Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАИМЕНЬШЕГО ЧИСЛА УПРАВЛЕНИЙ, СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Л. К. Лилов

(София)

Рассматривается задача об определении наименьшего числа управляющих воздействий, стабилизирующих движение управляемого объекта. Для линейных систем с постоянными коэффициентами найдено необходимое и достаточное условие стабилизируемости нулевого решения минимальным по размерности управлением. Критерий достаточности распространяется на нелинейные системы. Рассмотрен пример.

1. Постановка задачи. Рассмотрим объект, состояние которого описывается фазовым вектором $x(t) = \{x_i(t)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, а движение подчиняется дифференциальной системе

$$dx / dt = f(x), \qquad f(0) \equiv 0$$

где f — заданный n-мерный вектор-функция.

Допустим, что объектом можно управлять воздействием $u = \{u_j\}$ $(j = 1, \ldots, r)$, где r — некоторое число, и что функцию управления можно менять. Пусть управляющие воздействия u_j связаны с координатами x_i векторным дифференциальным уравнением

$$dx / dt = f(x) + \varphi(x, u), \qquad \varphi(x, 0) \equiv 0 \tag{1.1}$$

где φ — некоторый n-мерный вектор-функция.

Задача состоит в определении наименьшего числа управляющих воздействий, при помощи которых можно стабилизировать нулевое решение системы (1.1) при подходящем выборе φ. Если r — это число и φ_0 — соответствующая функция, то существует r-мерное управление u, стабилизирующее решение $x \equiv 0$ системы (1.1) при $\varphi = \varphi_0$, и нельзя найти функцию φ, при которой возможна стабилизация решения $x \equiv 0$ системы (1.1) $(r - 1)$-мерным управлением.

2. Решение задачи в линейном приближении. Линейное приближение для уравнения (1.1) имеет вид

$$dx / dt = Ax + Bu \tag{2.1}$$

Матрица A определяет в n-мерном линейном пространстве $R \equiv \{x_1, \ldots, x_n\}$ линейный оператор **A**. Известна следующая теорема [1].

Пространство R всегда можно расщепить на циклические относительно данного линейного оператора A подпространства $I_1, \ldots, I_t$ с минимальными многочленами $\psi_1(\lambda), \ldots, \psi_t(\lambda)$

$$R = I_1 + \ldots + I_t$$

так, чтобы $\psi_1(\lambda)$ совпадало с минимальным многочленом $\psi(\lambda)$ всего пространства и каждое $\psi_i(\lambda)$ было бы делителем $\psi_{i-1}(\lambda)$ $(i = 2, 3, \ldots, t)$.

При этом, если через $i_1(\lambda), \ldots, i_n(\lambda)$ обозначим инвариантные многочлены матрицы A, оказывается, что

$$\psi_1(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)} = i_1(\lambda), \qquad \psi_2(\lambda) = \frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)} = i_2(\lambda), \ldots$$

$$\psi_t(\lambda) = \frac{D_{n-t+1}(\lambda)}{D_{n-t}(\lambda)} = i_t(\lambda), \qquad i_{t+1}(\lambda) = \ldots = i_n(\lambda) = 1$$

Здесь через $D_i(\lambda)$ обозначен наибольший общий делитель всех миноров i-го порядка характеристической матрицы $A_\lambda = A - \lambda E$, где E — единичная матрица $(i = 1, \ldots, n)$.

Допустим теперь, что у некоторого $D_{n-r}(\lambda)$ все корни имеют отрицательные вещественные части. Покажем, что в этом случае система (2.1) может быть стабилизирована r-мерным управлением при подходящем выборе матрицы B.

Пусть b_i — порождающий вектор циклического подпространства I_i. Тогда векторы $b_i, Ab_i, \ldots, A^{m_i-1}b_i$, где m_i — степень $\psi_i(\lambda)$, линейно независимы и образуют базис I_i $(i = 1, \ldots, t)$. В качестве матрицы B возьмем матрицу

$$B = \| b_1, b_2, \ldots, b_r \| \tag{2.2}$$

и рассмотрим матрицу

$$P = \| b_1, Ab_1, \ldots, A^{m_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \ldots, A^{m_2-1}b_2, \ldots, b_r, \ldots, A^{m_r-1}b_r, p^{(\sigma+1)}, \ldots, p^{(n)} \|$$

