О СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ КРИТЕРИЕМ РАЗРУШЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ МОДЕЛИРОВАНИЕМ ЯВЛЕНИЙ ДЕФОРМАЦИИ В КОНЦЕ РАЗРЕЗОВ-ТРЕЩИН

Е. М. Морозов

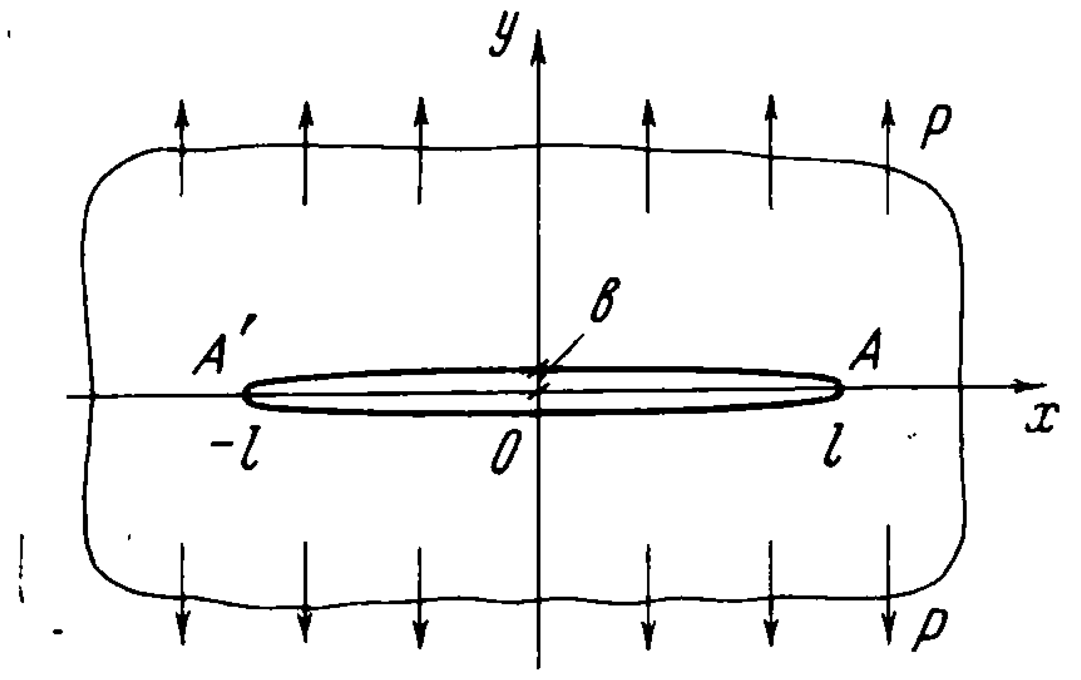
(Москва)

В последние годы был дан подробный анализ и произошло полное прояснение смысла многих опубликованных работ по теории трещин.

Исследование явлений распространения трещин в хрупких телах связано с комбинацией, с одной стороны, методов и постановок классической теории упругости и, с другой стороны, учетом некоторых особых физических эффектов, связанных с образованием разрывов внутри деформируемых твердых тел.

Комплексность этой проблемы порождает трудности понимания и недоразумение среди специалистов, привыкших действовать только в одном из указанных научных направлений.

В «Успехах физических наук» появилась статья Ю. П. Райзера [1] с попыткой разъяснения для читателей этого журнала состояния теории трещин и одновременно с попыткой опровержения ряда опубликованных критических замечаний [2–5].



Фиг. 1

В статье Ю. П. Райзера ряд хорошо известных положений теории трещин изложен правильно.

Вместе с тем эта статья может уводить читателя от правильного понимания основных простых идей, на которых зиждется теория трещин.

Для выяснения сути дела рассмотрим задачу о плоской деформации тела, имеющего вырез эллиптической формы (фиг. 1). Пусть отношение полуосей эллипса $b/l \ll 1$.

Обозначим через p внешнее растягивающее напряжение «на бесконечности». На поверхности отверстия нормальные и касательные напряжения обращаются в нуль.

Сначала рассмотрим эту задачу в рамках модели упругого тела для адиабатических процессов [1] (надо решать только уравнения равновесия при наличии определенной конечной связи между тензорами напряжения и деформации — закон Гука). Как известно, в теории малых деформаций эту задачу можно решать двумя способами:

I. «Точное» решение, в котором граничные условия удовлетворяются на контуре выреза в начальном недеформированном состоянии.

II. Приближенное линеаризированное решение, в котором на основании неравенства $b/l \ll 1$ граничные условия на контуре эллиптического выреза сносятся и удовлетворяются на двух сторонах отрезка оси x $(-l, +l)$.

