V}_2$) существует решение $x[t]$, удовлетворяющее условиям $x[\tau] = w$, $x[\vartheta] \in M$.

Таким образом, множества $W_1(\tau, \vartheta)$, $W_2(\tau, \vartheta)$, $W_2^*(\tau, \vartheta)$, $W_3(\tau, \vartheta)$ являются совокупностями начальных состояний $x[\tau] = w$, исходя из которых второй игрок при выборе стратегии из классов $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_2^*$, $\mathbf{V}_3$ соответственно не может гарантировать уклонение от попадания на множество M в момент ϑ. Аналогично можно определить множества поглощения $S_1(\tau, \vartheta)$, $S_2(\tau, \vartheta)$, $S_2^*(\tau, \vartheta)$ и $S_3(\tau, \vartheta)$, состоящие из всех начальных позиций $x[\tau] = w$, исходя из которых второй игрок не может гарантировать уклонение от попадания на M при всех $t \in [\tau, \vartheta]$, выбирая любую стратегию из соответствующего класса.

Охарактеризуем кратко некоторые из построенных множеств поглощения. Известно, что система множеств $W_3(\tau, \vartheta)$ $(t_0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$ является сильно u — стабильной, а система множеств $S_3(\tau, \vartheta)$ $(t_0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$ u — стабильна [7]. Поэтому при выполнении условия $x_0 \in W_3(t_0, \vartheta)$ (или $x_0 \in S_3(t_0, \vartheta)$) экстремальная к системе $W_3(\tau, \vartheta)$ $(S_3(\tau, \vartheta))$ аппроксимационная стратегия первого игрока гарантирует сближение системы (1.1) с множеством M не позже, чем к моменту ϑ, причем включение $x_0 \in S_3(t_0, \vartheta)$ — необходимое и достаточное условие, при котором игру наведения можно закончить к моменту ϑ в [7]. Таким образом, решение рассматриваемой дифференциальной игры сводится к построению множества поглощения $S_3(\tau, \vartheta)$ или $W_3(\tau, \vartheta)$. (Отметим, что множество $W_3(\tau, \vartheta)$ с точностью до неособого линейного преобразования совпадает с построенным работе [8] альтернированным интегралом.)

Однако эффективное построение этих множеств является, вообще говоря, весьма трудной задачей, поэтому представляет интерес выявление условий, при которых множества $W_3(\tau, \vartheta)$ или $S_3(\tau, \vartheta)$ совпадают, например, с множеством $W_1(\tau, \vartheta)$; построение этого множества гораздо более простая задача. Исследованию этих вопросов были посвящены работы [8,9]. Рассмотрение различных множеств поглощения и изучение соотношений между ними позволяет также выявить некоторые вопросы структуры дифференциальных игр. Например, используя равенство $W_1(\tau, \vartheta) = W_2(\tau, \vartheta) = W_2^*(\tau, \vartheta)$, которое будет доказано в данной работе, можно показать, что стратегии уклонения, вообще говоря, нельзя аппроксимировать непрерывными вектор-функциями позиции игры, т. е. стратегиями из класса $\mathbf{V}_2$ или $\mathbf{V}_2^*$. Пример, иллюстрирующий это обстоятельство, приведен в конце статьи.

2. Рассмотрим множества $W_1(\tau, \vartheta)$, $W_2(\tau, \vartheta)$ и $W_2^*(\tau, \vartheta)$. Утверждается, что эти множества совпадают. Это означает следующее. Если некоторая позиция $\{\tau, w\}$ такова, что для любого программного управления $v(\cdot) \in \mathbf{V}_1$ можно указать программное управление $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$, переводящее систему (1.1) в момент ϑ на M, то второй игрок не может гарантировать себе уклонение от попадания на множество M в момент ϑ, если он будет выбирать управления из класса $\mathbf{V}_2$ или из класса $\mathbf{V}_2^*$. С другой стороны, если позиция $\{\tau, w\}$ такова, что, например, в классе $\mathbf{V}_2$ есть некоторая стратегия $v(t, x)$, гарантирующая второму игроку уклонение от попадания системы (1.1) на M в момент ϑ, тогда в классах управлений $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2^*$ также существуют стратегии второго игрока, гарантирующие ему уклонение от попадания на M в момент ϑ при любом выборе управления первым игроком.