$$\sigma = m_1 + \ldots + m_r \tag{2.3}$$

Векторы $p^{(\sigma+1)}, \ldots, p^n$ такие, что $\det P \neq 0$. Векторы p всегда можно подобрать нужным образом, причем бесчисленным множеством способов, поскольку векторы $b_1, Ab_1, \ldots, A^{m_r-1}b_r$ линейно независимы. Сделаем преобразование координат $x = Py$. В новых координатах система (2.1) запишется в виде

$$\dot{y} = P^{-1}APy + P^{-1}Bu \tag{2.4}$$

Матрица $P^{-1}AP$ является матрицей оператора A в новом базисе $b_1, \ldots$ $\ldots, A^{m_1-1}b_1, \ldots, A^{m_r-1}b_r, p^{(\sigma+1)}, \ldots, p^{(n)}$. Обозначим через g_k k-й вектор этого базиса. Тогда k-й столбец матрицы $P^{-1}AP$ заполняется координатами вектора Ag_k. Но при $k \leqslant m_1$ $Ag_k \in I_1$, так как I_1 — инвариантное подпространство и, следовательно, последние $n - m_1$ координаты равны нулю. Аналогично при $m_1 < k \leqslant m_1 + m_2$ первые m_1 и последние $n - (m_1 + m_2)$ координаты Ag_k равны нулю и т. д. Следовательно, матрица $P^{-1}AP$ имеет вид

$$P^{-1}AP = \begin{Vmatrix} L_0 & L_1 \\ 0 & L_2 \end{Vmatrix}, \qquad L_0 = \begin{Vmatrix} P_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & P_r \end{Vmatrix} \tag{2.5}$$

и характеристические многочлены матриц $P_1, \ldots, P_r$ суть $\psi_1(\lambda), \ldots, \psi_r(\lambda)$, так как для циклических подпространств характеристический многочлен оператора $\mathbf{A}$ совпадает с минимальным многочленом подпространства относительно этого оператора. Матрица

$$P^{-1}B = \|c_{ij}\| \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, r)$$

состоит из нулей и единиц, что очевидно из соотношения $P^{-1}P = E$. Укажем неравные нулю элементы c_{ij}

$$c_{11} = 1, \quad c_{m_1+1,2} = 1, \quad c_{m_1+m_2+1,3} = 1, \ldots, c_{m_1+\ldots+m_{r-1}+1,r} = 1 \tag{2.6}$$

Система (2.4) распадается на неуправляемую часть

$$dy^{(2)} / dt = L_2 y^{(2)}, \qquad y^{(2)*} = \|y_{\sigma+1}, \ldots, y_n\| \tag{2.7}$$

и управляемую, которая со своей стороны состоит из неоднородных систем

$$dy^{(j)} / dt = P_j y^{(j)} + u_j e_j + f^{(j)}(y^{(2)}) \quad (j = 1, \ldots, r) \tag{2.8}$$

$$y^{(j)*} = \|y_{m_1+\ldots m_{j-1}+1}, \ldots, y_{m_1+\ldots m_j}\|, \; e_j{}^* = \|1, 0, \ldots, 0\|$$

Здесь $f^{(j)}(y^{(2)})$ — вектор-функция размерности m_j, координаты которого — линейные формы от координат вектора $y^{(2)}$; звездочка означает транспонирование.

Матрица P_j отвечает оператору $\mathbf{A}$ в I_j при базисе $b_j, Ab_j, \ldots, A^{m_j-1}b_j$ $(j = 1, \ldots, r)$. Поэтому

$$\mathrm{P}_j = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_{m_j}^j \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_{m_j-1}^j \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_{m_j-2}^j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_1^j \end{Vmatrix} \tag{2.9}$$

Здесь $\alpha_1{}^j, \ldots, \alpha_{m_j}^j$ — коэффициенты минимального многочлена $\psi_j(\lambda)$ подпространства I_j

$$\psi_j(\lambda) = \lambda^{m_j} + \alpha_1{}^j \lambda^{m_j-1} + \cdots \alpha_{m_j}^j$$

Если положить

$$u_j = \mu_1^j y_{m_1+\cdots+m_{j-1}+1} + \cdots + \mu_{m_j}^j y_{m_1+\cdots+m_j}$$

то за счет подходящего выбора коэффициентов μ можно добиться, чтобы характеристический многочлен системы (2.8) имел любые наперед заданные корни с отрицательными вещественными частями.