III. В рамках теории упругости, не меняя уравнения состояния или уточняя его (нелинейная теория упругости), можно рассматривать эту задачу в постановке еще более точной, чем постановка I, когда граничные условия на вырезе удовлетворяются на деформированной поверхности.

Последняя задача математически трудна, но это несущественно с точки зрения физической сущности ее постановки. В математических постановках I и II эта задача имеет единственное решение и легко разрешается для любых p (l и b — заданные постоянные). Решения в постановках I и III при небольших p близки между собой.

Решения I и II близки всюду, за исключением малых окрестностей точек A и A' (фиг. 1). У этих точек компоненты напряжения σ_{yy} в решении I всегда конечны, а в

[1] Аналогичное положение имеет место для изотермических процессов, если внутреннюю энергию заменить на свободную.

решении II при подходе к точке A всегда стремятся к бесконечности по закону

$$\sigma_{yy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi(x-l)}}, \qquad K = K(p, l, E, \nu) \tag{1}$$

где E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Для этих двух решений характер распределения $\sigma_{yy}(x)$ вдоль оси x представлен на фиг. 2. Отсюда ясно, что приближенная постановка II приводит к большим числовым ошибкам вблизи точек A и A', однако следует подчеркнуть, что результаты решений I и II близки вне малых окрестностей этих точек и что общая упругая энергия, вычисленная для решений соответствующей задачи о конечном теле в постановках I и II, практически одинакова. Причем очень важно, что при фиксированном b и разных l эта энергия различна.

Отсюда следует первый фундаментальный вывод:

1. Для решения упругой задачи линеаризация не годится вблизи точек A и A', но она дает правильный результат для общей энергии.

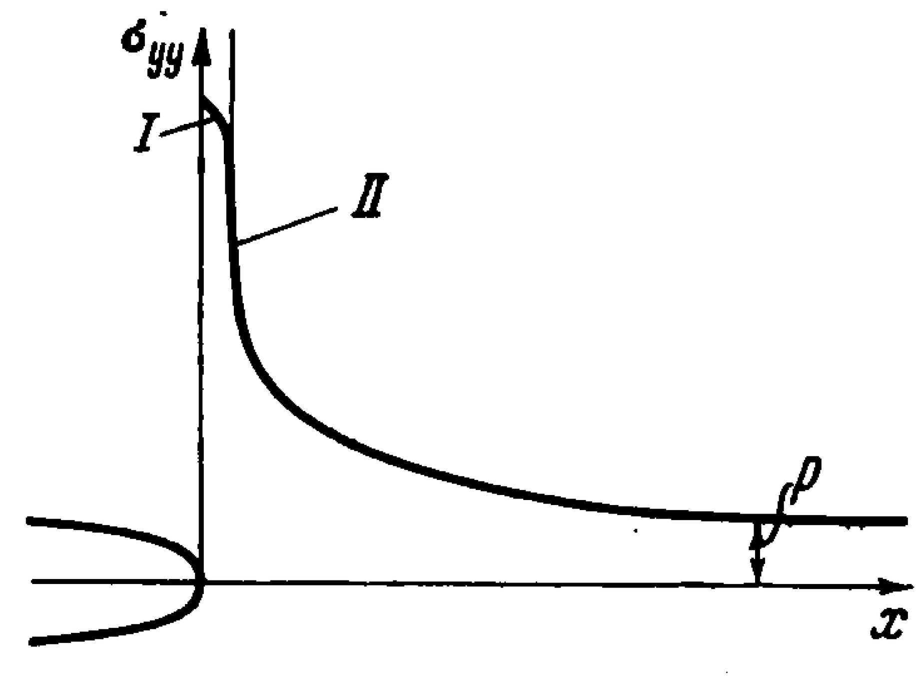
Теперь обратимся к вопросу о соответствии теории опыту для материалов, деформация которых описывается в рамках моделей теории упругости.

При очень малых p решение, рассчитанное по методу I, качественно и количественно хорошо соответствует опыту и описывает эффект концентрации напряжений вблизи точек A и 4'.

Расчеты по методу II отличаются от расчетов по методу I только непосредственно вблизи точек A и A', где этот расчет приводит к явно неверным результатам.

Отсюда следует второй фундаментальный вывод:

2. Бесконечность напряжений у концов A и A' в методе решения II не есть результат недостатков физической постановки задачи — физического моделирования, а есть результат приближенного способа решения этой задачи.