Итак, докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. Множества $W_1(\tau, \vartheta)$, $W_2(\tau, \vartheta)$ и $W_2^*(\tau, \vartheta)$ совпадают, т. е.

$$W_1(\tau, \vartheta) = W_2(\tau, \vartheta) = W_2^*(\tau, \vartheta) \quad (-\infty < \tau \leqslant \vartheta < \infty) \tag{2.1}$$

Доказательство. Сначала докажем равенство

$$W_1(\tau, \vartheta) = W_2^*(\tau, \vartheta) \tag{2.2}$$

Включение $W_2^*(\tau, \vartheta) \subset W_1(\tau, \vartheta)$ очевидно (поскольку множество управлений $\mathbf{V}_2^*$ содержит множество управлений $\mathbf{V}_1$). Остается показать, что имеет место включение $W_2^*(\tau, \vartheta) \supset W_1(\tau, \vartheta)$. Предположим противное. Пусть существуют τ и ϑ $(\vartheta \geqslant \tau)$ такие, что

$$W_2^*(\tau, \vartheta) \not\supset W_1(\tau, \vartheta) \tag{2.3}$$

т. е. существует точка w_*, для которой одновременно выполняются следующие соотношения:

$$w_* \in W_1(\tau, \vartheta), \qquad w_* \notin W_2^*(\tau, \vartheta) \tag{2.4}$$

Второе из условий (2.4) означает следующее: существует функция $v^*(\cdot) \in \mathbf{V}_2^*$ такая, что для любого программного управления $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$ решение $x(t)$ $(x[\tau] = w_*,\ \tau \leqslant t \leqslant \vartheta)$, порожденное парой управлений $u = u[t]$, $v = v^*(t, x)$, удовлетворяет условию $x[\vartheta] \notin M$. (Еще раз отметим, что здесь в силу теоремы Каратеодори [10] будет иметь место единственность движения системы (1.1).)

Будем рассматривать множества $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{U}_1$ как некоторые множества в пространстве $L_2[\tau, \vartheta]$. Заметим, что эти множества выпуклы, ограничены и слабо компактны в $L_2[\tau, \vartheta]$.

Построим теперь следующее отображение множества $\mathbf{U}_1$ в себя: каждому элементу $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$ будем ставить в соответствие некоторое множество $\Phi_u \subset \mathbf{U}_1$ (элементами множества Φ_u являются некоторые программные управления $\varphi(\cdot) \in \mathbf{U}_1$). Заметим, что все программные управления здесь рассматриваются на интервале $[\tau, \vartheta]$. Множество Φ_u определяется следующим образом.

Пусть $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$ — произвольный элемент из совокупности программных управлений первого игрока. Обозначим через $x_u[t]$ $(\tau \leqslant t \leqslant \vartheta)$ движение системы (1.1) из начального состояния $x_u[\tau] = w_*$, порожденное этим программным управлением $u = u(t)$ и управлением второго игрока $v = v^*(t, x)$. Реализацию управления второго игрока $v = v^*(t, x)$, вычисленную вдоль движения $x = x_u[t]$, обозначим через $v_u^*[t]$, т. е. $v_u^*[t] = v^*(t, x_u[t])$ $(\tau \leqslant t \leqslant \vartheta)$. Нетрудно проверить, что $v_u^*[\cdot] \in \mathbf{V}_1$. Множество Φ_u определим теперь как совокупность всех программных управлений первого игрока $\varphi(\cdot) \in \mathbf{U}_1$, которые в паре с программным управлением $v = v_u^*[t]$ осуществляют перевод системы (1.1) из состояния $x[\tau] = w_*$ в положение $x[\vartheta] \in M$. Заметим, что поскольку точка $w_* \in W_1(\tau, \vartheta)$ (см. (2.4)), то множество Φ_u непусто при любом $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$.