Таким образом, любое решение исходной системы (2.1) может быть приведено в начале координат r-мерным управлением, только если для неуправляемой части системы (2.7) нулевое решение $y_{\sigma+1} = \ldots = y_n = 0$ асимптотически устойчиво. Для этого необходимо и достаточно, чтобы характеристические корни матрицы L_2 имели отрицательные вещественные части. Но

$$\det \| A - \lambda E \| = \psi_1(\lambda) \ldots \psi_r(\lambda) \det \| L_2 - \lambda E_{n-\sigma} \|$$

где $E_{n-\sigma}$ — единичная $(n - \sigma) \times (n - \sigma)$ матрица.

С другой стороны

$$\psi_1(\lambda) \ldots \psi_r(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{D_{n-r}(\lambda)} = \frac{\det \| A - \lambda E \|}{D_{n-r}(\lambda)}$$

Следовательно

$$\det \| L_2 - \lambda E_{n-\sigma} \| = D_{n-r}(\lambda) \qquad (2.10)$$

Таким образом, показано, что если у $D_{n-r}(\lambda)$ все корни имеют отрицательные вещественные части, то существует матрица B, при которой возможна асимптотическая стабилизация нулевого решения системы (2.1). Неявно предполагалось, что $r \leqslant t$, но если $r > t$, то поскольку $m_1 + \ldots + m_t = n$, согласно доказанному, можно для стабилизации нулевого решения использовать по крайней мере t-мерное управление, так как в этом случае матрица L_2 не существует.

Покажем теперь, что если у $D_{n-r+1}(\lambda)$ имеется хотя бы один корень с неотрицательной вещественной частью, то невозможна асимптотическая стабилизация p-мерным управлением ($p < r$) ни при каком выборе $n \times p$ матрицы B_p.

Допустим противное, что существуют векторы $b_1, \ldots, b_p$ такие, что нулевое решение системы

$$dx / dt = Ax + B_p u_p, \qquad B_p = \| b_1, \ldots, b_p \| \qquad (2.11)$$

стабилизируемо.

Векторы $b_1, \ldots, b_p$ можно считать линейно независимыми, в противном случае управление будет фактически k-мерным, где $k < p$. Рассмотрим подпространство, определяемое векторами (не обязательно линейно независимыми)

$$\begin{array}{l} b_1,\ Ab_1,\ \ldots,\ A^{n-1}b_1 \\ b_2,\ Ab_2,\ \ldots,\ A^{n-1}b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_p,\ Ab_p,\ \ldots,\ A^{n-1}b_p \end{array}$$

Это подпространство инвариантно по отношению к оператору **A**. Следовательно, его можно расщепить, согласно третьей теореме о расщеплении [1], на циклические инвариантные подпространства, нерасщепимые дальше, минимальные многочлены которых (они же и характеристические) совпадают с некоторыми из множителей в разложениях для $\psi_1(\lambda)$, ..., $\psi_t(\lambda)$

$$\begin{array}{l} \psi_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{c_1}(\lambda - \lambda_2)^{c_2}\ \ldots\ (\lambda - \lambda_s)^{c_s} \\ \psi_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1}(\lambda - \lambda_2)^{d_2}\ \ldots\ (\lambda - \lambda_s)^{d_s} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_t(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2}\ \ldots\ (\lambda - \lambda_s)^{l_s} \\ c_k \geqslant d_k \geqslant \ldots \geqslant l_k \qquad (k = 1,\ \ldots,\ s) \end{array}$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — различные корни уравнения $\det \| A - \lambda E \| = 0$.

Если в разложении инвариантного подпространства входят «ячейки» с минимальными многочленами, которые являются степенями взаимно простых одночленов, скажем $(\lambda - \lambda_1)^{d_1}$ и $(\lambda - \lambda_2)^{c_2}$, то инвариантное подпространство, являющееся прямой суммой этих ячеек, — циклическое. Действительно, если порождающие векторы ячеек являются e_1 и e_1, то в качестве базиса прямой суммы можно взять векторы

$$e_1,\ Ae_1,\ \ldots,\ A^{d_1-1}e_1,\ e_2,\ Ae_2,\ \ldots,\ A^{c_2-1}e_2$$

Матрица, отвечающая оператору **A**, в этом базисе имеет вид

$$K_0 = \begin{Vmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{Vmatrix}$$

где матрицы K_1 и K_2 такого же типа, как и матрица (2.9).