Фиг. 2

При малых p проблема концентрации напряжений разрешается методами теории упругости в постановке I. При постановке II никого не смущает появление бесконечных напряжений вблизи концов разреза и никому не приходит в голову применять постановку II с введением подходящих искусственных поверхностных сил сцепления, приложенных на берегах разреза и обеспечивающих конечность напряжений, для достижения «физичности» моделирования. Всем ясно, что приближенный метод решения II недопустим для описания деталей деформации вблизи концов, где имеет место концентрация напряжения.

Если требуется вычислить полную упругую энергию, то, несмотря на приближенность метода решения II, можно получить с помощью этого решения верный ответ. И в частности, можно очень точно найти разность энергий при двух значениях длины разреза l и $l + \Delta l$.

Сказанное выше просто и очевидно для эллиптического выреза, однако все эти выводы сохраняются для тонких вырезов любой формы с конечной кривизной в конечных телах при сложной системе внешних нагрузок.

Рассмотрим еще идеализированный случай, когда в рамках механики сплошной среды край первоначального выреза при отсутствии нагрузок представляет собой угловую точку или точку возврата. В этом случае при постановке I в угловой точке компоненты напряжения получаются вообще бесконечными, но если обратиться к более точной постановке III, то можно показать, что для напряжений в решении этой упругой задачи вблизи острия нет особенности с асимптотическим законом вида (1).

В решении, полученном с помощью приближенной постановки II, напряжения в точке возврата получаются бесконечными с асимптотическим законом (1).

Таким образом, при достаточно малых внешних нагрузках *в рамках теории упругости* можно ставить и решать задачи в хорошем соответствии с действительностью о концентрации напряжений вблизи сильно искривленных частей контуров границы тела. В связи с этим существует целая сильно развитая область теории упругости, посвященная этим проблемам. В этой области постановка II не применяется и, естественно, не вводится никаких поверхностных сил сцепления на границах тела.

Что происходит при увеличении внешних нагрузок типа p? С ростом p в местах концентрации напряжений величины напряжений и их градиенты растут. Как известно, при достаточно больших резко меняющихся напряжениях механические макроскопические свойства реальных тел меняются, начинают проявляться свойства пластичности, в структуре макроскопических частиц возникают различные дефекты, и. т. п.

В связи с этим с ростом нагрузок p еще задолго до появления фактических разрывов (т. е. роста трещины) механическое состояние частиц в местах концентрации напряжений не описывается в рамках линейной по Гуку теории упругости как в точной постановке I, так и в сверхточной постановке III. Однако для хрупких тел опыт показывает, что нарушения уравнений состояния происходят только в очень малых областях вблизи кромок развивающихся разрывов.

В настоящее время имеется очень мало теоретических данных о структуре и о механизмах взаимодействий внутри областей с концентрацией больших напряжений.

Однако можно утверждать совершенно доподлинно, что этот механизм может быть различным — это может быть связано с энергией на разрушение γ при возникновении новых площадок разрыва для хрупкого разрушения (силикатное стекло, кварц) или с образованием тонких слоев пластической деформации на берегах разрыва для квазихрупкого разрушения (металлы, у которых $\gamma_{\text{эфф}} \gg \gamma$). Размеры области, в которой модель упругого тела неприменима, могут иметь для одних материалов порядок межатомных расстояний, а для других — порядок миллиметров и даже сантиметров.

Форма пластических областей также может быть различной; в плоской задаче эти области могут иметь форму, близкую к кругу или к узкому слою длиной d, сравнимой с длиной щели $2l$; $d/l \sim 1$ или $d/l \ll 1$. Эти пластические слои могут располагаться как продолжение просвета щели или могут располагаться симметрично под углом $\sim 45°$ к направлению щели и т. п. [6, 7]

В связи с этим отметим работу Г. П. Черепанова [8], в которой дано точное решение упруго-пластической задачи при антиплоской деформации пространства, содержащего щель, у концов которой образуются конечные пластические области. В этой работе дано не только решение упругой задачи, но и найдена форма пластической зоны, построено поле деформаций и напряжений внутри пластической области.

Помимо этого в работах В. З. Партона, Г. П. Черепанова и др. [9] получено численное решение упруго-пластической задачи в случае плоского напряженного состояния и плоской деформации при растяжении. Укажем на интересное обстоятельство, что если в случае плоского напряженного состояния гипотеза Дагдейла нашла подтверждение, то в случае плоской деформации пластическая область представляет собой тонкий эллипс у конца трещины с большой осью, перпендикулярной линии трещины. Аналогичные работы имеются и за рубежом. Все эти работы показывают, что структура края трещины совсем не согласуется с моделью, в которой действуют силы сцепления на берегах просвета щели.

Поразительно, что основная задача о развитии и об устойчивости трещин в хрупких телах, когда модель упругого тела в месте концентрации напряжений неприменима, оказалась более простой, чем задача о концентрации больших напряжений без разрушения [1] и о зарождении разрушения. Этот прыжок в теории оказался возможным благодаря применению энергетических уравнений, в которых фигурируют глобальные энергии.