Из построения множества Φ_u и из свойств управления $v = v^*(t, x)$ вытекает, что при любом $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$ должно выполняться условие

$$u(\cdot) \notin \Phi_u \tag{2.5}$$

Таким образом, чтобы придти к противоречию с условиями (2.4), достаточно доказать существование управления $u^\circ(\cdot) \in \mathbf{U}_1$, для которого имеет место условие

$$u^\circ(\cdot) \in \Phi_u^\circ \tag{2.6}$$

Можно показать, что существует управление $u^\circ(\cdot) \in \mathbf{U}_1$, удовлетворяющее условию (2.6), а тем самым будет доказано равенство (2.2).

Чтобы показать существование такого управления $u^\circ(\cdot)$, воспользуемся теоремой Боненбласта и Карлина о неподвижной точке ([11] стр. 496).

Проверим выполнение условий этой теоремы. Напомним прежде всего, что управления $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$ рассматриваются как элементы пространства $L_2[\tau, \vartheta]$, а множество $\mathbf{U}_1$ является выпуклым слабо компактным в $L_2[\tau, \vartheta]$ и ограниченным. Покажем, что при любом $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$ множество Φ_u является выпуклым. Пусть $\varphi_1(\cdot) \in \Phi_u$, $\varphi_2(\cdot) \in \Phi_u$, тогда управление $\varphi_\lambda(t) = \lambda\varphi_1(t) + (1 - \lambda)\varphi_2(t)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ также принадлежит множеству Φ_u, т. е. пара управлений $\varphi_\lambda(t)$, $v_u^*[t]$ $(\tau \leqslant t \leqslant \vartheta)$ переводит систему (1.1) из $x[\tau] = w_*$ на M в момент ϑ. Действительно, чтобы убедиться в этом, достаточно записать формулу Коши

$$x_i[\vartheta] = X(\vartheta, \tau) w_* + \int_\tau^\vartheta X(\vartheta, t) B(t) \varphi_i(t)\, dt - \int_\tau^\vartheta X(\vartheta, t) C(t) v_u^*[t]\, dt, \quad i=1, 2$$

где $X(t, \tau)$ — фундаментальная матрица однородной системы

$$dx/dt = A(t)x$$

Учитывая, что M выпукло, а $x_i[\vartheta] \in M$, будем иметь следующее включение $x_\lambda[\vartheta] = \lambda x_1[\vartheta] + (1-\lambda)x_2[\vartheta] \in M$, т. е. управление $\varphi_\lambda(t)$ также принадлежит множеству Φ_u.

Проверим теперь выполнение следующего условия: если последовательность $u_n(\cdot)\in U_1$ слабо сходится к $u^*(\cdot)$ и последовательность $\varphi_n(\cdot)$ слабо сходится к $\varphi^*(\cdot)$, причем $\varphi_n(\cdot)\in\Phi_{u_n}$, $n = 1, 2,\ldots$, тогда $\varphi^*(\cdot)\in\Phi_{u^*}$. (Условие полунепрерывности.)

При доказательстве полунепрерывности будем обозначать для простоты множество Φ_{u_n} через Φ_n, а вместо $v^*_{u_n}[\cdot]$, $x_{u_n}[\cdot]$ будем писать просто $v_n^*[\cdot]$, $x_n[\cdot]$.