Элементарными преобразованиями приведем матрицу $\| K_0 - \lambda E_{d_1+c_2} \|$, где $E_{d_1+c_2}$ — единичная $(d_1 + c_2) \times (d_1 + c_2)$ матрица к эквивалентной матрице

$$\begin{Vmatrix} K_1^1 & 0 \\ 0 & K_2^1 \end{Vmatrix}$$

где

$$K_1^1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \end{Vmatrix}, \quad K_2^1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & (\lambda - \lambda_2)^{c_2} \end{Vmatrix}$$

Характеристический многочлен есть $(\lambda - \lambda_1)^{d_1}(\lambda - \lambda_2)^{c_2}$, а наибольший общий делитель миноров $(d_1 + c_2 - 1)$ порядка равняется, очевидно, единице, так как имеются миноры $(\lambda - \lambda_1)^{d_1}$ и $(\lambda - \lambda_2)^{c_2}$, которые взаимно просты. Следовательно, характеристический многочлен прямой суммы рассматриваемых ячеек совпадает с минимальным многочленом, т. е. эта прямая сумма есть циклическое подпространство, поскольку степень ее минимального многочлена совпадает с ее размерностью и требуемое доказано.

Если, однако, циклические ячейки имеют в качестве характеристических многочленов элементарные делители, отвечающие одному и тому же корню, то инвариантное подпространство, которое они образуют, не будет циклическим, т. е. оно порождается по крайней мере двумя векторами и их образцами при применении оператора A, которые линейно независимы с ними.

Действительно, пусть, например, взяли ячейки с характеристическими (и минимальными) многочленами $(\lambda - \lambda_1)^{c_1}$ и $(\lambda - \lambda_1)^{d_1}$ $(c_1 \geqslant d_1)$ и порождающими векторами a_1 и a_2 соответственно. Характеристический многочлен прямой суммы рассматриваемых циклических ячеек есть произведение $(\lambda-\lambda_1)^{c_1}$и $(\lambda-\lambda_1)^{d_1}$. Но, очевидно, что в качестве аннулирующего много члена для всего этого подпространства можно взять $(\lambda - \lambda_1)^{d_1}$, так как он будет аннулирующим для обеих ячеек. Однако степень его $c_1 < c_1 + d_1$, и, следовательно, подпространство не может быть циклическим, поскольку его минимальный многочлен, являясь делителем любого аннулирующего многочлена, имеет степень, меньшую, чем размерность подпространства.

Из доказанного выше следует, что какими бы ни были векторы $b_1, \ldots, b_p$ характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ инвариантного подпространства, определяемого ими и их образами $Ab_1, \ldots, A^{n-1} b_1, \ldots, A^{n-1} b_p$, не может содержать, больше чем p элементарных делителей, отвечающих одному и тому же корню, т. е. $\chi(\lambda)$ есть делитель многочлена $\psi_1(\lambda)\psi_2(\lambda)\ldots\psi_p(\lambda)$.

Пусть $f_1, \ldots, f_q$ — базисные векторы рассматриваемого инвариантного подпространства. Дополним их векторами $f_{q+1}, \ldots, f_n$ до базиса во всем пространстве и рассмотрим матрицу

$$\Phi = \| f_1, f_2, \ldots, f_q, \ldots, f_n \|$$

Сделаем преобразование координат $x = \Phi y$. Система (2.11) запишется в виде

$$dy/dt = \Phi^{-1}A\Phi y + \Phi^{-1}B_p u_p \tag{2.12}$$

Аналогично (2.5) матрица $\Phi^{-1}A\Phi$ имеет вид

$$\Phi^{-1}A\Phi = \begin{Vmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0 & \Phi_3 \end{Vmatrix}$$

и система (2.12) распадается на управляемую и неуправляемую части. Величина Φ_3 является матрицей неуправляемой части. Покажем, что ее характеристический многочлен делится на $D_{n-r+1}(\lambda)$ и, согласно сделанному выше для $D_{n-r+1}(\lambda)$ предположению, имеет хотя бы один корень с неотрицательной вещественной частью. Это будет означать, что неуправляемая часть системы не будет асимптотически устойчивой и тем самым будет доказано, что p-мерным управлением ($p < r$) нельзя добиться асимптотической стабилизации нулевого решения системы (2.1), если у $D_{n-r+1}(\lambda)$ имеется корень с неотрицательной вещественной частью.