Эти энергии оказалось возможным вычислять с практически нужной точностью при помощи приближенных методов, в которых не требуется находить детальные механизмы полей деформации и напряжений в местах концентрации напряжений.

---

[1] Подразумевается концентрация напряжений, связанная с проявлением усложненных свойств материала не описываемых законом Гука.

В физике и в механике, начиная с универсальных законов сохранения энергии и термодинамических законов, можно указать великое множество конкретных примеров с аналогичной ситуацией.

Так в классической газовой динамике во многих случаях не требуется знать структуру ударных волн. Для определения идеального коэффициента полезного действия цикла Карно не требуется знать свойства рабочего тела или устройство соответствующей машины и т. п. Напомним, что несущественностью многих деталей в ряде основных задач объясняется большая польза от широкого использования таких «идеальных моделей», как материальная точка, абсолютно твердое тело и т. д.

Вероятно, правильно общее утверждение, что во всяком реальном успехе познания природы мы сталкиваемся с такого рода нечувствительностью от всегда имеющихся скрытых от нас деталей и механизмов.

Установление замечательных определяющих эффектов и их физическая характеристика, от которых зависит распространение трещин, содержится в работах Гриффитса [10], Ирвина [11, 12] и Орована [13].

Их основная идея связана с тем, что независимо от конкретного механизма физических взаимодействий у концов разреза основное значение имеет полный расход энергии на разрыв — характеристика чуждая для модели упругого тела. В настоящее время нет теоретических расчетов этой энергии при физическом моделировании разрывов, но она легко определяется из опытов.

Согласно Ирвину, расход энергии на разрыв выражается через критическое значение постоянной K_c в формуле (1). Постоянная K_c введена Ирвиным как физическая характеристика, соответствующая распространению разрыва при $K = K_c$ и превращению тем самым разреза в трещину. Коэффициент K возникает как математическая характеристика асимптотического поведения упругого поля в приближенном линеаризованном решении задач теории упругости в постановке II. Механический смысл K_c выявляется из уравнения энергии.

Это приближенное решение не описывает деталей деформации вблизи концов трещины, но его асимптотическое поведение вблизи концов трещины, связанное со значением постоянной K_c, правильно определяет расход объемной упругой энергии и приток внешней энергии, фигурирующих в уравнении энергии для тела в целом при описании явления распространения трещины.

Со времени работ Гриффитса и Ирвина в постановку упругих задач о трещинах в хрупких телах не внесено никаких уточнений или дополнений и, главное, это есть единственная теория, соответствующая опыту для тела в целом, когда область, в которой нарушается теория упругости, пренебрежимо мала.

Теперь обратимся к замечаниям по поводу мыслей, поддерживаемых и высказываемых в статье Ю. П. Райзера.

1°. Прежде всего на стр. 329 и 330 обсуждается сформулированная выше задача теории упругости о тонкой эллиптической щели. Ю. П. Райзер пишет: « ... напряжения и деформации вблизи края трещины — бесконечны при *любых* (следовательно, и для эллиптической щели в задаче о концентрации напряжений при отсутствии разрывов. Е. М.) конечных нагрузках и размерах разреза. Поскольку реальное тело выдерживает только напряжения, не превосходящие определенного предела, отсюда следует, что тело, ослабленное разрезом, должно было бы разрушаться при любых малых нагрузках»[1].

Ю. П. Райзер видит в этом коренное противоречие и не замечает, что это обстоятельство связано с линеаризацией. Далее он пишет: «Этот вопрос интересовал многих физиков и механиков, которые пытались объяснить появление физически неправдоподобных особенностей края трещины, следующих из теории закругленности профи-

[1] Это ошибочное утверждение служит базисом в статье Ю. П. Райзера и в работах других авторов. Авторы забывают, что в рамках теории упругости имеются различные математические решения задач (грубые приближенные и более точные) при одной и той же физической их постановке.

ля и бесконечности напряжений». Вслед за Г. И. Баренблаттом и некоторыми другими авторами Ю. П. Райзер много раз повторяет эту мысль и рассматривает эти «физически недопустимые» феномены как результаты нетерпимого физического моделирования. Смысл и цель конструкций усовершенствованных моделей авторы видят в введении действительно существующих физически реальных подходящих сил сцепления, приложенных к берегам разреза у его краев *при сохранении приближенной постановки II* для решения упругой задачи [1].