Заметим сначала, что $x_n[\cdot]$ является последовательностью равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций, поэтому по теореме Арцела ([12], стр. 236) можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $x_{n_i}[\cdot]$, $\lim_{i\to\infty} x_{n_i}[\cdot] = x^*[\cdot]$, причем, очевидно, $x^*[\tau] = w_*$. В силу непрерывности вектор-функции $v^*(t, x)$ по x и в силу равномерной сходимости подпоследовательности $x_{n_i}[\cdot]$ к $x^*[\cdot]$ реализации управления $v^*(t, x)$, вычисленные вдоль траекторий $x_{n_i}[\cdot]$, сходятся к $v^*(t, x^*[t])$ в каждой точке $t \in [\tau, \vartheta]$.

Запишем теперь движения $x_{n_i}[\cdot]$ в виде

$$x_{n_i}[t] = \int_\tau^t A(\xi) x_{n_i}[\xi]\, d\xi + \int_\tau^t B(\xi) u_{n_i}(\xi)\, d\xi - \int_\tau^t C(\xi) v^*(\xi, x_{n_i}[\xi])\, d\xi + w_* \tag{2.7}$$

В этом равенстве можно перейти к пределу при фиксированном $t\in[\tau, \vartheta]$ и при $i \to \infty$. Слева получим $x^*[t]$. Два первых слагаемых в правой части (2.7) имеют предел в силу равномерной сходимости $x_{n_i}[\cdot]$ к $x^*[\cdot]$ и в силу слабой сходимости $u_{n_i}(\cdot)$ к $u^*[\cdot]$. Тогда имеет предел и третье слагаемое справа, причем по условию (1.3) $v^*(\xi, x) \in Q$ и $v^*_{n_i}[\xi[$ сходятся к $v^*(\xi, x^*[\xi])$ в каждой точке $\xi\in[\tau, \vartheta]$, поэтому возможен предельный переход под знаком интеграла в третьем слагаемом. В результате получим

$$x^*[t] = \int_\tau^t (A(\xi) x^*[\xi] + B(\xi) u^*(\xi) - C(\xi) v^*(\xi, x^*[\xi]))\, d\xi + w_*$$

Подынтегральная функция суммируема на $[\tau, \vartheta]$, поэтому почти всюду на $[\tau, \vartheta]$ имеет место равенство

$$\frac{dx^*[t]}{dt} = A(t) x^*[t] + B(t) u^*(t) - C(t) v^*(t, x^*[t]) \tag{2.8}$$

$$x^*[\tau] = w_*$$

т. е. $x^*[t]$ является единственным (в силу теоремы Каратеодори) решением системы (1.1), отвечающим управлениям $u = u^*[t]$ и $v = v^*(t, x)$, при этом реализуется управление $v^*_{u^*}[t] = v^*(t, x^*[t])$. Покажем теперь, что $\varphi^*(\cdot)\in\Phi_{u^*}$. Условие $\varphi_{n_i}(\cdot)\in\Phi_{n_i}$ означает, что

$$X(\vartheta, \tau) w_* + \int_\tau^\vartheta X(\vartheta, \xi) B(\xi) \varphi_{n_i}(\xi)\, d\xi - \int_\tau^\vartheta X(\vartheta, \xi) C(\xi) v^*_{n_i}[\xi]\, d\xi = y_{n_i} \in M \tag{2.9}$$

Последовательность y_{n_i} при $i \to \infty$ сходится к некоторой точке y_*, которая в силу замкнутости множества M принадлежит этому множеству, поэтому, переходя в равенстве (2.9) к пределу, получим

$$X(\vartheta, \tau)\, w_* + \int_\tau^\vartheta X(\vartheta, \xi)\, B(\xi)\, \varphi^*(\xi)\, d\xi - \int_\tau^\vartheta X(\vartheta, \xi)\, C(\xi)\, v_{u^*}^*[\xi]\, d\xi = y_* \in M \qquad (2.10)$$

(Возможность предельного перехода в первом интеграле есть следствие слабой сходимости последовательности $\varphi_n(\cdot)$, предельный переход во втором интеграле здесь можно обосновать так же, как и выше в (2.7).) Соотношение (2.10) означает, что управление $\varphi^*(\cdot)$ в паре с управлением $v_{u^*}^*[\cdot]$ осуществляет перевод системы (1.1) из положения $x[\tau] = w_*$ в состояние $x[\vartheta] \in M$, следовательно, $\varphi^*(\cdot) \in \Phi_{u^*}$. Условие полунепрерывности доказано.