В самом деле

$$\det \| A - \lambda E \| = \det \| \Phi^{-1} A \Phi - \lambda E \| = \psi_1(\lambda) \ldots \psi_p(\lambda) \ldots \psi_{r-1}(\lambda) \ldots$$
$$\ldots \psi_t(\lambda) = \chi(\lambda) \det \| \Phi_3 - \lambda E_{n-q} \|$$

где E_{n-q} — единичная $(n - q) \times (n - q)$ матрица. Но

$$\psi_1(\lambda) \ldots \psi_{r-1}(\lambda) \ldots \psi_t(\lambda) = \psi_1(\lambda) \ldots \psi_{r-1}(\lambda) D_{n-r+1}(\lambda)$$

Так как $\chi(\lambda)$ делит $\psi_1(\lambda) \ldots \psi_p(\lambda)$, как было показано выше, и $p < r$, то $\chi(\lambda)$ делит и $\psi_1(\lambda) \ldots \psi_{r-1}(\lambda)$, т. е.

$$\det \| \Phi_3 - \lambda E_{n-q} \| = D_{n-r+1}(\lambda)\, \theta(\lambda)$$

где $\theta(\lambda)$ — некоторый многочлен.

Из приведенных результатов следует утверждение.

Теорема 2.1. Чтобы нулевое решение системы (2.1) возможно было стабилизировать асимптотически r-мерным управлением при некотором выборе матрицы B и нельзя стабилизировать $(r - 1)$-мерным ни при каком выборе B, необходимо и достаточно, чтобы все корни наибольшего общего делителя $D_{n-r}(\lambda)$ миноров $(n - r)$ порядка матрицы $\| A - \lambda E \|$ имели отрицательные вещественные части, либо $D_{n-r}(\lambda) \equiv 1$, а $D_{n-r+1}(\lambda)$ имел корень с неотрицательной вещественной частью.

Теорема сформулирована для случая асимптотической устойчивости. Если рассматривается задача о стабилизации нулевого решения системы (2.1) только до устойчивости, нужно требовать, чтобы у $D_{n-r}(\lambda)$ все корни имели бы неположительные вещественные части, причем характеристические корни, имеющие нулевые вещественные части, допускают лишь простые элементарные делители, а $D_{n-r+1}(\lambda)$ имел бы корень с положительной вещественной частью, либо корень с нулевой вещественной частью и непростым элементарным делителем.

Доказанная теорема очевидным образом связана с работами [2-5]. В этих работах установлено, что если матрица B в (2.1) такова, что после преобразования $x = Py$ матрица L_2 неуправляемой части системы в новых переменных имеет корни с отрицательными вещественными частями, то возможна асимптотическая стабилизация нулевого решения (2.1) при подходящем выборе управления u. Теорема 2.1 устанавливает свойства матрицы A, которые необходимы и достаточны для существования минимальной по числу столбцов матрицы B, обладающей этим свойством.

3. Случай нелинейной системы. Предположим, что функция $f(x)$ в (1.1) имеет вид

$$f(x) = Ax + g(x) \tag{3.1}$$

где A — матрица $n \times n$, а $g(x)$ — n-мерный вектор-функция $\{g_i(x)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, причем $g_i(x)$ начинается с членов не ниже второго порядка.

Теорема 3.1. Чтобы нулевое решение системы (1.1) при (3.1) можно было стабилизировать до асимптотической устойчивости r-мерным воздействием, достаточно, чтобы у наибольшего общего делителя $D_{n-r}(\lambda)$ миноров $(n-r)$ порядка матрицы $\| A - \lambda E \|$ все корни имели отрицательные вещественные части, либо $D_{n-r}(\lambda) \equiv 1$.

Действительно, выберем матрицу B, как в (2.2), и сделаем преобразование переменных $x = Py$, где P — матрица, определенная в (2.3). Рассмотрим систему

$$dx/dt = Ax + g(x) + Bu \tag{3.2}$$

или в новых переменных

$$dy / dt = P^{-1}APy + P^{-1}g(Py) + P^{-1}Bu$$

где $P^{-1}AP$ и $P^{-1}B$ имеют вид (2.5), (2.6) соответственно.