По этому поводу Ю. П. Райзер пишет: «Введение сил сцепления позволило объяснить причину существования бесконечных напряжений (! *Е. М.*) на концах трещины, свойственных энергетическому подходу, физически правильным образом устранить эти нереальные бесконечности (! *Е. М.*) и выяснить (? *Е. М.*) детали строения (профиль) концов трещин, где, собственно, и разыгрывается процесс разрыва материала».

Однако самое важное заключается в том, что без этих сил сцепления, полученные бесконечности, в приближенном решении по методу решения II, не есть результат физического моделирования, а есть результат приближенного математического расчета, происходящего за счет недопустимости метода линеаризации и нарушения закона Гука в некоторой области у краев трещины.

Таким образом, имеется прямое непонимание того, что грехи метода расчета не есть грехи физики и что эти вычислительные неточности нельзя исправлять за счет «сил сцепления».

Конечно, можно сказать, что приведенная ими мотивировка для введения модели с силами сцепления со ссылкой на бесконечности в линеаризованной задаче это только «психологический мотив». В действительности, независимо от этого, можно было бы сказать более правильно, что предлагается такое моделирование края разрыва, для которого с физической точки зрения все получается «удовлетворительно», а главное, для которого линеаризованная постановка II становится вполне приемлемой.

В связи с этим очевидно, что при очень малых внешних нагрузках, когда постановки задач I и III теории упругости о концентрации напряжений безусловно верны и хорошо отвечают действительности, никаких сил сцепления, приложенных к берегам щели, вводить не нужно, и их нет физически.

Что касается не малых нагрузок или нагрузок, близких к предельным, приводящим к расширению щели, то очевидно, что линеаризованная постановка задачи вблизи края в действительности по существу также неприемлема и что при увеличении внешних нагрузок задолго до разрывов связей на атомном уровне макроскопические свойства материала у резко искривленного края границы тела не описываются теорией упругости с малыми деформациями и с законом Гука [2].

В некоторых вопросах (таких, как зарождение трещины, теоретическое определение энергии на разрыв и т. п.), которые не рассматривались в критикуемых работах, изучение детальных явлений у мест концентрации напряжений и у края трещин важны

---

[1] Подчеркнем, что в предложенном ими моделировании вводятся силы сцепления, которые приложены к берегам уже ранее образовавшихся разрывов при $x < l$ (l — координата конца разреза). Работа именно этих сил сцепления (не действующих на δS) рассматривается как определяющая расход энергии при увеличении на δS площади разреза. Далее используется сомнительное допущение, что работа обобщенных сил на вновь образующемся элементе разрыва принимается малой высшего порядка, чем δS.

[2] У края трещины можно ввести границу упругой области по Гуку и можно рассматривать поверхностные силы на этой границе как «силы сцепления», но в общем случае нельзя эту границу рассматривать как продолжение разрыва прямолинейной трещины [8, 9] и применять для анализа явлений у края трещины линеаризованную постановку задачи II. Так же как это нельзя делать и при малых нагрузках для изучения концентрации напряжений, когда упругая модель применима.

и необходимы. Для этого нужно развивать соответствующие теории с учетом нелинейных и неупругих свойств материалов. В работах [8, 14, 15] имеются примеры таких теорий. Таким образом, мы за изучение деталей, когда это нужно, но за обоснованное изучение!

Выше отмечено, что сохранение линеаризованной постановки задачи при правильном моделировании деталей у края трещины, вообще говоря, неприемлемо.

Однако в некоторых частных случаях (модель М. Я. Леонова и В. В. Панасюка) такое моделирование все же возможно, когда область нарушения теории упругости представляет собой пренебрежимо тонкий пластический слой длиной d, расположенный на продолжении трещины. Но в этом случае, когда d конечно, теории Ирвина и его критерий неприемлемы. Напомним, что в обсуждаемых работах речь идет только об ином обосновании критерия Ирвина при $d/l \approx 0$.

Если детали у края трещины не учитываются, то при малых d можно прямо положить $d = 0$ и пользоваться теорией Ирвина; если же при очень малых d важны детали, то описываемые модели с подходящими силами сцепления нельзя признать обоснованными физически. Обоснование теории, связанное с устранением математических бесконечностей, возникающих из-за приближенности математических решений, с помощью введения подходящих сил сцепления, нельзя признать удовлетворительным.

Таким образом, применяемый в обиходе жаргон о бесконечных напряжениях в теории упругости, в действительности связанный только с приближенными методами решения, а не с физическим моделированием, был принят как физическая концепция, которая породила протестующую неудовлетворенность среди некоторых «физиков».

Но самое главное — все это моделирование в обсуждаемых работах с точки зрения ставящихся и решаемых задач в рамках теории упругости с простым условием $K \leqslant K_c$ вообще ничего нового не дает. В лучшем случае можно говорить о «теории» Г. И. Баренблатта только как о некоторой сомнительной интерпретации установленного раньше правильного и четкого условия Ирвина ($K \leqslant K_c$).