Последнее условие теоремы о неподвижной точке ([11], стр. 496) вытекает из слабой компактности множества $\mathbf{U}_1$ и его ограниченности в $L_2\,[\tau, \vartheta]$. Таким образом, все условия теоремы о неподвижной точке выполнены, следовательно, равенство (2.2) доказано.

Отметим основные моменты, используемые при доказательстве совпадения множества $W_2(\tau, \vartheta)$ с множествами $W_1(\tau, \vartheta)$ и $W_2^*(\tau, \vartheta)$. Пусть $v(t, x)$ — произвольное управление из совокупности $\mathbf{V}_2$. Известно, что всякую непрерывную вектор-функцию $v = v(t, x)$ можно представить как предел некоторых вектор-функций $v = v_n(t, x)$, каждая из которых принадлежит классу $\mathbf{V}_2^*$, причем сходимость $v_n(t, x)$ к $v(t, x)$ равномерная на любом ограниченном множестве $D \subset E_{k+1}$. Используя это обстоятельство, можно доказать, что в случае, когда $x[\tau] = w_* \in W_1(\tau, \vartheta) = W_2^*(\tau, \vartheta)$ среди решений, порожденных управлением $v = v(t, x)$ и некоторым управленим $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$, существует решение, удовлетворяющее условиям $x[\tau] = w_*$, $x[\vartheta] \in M$, т. е. $w_* \in W_2(\tau, \vartheta)$ и, следовательно, $W_2(\tau, \vartheta) \supset W_1(\tau, \vartheta) = W_2^*(\tau, \vartheta)$. Включение $W_2(\tau, \vartheta) \subset W_1(\tau, \vartheta)$ вытекает из возможности аппроксимации измеримых программных управлений $v(\cdot) \in \mathbf{V}_1$ непрерывными программными управлениями. Таким образом, можно установить справедливость равенства $W_1(\tau, \vartheta) = W_2(\tau, \vartheta) = W_2^*(\tau, \vartheta)$ и теоремы 2.1.

3. В заключение приведем один пример игровой задачи преследования, в котором стратегию уклонения от встречи нельзя аппроксимировать стратегиями из классов $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}_2^*$. Пусть движение системы описывается уравнениями

$$dy/dt = z - v, \qquad dz/dt = u \qquad (3.1)$$

Здесь y, z — векторы евклидова пространства E_2, управления игроков u и v стеснены ограничениями $\|u\| \leqslant \mu$, $\|v\| \leqslant \nu$, где $\mu > 0$, $\nu > 0$ — некоторые постоянные числа; множество M является гиперплоскостью $y = 0$. Заметим, что уравнениями 3.1) описывается процесс преследования безынерционной точки $m^{(2)}$ материальной точкой единичной массы $m^{(1)}$, управляемой силой u, компонентами вектора y являются разности соответствующих координат точек $m^{(1)}$ и $m^{(2)}$, вектор z — скорость материальной точки $m^{(1)}$. Известно, что в этой задаче существует стратегия уклонения от встречи, т. е. можно указать некоторый способ формирования управления v, который позволяет второму игроку избежать встречи с точкой $m^{(1)}$.

В работе [6] доказано существование такой стратегии уклонения в классе тех управлений второго игрока, при формировании которых допускается использование информации о выборе управления первого игрока $u[t]$ в каждый текущий момент времени $t \geqslant t_0$.