Система (3.2) распадается на две части

$$\begin{aligned} dy^{(1)} / dt &= L_0 y^{(2)} + L_1 y^{(2)} + C_1 u + [P^{-1}g(Py)]^{(1)} \\ dy^{(2)} / dt &= L_2 y^{(2)} + [P^{-1}g(Py)]^{(2)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

где единица в степени относится к первым $(m_1 + \ldots + m_r)$ координатам, а цифра два — к последним $n - (m_1 + \ldots + m_r)$. Через C_1 обозначена матрица

$$(P^{-1}B)^* = \| C_1^*, 0 \|$$

Полагая $u = My^{(1)}$, где $M - r \times (m_1 + \ldots + m_r)$ матрица, можно, как указывалось выше, за счет подходящего выбора M добиться, чтобы у матрицы $(L_0 + C_1 M)$ были произвольные характеристические корни, в частности корни с отрицательными вещественными частями. Так как предполагалось, что у $D_{n-r}(\lambda)$ все корни имеют отрицательные вещественные части, то согласно (2.10) первое приближение (3.3) асимптотически устойчиво, а отсюда следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (3.2).

В дополнение к теореме 3.1 можно сказать, что если у $D_{n-r+1}(\lambda)$ имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то $(r - 1)$-мерным управлением стабилизация (не только асимптотическая) невозможна. Доказательство этого утверждения очевидно из рассуждений п. 2.

4. Пример. В качестве примера рассмотрим спутник на круговой орбите. Уравнения движения суть ([6], гл. 2)

$$\begin{aligned}
&J_1\dot{p}_1+(J_3-J_2)\,p_2p_3=3\omega^2\,(J_3-J_2)\,\alpha_{s2}\alpha_{s3} \quad (1.\ 2,\ 3)\\
&\dot{\alpha}_{i1}=\alpha_{i2}p_3-\alpha_{i3}p_2+\varepsilon_j\omega\alpha_{j1} \quad (1\ 2\ 3), \qquad (i=1,3)\\
&i+j=4, \qquad \varepsilon_j=\begin{cases}1 & (j=1)\\ -1 & (j=3)\end{cases} \qquad (s=3)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь J_1, J_2, J_3 — главные центральные моменты инерции, $\alpha_{ik}(i=1,3,\ k=1,2,3)$ — относительные направляющие косинусы, ω — угловая скорость движения центра масс по орбите. Символ (1 2 3) означает, что два других уравнения получаются циклической перестановкой.

Эти уравнения допускают частное решение

$$p_1=p_3=0,\ p_2=\omega;\ \alpha_{11}=\alpha_{33}=1,\ \alpha_{12}=\alpha_{13}=\alpha_{31}=\alpha_{32}=0 \tag{4.2}$$

Ставится задача найти минимальное число управлений, при помощи которых можно сделать решение (4.2) асимптотически устойчивым.

Приняв (4.2) в качестве невозмущенного движения и сохранив за возмущениями обозначения исходных переменных, запишем линейное приближение для уравнений возмущенного движения в виде

$$\begin{aligned}
&\dot{p}_1=h_{23}\omega p_3-3\omega^2h_{23}\alpha_{32}, && h_{23}=(J_2-J_3)\,/\,J_1\\
&\dot{p}_2=-3\omega^2h_{31}\alpha_{31}, && h_{31}=(J_3-J_1)\,/\,J_2\\
&\dot{p}_3=h_{12}\omega p_1, && h_{12}=(J_1-J_2)\,/\,J_3\\
&\dot{\alpha}_{31}=-p_2+\omega\alpha_{11}-\omega\alpha_{33}, && \dot{\alpha}_{11}=-\omega\alpha_{13}-\omega\alpha_{31}\\
&\dot{\alpha}_{32}=p_1+\omega\alpha_{12}, && \dot{\alpha}_{12}=-p_3-\omega\alpha_{32}\\
&\dot{\alpha}_{33}=\omega\alpha_{31}+\omega\alpha_{13}, && \dot{\alpha}_{13}=p_2+\omega\alpha_{11}-\omega\alpha_{33}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Последние шесть уравнений не будут независимыми; между α_{ik} существуют соотношения

$$(1+\alpha_{11})^2+\alpha^2_{12}+\alpha^2_{13}-1=0$$

$$(1+\alpha_{11})\,\alpha_{31}+\alpha_{12}\alpha_{32}+\alpha_{13}(1+\alpha_{33})=0$$

$$\alpha^2_{31}+\alpha^2_{32}+(1+\alpha_{33})^2-1=0$$

Из этих соотношений можно определить три из α_{ik} $(i=1,3,\ k=1,2,3)$ в функции от остальных. Например, если возмущения $|\alpha_{11}|$, $|\alpha_{33}|$, $|\alpha_{13}|$ не очень большие, то в качестве независимых переменных можно взять α_{12}, α_{31}, α_{32}.