Постановка задач о трещинах в хрупких и квазихрупких телах точно сохраняется по Ирвину, единственное изменение — чисто терминологическое — вместо первоначального термина, введенного Ирвиным, «критический коэффициент интенсивности напряжений» для этой же величины (после работ Ирвина) активно внедряется новый термин «модуль сцепления Г. И. Баренблатта».

2°. В связи с большой претенциозностью и характером общего стиля преподнесения различных утверждений отметим следующее. У Ю. П. Райзера имеются такие фразы, сформулированные осторожно и аккуратно в противоположность предыдущим публикациям: «Близкую по духу модель трещины с учетом сил сцепления, но не в столь общей и законченной форме, независимо (чуть позже) предложили Леонов и Панасюк». Из этой фразы невольно можно вывести, что моделирование М. Я. Леонова и В. В. Панасюка есть чуть ли не частный случай моделирования Г. И. Баренблатта. В действительности М. Я. Леонов и В. В. Панасюк и Дагдейл принимают, что d — конечно, а силы сцепления представляют собой задаваемые напряжения на границах пластической области, что никакой автомодельности у края трещины нет и что величина d определяется конфигурацией тела и внешними нагрузками. В их постановке критерий Ирвина неприменим, поэтому это — некоторая новая теория, тогда как моделирования Г. И. Баренблатта к постановке упругой задачи ничего нового не добавляют по сравнению с теорией Ирвина. Моделирование М. Я. Леонова, В. В. Панасюка и Дагдейла относится по существу к нехрупким телам, в которых пластические свойства при развитии разрывов играют главную роль.

У Ю. П. Райзера читаем: «Сам Ирвин рассматривал главным образом неустойчивые трещины и его некоторые высказывания по поводу медленно растущих при увеличении нагрузки трещин свидетельствуют о том, что он не вполне правильно понимал этот вопрос».

Все это относится к элементарному вопросу об устойчивости и неустойчивости расширения трещины при малых изменениях длины трещины или внешних нагрузок. Ирвин явно решил соответствующие задачи и указал на эффекты возможного ускорения или остановки процесса расширения трещины. Что же еще нужно для понимания этого вопроса! [1].

Что же получается? Основные результаты первооткрывателей объявляются неясными и неудовлетворительными, они де не поняли по-настоящему существа вопроса и предлагается «настоящая хорошая научная теория»,— которая в действительности новых результатов не содержит. Такие приемы характерны для некоторых компилятивных сочинений.

Ю. П. Райзер ссылается на цитирование работ Г. И. Баренблатта в иностранных и отечественных трудах, однако эти ссылки не убедительны. Так же, как у нас, и за границей есть много непонимающих, или не вникающих в существо вопроса, или просто доверчивых авторов. В нашей и в международной жизни всем известны примеры безосновательных цитирований и незаслуженных восхвалений. Борьба с этим явлением трудна и во многих случаях просто невозможна. Нельзя сказать, что за границей нет работ с критикой «теории» Г. И. Баренблатта. Помимо советских работ, верная критика содержится также и в иностранных публикациях Броберга [18], Крибба и Томкинса [19], Париса и Си [20]. Это не отмечено Ю. П. Райзером.

3°. В статье Ю. П. Райзера ясно проявляется странная для физика тенденция представить энергетические методы исследования неполноценными. Он пишет: «В сущности теория, основанная на энергетическом подходе, содержит некоторую внутреннюю непоследовательность» (!?). «Более совершенным и внутренне последовательным является иной «силовой подход» (?)». «Силовой подход позволяет устранить нереальные особенности энергетического подхода». «Никаких дополнительных условий энергетического характера при таком подходе вводить не приходится, так же, как не приходится специально вводить чуждые теории упругости понятия поверхностной энергии».

Но ведь с физической точки зрения поверхностная энергия связана с самим существом этого явления. Для стекла опыты с трещинами как раз и употребляются для определения плотности поверхностной энергии [21].

В то же время Ю. П. Райзер, противореча самому себе, уделяет много внимания правильным энергетическим соображениям. Однако самое главное состоит в том, что в механике разрушения к уравнениям теории упругости нужно обязательно добавлять физическое уравнение энергии для установления связи между «критическим коэффициентом интенсивности напряжений» K_c и энергией на разрушение γ. Ведь эта связь фигурирует у всех, в том числе и у авторов, развивающих «силовые подходы».