Можно показать, что в данном примере уклонение от встречи на сколь угодно большом промежутке времени гарантирует аппроксимационная стратегия, которая задается функцией $V = V_*(t, y, z)$. Эта функция $V = V_*(t, y, z)$ позиции $p = \{t, y, z\}$ ставит в соответствие множество векторов v_*, удовлетворяющих условиям:

$$(y, v_*) \leqslant 0, \ (z, v_*) = 0, \quad \|v_*\| = \nu \qquad (3.2)$$

Здесь символ (y, v) — скалярное произведение векторов y и v. Таким образом, v_* является вектором, ортогональным вектору z, причем проекция вектора v_* на вектор y неположительн". Отметим следующее обстоятельство. Функция $V = V_*(t, y, z)$ не является однозначной непрерывной функцией позиции $p = \{t, y, z\}$; в случае, когда векторы y и z неколлинеарны, $V_*(t, y, z)$ состоит из единственного вектора v_*, если же y и z коллинеарны, то при $y \neq 0$ множество $V_*(t, y, z)$ содержит два вектора, при $z = 0$ множество $V_*(t, y, z)$ составляют всевозможные векторы v_*, $\| v_* \| = \nu$, $(y, v_*) \leqslant 0$.

Итак, в рассматриваемом примере существует некоторый способ формирования управления второго игрока, гарантирующий ему уклонение от встречи с преследующим объектом. Покажем, что второй игрок не может избежать встречи при выборе любой стратегии из класса $\mathbf{V}_2$ или $\mathbf{V}_2^*$. Действительно, нетрудно проверить, что в рассматриваемом примере для любой начальной позиции игры $p_0 = \{t_0, x_0\} = \{t_0, y_0, z_0\}$ существует такое значение параметра $\vartheta^\circ < \infty$, когда имеет место включение

$$x_0 \in W_1(t_0, \vartheta^\circ) \tag{3.3}$$

Но тогда, в силу теоремы 2.1, справедливы также и следующие включения:

$$x_0 \in W_2(t_0, \vartheta^\circ), \qquad x_0 \in W_2^*(t_0, \vartheta^\circ) \tag{3.4}$$

которые по определению множеств поглощения $W_2(\tau, \vartheta)$ и $W_2^*(\tau, \vartheta)$ означают, что преследуемый игрок не сможет избежать встречи при выборе любой стратегии $v(\cdot) \in \mathbf{V}_2$ или $v(\cdot) \in \mathbf{V}_2^*$. Причем встреча осуществляется не позже, чем к моменту программного поглощения $t = \vartheta^\circ$. Можно также показать с помощью рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 2.1, что отмеченное обстоятельство сохраняется при выборе вторым игроком любого управления $v[t] = v(t, x[t], u[t])$, где $v(t, x, u)$ — некоторая непрерывная вектор-функция.

Таким образом, оптимальные или близкие к оптимальным стратегии второго игрока нельзя искать в классе непрерывных вектор-функций позиции игры. Заметим, однако, что в некоторых случаях решение задачи об уклонении удается аппроксимировать при помощи непрерывных стратегий $v(t, x)$. К таким игровым задачам относятся, в частности, те дифференциальные игры, для которых выполнены условия, сформулированные в работе [5].

Авторы благодарят Н. Н. Красовского за внимание к работе и ценные советы.

Поступила 5 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Об одной задаче преследования. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
2. Красовский Н. Н., Репин Ю. М., Третьяков В. Е. О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 4.
3. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры, 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
4. Пшеничный Б. Н. Структура дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Об оптимальных стратегиях в линейной дифференциальной игре. ПММ, 1969, т. 33, № 4.
6. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого. Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 4.
7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. О структуре дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 3.
8. Красовский Н. Н. К теории дифференциальных игр. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
9. Красовский Н. Н. К задаче о преследовании. Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 2.
10. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 2, М., Изд-во иностр. лит., 1954.
11. Бесконечные антагонистические игры. М., Физматгиз, 1963.
12. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.