Тогда α_{13}, α_{33}, α_{11} выразятся через них, и разложения начинаются с членов выше второго порядка малости. Таким образом, в качестве линейного приближения (4.1) можно взять уравнения

$$\begin{aligned}
&\dot{p}_1=h_{23}\omega p_3-3\omega^2h_{23}\alpha_{32}, \quad \dot{p}_2=-3\omega^2h_{31}\alpha_{31}, \quad \dot{p}_3=h_{12}\omega p_1\\
&\dot{\alpha}_{12}=-p_3-\omega\alpha_{32}, \quad \dot{\alpha}_{31}=-p_2, \quad \dot{\alpha}_{32}=p_1+\omega\alpha_{12}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Характеристическая матрица этой системы имеет вид

$$\left\|\begin{matrix}
-\lambda & 0 & h_{23}\omega & -3\omega^2h_{23} & 0 & 0\\
0 & -\lambda & 0 & 0 & -3\omega^2h_{31} & 0\\
h_{12} & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & \omega\\
0 & -1 & 0 & 0 & -\lambda & 0\\
0 & 0 & -1 & -\omega & 0 & -\lambda
\end{matrix}\right\| \tag{4.5}$$

Если предположить, что $h_{12} = h_{23} = 0$, то эта матрица эквивалентна диагональной матрице с элементами

$$a_{ij} = 0 \ (i \neq j), \qquad a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$$
$$a_{44} = a_{55} = \lambda, \qquad a_{66} = \lambda^4 + \omega^2\lambda^2$$

и в этом случае нулевое решение системы (4.4) стабилизируется до асимптотической устойчивости трехмерным управлением согласно теореме 3.1, так как $D_3 \equiv 1$.

Если $h_{12} = 0$, но $h_{23} \neq 0$ характеристическая матрица эквивалентна диагональной матрице

$$a_{ij} = 0 \ (i \neq j), \qquad a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = a_{55} = 1$$
$$a_{66} = \lambda^2(\lambda^2 - 3\omega^2 h_{31})(1 + \lambda^2 / \omega^2 - 3h_{31}\lambda^2)$$

и нулевое решение (4.4) стабилизируется только одним управлением, так как $D_5 = 1$.

Если $h_{12} \neq 0$ и

$$3h_{31}(3h_{31} + 3h_{23} + 1 - h_{12}h_{23}) - 4h_{12}h_{23} = 0 \qquad (4.6)$$

то характеристическая матрица приводится к диагональному виду

$$a_{ij} = 0 \ (i \neq j), \ a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 1, \ a_{55} = (\lambda^2 - 3\omega^2 h_{31})$$
$$a_{66} = (\lambda^2 - 3\omega^2 h_{31})[\lambda^2 + \omega^2(3h_{23} + 1 - h_{12}h_{23} + 4\omega^2 h_{12}h_{23})]$$

и для асимптотической стабилизации согласно теореме 3.1 и $D_4 = 1$ достаточно двумерное управление.

Наконец, в общем случае, когда $h_{12} \neq 0$ и соотношение (4.6) не выполняется, характеристическая матрица приводится к следующему каноническому виду:

$$a_{ij} = 0 \ (i \neq j), \ a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = a_{55} = 1$$
$$a_{66} = (\lambda^2 - 3\omega^2 h_{31})[\lambda^4 + \omega^2(3h_{23} + 1 - h_{12}h_{23})\lambda^2 - 4\omega^4 h_{12}h_{23}]$$

и, таким образом, в самом общем случае нулевое решение системы (4.4) стабилизируется асимптотически одним управлением, поскольку $D_5 = 1$.

Однако практически минимальное по размерности управление можно осуществить только в случае, когда у всех векторов b матрицы (2.2) последние три координаты равняются нулю, поскольку последние три уравнения (4.4) получаются из кинематических соотношений и не могут содержать управлений. Во всех рассмотренных выше случаях такой выбор векторов b возможен. Покажем это непосредственно.