Энергетический подход позволяет выяснить общие свойства явления разрывов в различных телах, когда механизмы взаимодействия в окрестностях и на площади разрыва различны — разрывы хрупкие, квазихрупкие и т. п. [21]. Отметим еще, что, как известно из физики, нельзя утверждать, что микроскопические и макроскопические взаимодействия внутри «твердых» тел всегда можно объяснить и описать с помощью «силового подхода».

4°. Наконец, об энергетических соотношениях. Обозначим через U упругую объемную энергию некоторой части тела или тела в целом, определенную деформированным состоянием тела и вычисляемую интегрированием по рассматриваемому объему.

Во-первых, для статических состояний тела в физике, вообще говоря, энергию U нельзя рассматривать как полную энергию тела, а во-вторых приращения энергии U могут происходить не только за счет работы макроскопических сил.

В рамках теории упругости энергию U можно отождествлять с полной энергией. Однако при этом нельзя считать, что вариация δU при постоянных внешних нагрузках всегда обращается в нуль (в частности, при учете теплопроводности, при фазовых переходах, а также при расширении разрывов и т. п.).

---

[1] Укажем, что устойчивые трещины в соответствии с энергетическими представлениями Гриффитса в нашей стране изучались И. В. Обреимовым еще в 1930 г. [16], а за рубежом помимо Ирвина, например Гилманом [17].

В статье Ю. П. Райзера приведена правильная формула

$$(\delta U)_{p=\text{const}} = (1 - \nu^2)\, E^{-1} K^2 \delta S \tag{2}$$

где K — коэффициент интенсивности напряжений, соответствующий заданным внешним нагрузкам, на краю данной щели в формуле (1), а δS — увеличение площади щели у рассматриваемой точки ее края.

Эта формула есть формула теории упругости, верная всегда. Имеются опубликованные выводы этой формулы, опирающиеся только на уравнения теории упругости.

Еще Гриффитс исходил из выражения для $(\delta U)_{p=\text{const}} \neq 0$ в конкретных примерах! Именно в этом вся суть теории трещин! Формула (2) была установлена Ирвиным для вычисления расхода энергии по Гриффитсу. Далее Ю. П. Райзер пишет без всякого вывода уравнение (23) (стр. 343) как некоторый постулат [1]

$$(\delta U)_{p=\text{const}} = 0 \tag{3}$$

При выводе формулы (2) и при использовании формулы (3) вариации понимаются точно в одинаковом смысле.

Формула (3) противоречит формуле (2). Нельзя доказать, что наряду с формулой (2) справедлива и (3), так как при $K \neq 0$ верна формула (2) и ниоткуда не следует, что K должно быть равно нулю (хотя Г. И. Баренблатт пытается в рамках теории упругости доказать условие (3) [22]). Можно только предположить одновременную выполнимость уравнений (2) и (3), как некоторого добавочного условия и тогда это повлечет за собой, что $K = 0$ — математическое выражение условия конечности напряжений в линеаризованном приближенном решении [2].

Таким образом, имеем дело с двумя равносильными предположениями

$$\text{либо } (\delta U)_{p=\text{const}} = 0, \qquad \text{либо } K = 0 \tag{4}$$

Но есть ли здесь какие-либо доказательства? Нет! Есть только тривиальное утверждение об эквивалентности ситуации (4), вытекающее из (2). Но верно ли вообще уравнение (3)? Вообще это уравнение неверно, так как верна строго доказанная формула (2), в которой $K \neq 0$ для фактически построенных решений теории трещин. Условие (3) получается из формулировки (2) только при $K = 0$, т. е. когда доказываемое заранее предполагается.

Таким образом, ничего здесь доказать принципиально нельзя, а если дело сводится к предположениям, то самое ясное предположение — это допущение (не физическое, а математическое, связанное с методом приближенного решения) о конечности напряжений в линеаризованном решении, что может обеспечиваться только при помощи искусственно введенных и приложенных к берегам разреза подходящих «сил сцепления», свойства которых обуславливаются приближенностью метода решения.

Поэтому пусть читатель сам оценит заявление Г. И. Баренблатта ([22], стр. 322): «Итак, условие конечности напряжений в конце трещины и плавность смыкания про-

[1] В условиях (2) и (3) разность энергий подразумевается на перемещениях, отвечающих двум действительным состояниям равновесия, тогда как в общем случае, в принципе возможных перемещений вариации энергий записываются на мысленных перемещениях, согласных со связями. Поэтому в принципе возможных перемещений $\delta U = \delta A \neq 0$, где δA — работа всех внешних сил на мысленных перемещениях. Это обстоятельство не отражено правильным образом у Ю. П. Райзера и во всех, относящихся к этому вопросу, работах Г. И. Баренблатта. У них вариации энергии рассматриваются не на мысленных, а на действительных перемещениях, поэтому условие (3) при непрерывных перемещениях не есть принцип возможных перемещений, а представляет собой просто следствие единственности решения теории упругости, так как при постоянных нагрузках и при отсутствии разрывов, перемещения в двух положениях равновесия могут отличаться только на перемещения тела как жесткого. В связи с этим при $K=0$ равенство (3) тривиально.

[2] Введение сил сцепления на берегах разреза и условие $K = 0$ не равносильны. При наличии сил сцепления вообще $K \neq 0$, только для специальных, подходящих сил сцепления верно равенство $K = 0$.

тивоположных берегов трещины на ее краях получено из фундаментального принципа статики — принципа возможных перемещений». Аналогичны высказывания и других авторов, например Снеддона [23].

Выше разъяснено существо главных утверждений в статье Ю. П. Райзера. Разъяснение, аналогичное данному в п. 4, со всеми этими и другими тонкостями были уже даны в заметках [2-5]. Несмотря на это Ю. П. Райзер позволяет себе сделать риторическое замечание: «Именно этот момент теории — вопрос о стационарности упругого потенциала — почему-то не был понят...».

В связи с этим не исключается возможность того, что смысл абсолютно элементарного и простого разъяснения, данного выше, может оказаться тоже непонятным для нежелающих понимать действительную суть дела. Опубликованные ранее критические замечания ряда авторов не принимаются с должным вниманием: рассматриваемая статья Ю. П. Райзера — один из примеров к этому.

Поступила 31 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Райзер Ю. П. Физические основы теории трещин хрупкого разрушения. Усп. физ. н., 1970, 100, вып. 2.
2. Ивлев Д. Д. Об одном построении теории трещин. Инж. ж. МТТ, 1967, № 6.
3. Черепанов Г. П. К математической теории равновесных трещин. Инж. ж. МТТ, 1967, № 6.
4. Морозов Е. М., Партон В. З. Об одном обосновании критерия Ирвина на конце трещины. Инж. ж. МТТ, 1968, № 6.
5. Седов Л. И. О статье Г. И. Баренблатта. «О некоторых вопросах механики хрупкого разрушения». Инж. ж. МТТ, 1968, № 6.
6. Dugdale D. S. Yielding of stell sheets containing slits. J. Mech. and Phys. Solids, 1960, vol. 8, No 2.
7. Леонов М. Я., Витвицкий П. М., Ярема С. Я. Полосы пластичности при растяжении пластин с трещиновидным концентратом. Доклады АН СССР, 1963, т. 148, № 3.
8. Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача в условиях антиплоской деформации. ПММ, 1962, т. 28, вып. 4.
9. Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Песков Ю. А., Черепанов Г. П. О локальной пластической зоне вблизи конца щели. Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 1.
10. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids. Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1920, vol. A221, p. 163.
11. Irwin G. R. Fracture dinamics. In: Fracturing of metals, ASM, Cleveland Amer. Soc. Metals., 1948, p. 147.
12. Irwin G. R. Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing ap plate. J. Appl. Mech. 1957, vol. 24, No. 3.
13. Orowan E. O. In: Fracture and strength of solids. In: Repts Progr. Phys. 1949, vol. 12, p. 185.
14. Блехерман М. Х., Нацвлишвили Г. И. О конфигурации атомных плоскостей, окаймляющих трещину, Кристаллография, 1969, т. 14, № 2.
15. Новожилов В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
16. Obreimoff S. W. The splitting strength of mica. Proc. Roy. Soc. 1930, ser. A. vol. 127, p. 290.
17. Gilman J. J. Cleavage, dactility and toughness of crystals. In «Fracture», Proc. Internat. Conf. on the Atomic Mechanisms of Fracture, Swampscott, Mass., 1959. (Рус. перев. «Скол, пластичность и вязкость кристаллов». В сб.: Атомный механизм разрушения, М., «Металлургиздат», 1963.
18. Broberg K. B. Critical review of some theories in fracture mechanics. Intern. J. Fracture Mech., 1968, vol. 4, No. 1.
19. Cribb J. L., Tomkins B. On the nature of the stress at the tip of a perfectly brittle crack. J. Mech. and Phys. Solids, 1967, vol. 15, No. 2, p. 135.
20. Парис П., Си Дж. Анализ напряженного состояния около трещин. Сб. «Прикладные вопросы вязкости разрушения», М., «Мир», 1968.
21. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, «Наукова думка», 1968.
22. Баренблатт Г. И. Об условиях конечности в механике сплошных сред. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
23. Снеддон И. Решение задач теории упругости для трещин при помощи интегральных преобразований. Сб. перев., «Механика», 1970, №. 1.