Пусть, например, $h_{12} = h_{23} = 0$. Тогда матрица (4.5) имеет вид

$$A = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix} \right\|, \quad A_{21} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \right\|, \quad A_{22} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

В рассматриваемом случае стабилизирующее управление трехмерное, и матрица (2.2) имеет вид

$$B = \| b_1 \ b_2 \ b_3 \|$$

Обозначим через $b_i^{(1)}$, $b_i^{(2)}$

$$b_i^{(1)*} = \| b_{1i} \quad b_{2i} \quad b_{3i} \|, \qquad b_i^{(2)*} = \| b_{4i} \quad b_{5i} \quad b_{6i} \|$$

Матрица (2.3) при $b_i^{(2)} = 0$ имеет вид

$$P = \left\| \begin{matrix} b_i^{(1)} & 0 & 0 & 0 & b_2^{(1)} & b_3^{(1)} \\ 0 & A_{21}b_i^{(1)} & A_{22}A_{21}b_1^{(1)} & A_{22}^2 A_{21}b_1^{(1)} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

Так как характеристический многочлен матрицы $\| A_{22} - \lambda E \|$ совпадает с ее минимальным многочленом, то можно найти ненулевой вектор $c^{(1)}$ такой, что

$$\det \| c^{(1)} A_{22} c^{(1)}\ A_{22}^2\, c^{(1)} \| \neq 0$$

Полагая $A_{21} b_1^{(1)} = c^{(1)}$, $b_1^{(1)} = A_{21}^{-1} c^{(1)}$, очевидно, всегда можно подходящим выбором $b_2^{(1)}$ и $b_3^{(1)}$ добиться, чтобы $\det P \neq 0$. Таким образом, в рассматриваем случае действительно B имеет вид

$$B = \left\| \begin{matrix} b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & b_3^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

В случае $h_{12} = 0$, $h_{23} \neq 0$ матрица (2.3) при $b^{(2)} = 0$ имеет вид (отмечены только ненулевые элементы)

$$p_{11} = l_1,\ p_{12} = h_{23}\omega l_3,\ p_{13} = -3h_{23}\omega^2 l_1,\ p_{14} - 3h_{23}\omega^3(1 - h_{23})\, l_3$$
$$p_{15} = 3h_{23}\omega^4(3h_{23} + 1)\, l_1,\quad p_{16} = 3h_{23}\omega^5(3h_{23} + 1)\,(1 - h_{23})\, l_3,\quad p_{21} = l_2$$
$$p_{23} = -3h_{23}\omega^2 l_2,\quad p_{25} = 9h_{23}^2\omega^4 l_2,\ p_{31} = l_3,$$
$$p_{42} = l_1,\ \ p_{43} = \omega(h_{23} - 1)\, l_3,\ \ p_{44} = -\omega^2(3h_{23} + 1)\, l_1,\ p_{45} = \omega^3\,(3h_{23} + 1)(1 - h_{23})\, l_3$$
$$p_{46} = \omega^4(3h_{23} + 1)^2\, l_1,\, p_{52} = -l_2,\, p_{54} = 3h_{23}\omega^2 l_2,\quad p_{56} = -9h_{23}^2\,\omega^4 l_2$$
$$p_{62} = -l_3,\ p_{63} = -\omega l_1,\ p_{64} = \omega^2(1 - h_{23})\, l_3,\quad p_{65} = \omega^3(3h_{23} + 1)\, l_1$$
$$p_{66} = \omega^5(3h_{23} + 1)(1 - h_{23})\, l_3$$
$$\det P = \pm 36\, h_{23}^2\omega^{12} l_2^2 l_3^2 [h_{23}(h_{23} - 1)^2 l_3^2 + (h_{23} + 3h_{23}^2) l_1^2]$$

Очевидно, что подходящим выбором l_1, l_2, l_3 всегда можно добиться $\det P \neq 0$. Аналогично проверяются и все остальные случаи. Оказывается, что всегда минимальное по размерности управление можно найти в нужном для практической реализации виде.

Автор благодарит В. В. Румянцева за постановку задачи, советы и постоянное внимание к работе.

Поступила 27 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
2. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. I конгр. ИФАК, М., Изд-во АН СССР, т. 2, Теория дискретных оптимальных самонастраивающихся систем, 1961.
3. Кириллова Ф. М. К задаче об аналитическом конструировании регуляторов. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
4. Курцвейль Я. К аналитическому конструированию регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 6.
5. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
6. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.