ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЯЗКО-УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

И. Г. Миткевич

(Москва)

Строится решение задачи о давлении штампа, жестко связанного с изотропной вязко-упругой полуплоскостью. При этом предполагается, что вязко-упругое тело обладает объемной ползучестью. Получено точное выражение для давления, действующего под штампом, для любого момента времени. Таким образом, устанавливается не только асимптотическое значение давления, но и кинетика процесса.

Соотношения между компонентами деформации и напряжения в изотропном вязко-упругом теле примем в следующей форме [1] (случай плоского напряженного состояния)

$$\varepsilon_x(t)=\frac{1}{E}\sigma_x(t)+\frac{1}{E}\int_0^t K_1(t-\tau)\,\sigma_x(\tau)\,d\tau-\frac{\nu}{E}\sigma_y(t)-\frac{\nu}{E}\int_0^t K_2(t-\tau)\,\sigma_y(\tau)\,d\tau$$

$$\varepsilon_y(t)=\frac{1}{E}\sigma_y(t)+\frac{1}{E}\int_0^t K_1(t-\tau)\,\sigma_y(\tau)\,d\tau-\frac{\nu}{E}\sigma_x(t)-\frac{\nu}{E}\int_0^t K_2(t-\tau)\,\sigma_x(\tau)\,d\tau$$

$$\gamma_{xy}(t)=\frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}(t)+\frac{1+\nu}{E}\int_0^t K(t-\tau)\,\tau_{xy}(\tau)\,d\tau \qquad (1)$$

$$\left(K(t)=\frac{1}{1+\nu}K_1(t)+\frac{\nu}{1+\nu}K_2(t)\right)$$

Рассмотрим задачу о давлении жесткого штампа с прямолинейным плоским основанием на изотропную вязко-упругую полуплоскость. Пусть штамп жестко связан с полуплоскостью. На штамп действуют внешние силы, имеющие равнодействующую, направленную по оси y, так что $X=0$, $Y=-P_0$, где P_0 — заданная положительная постоянная. Будем полагать, что поверхность вязко-упругого тела вне штампа свободна от усилий.

Воспользуемся решением этой задачи для упругой полуплоскости, которое приводится в [2], причем в случае изотропного вязко-упругого тела, обладающего объемной ползучестью, выражения для изображений давления $P(p, x)$ и касательного напряжения $T(p, x)$ будут следующими

$$P(p,x)=\frac{P_0}{\pi\sqrt{l^2-x^2}}\,\frac{1+\varkappa(p)}{\sqrt{\varkappa(p)}}\cos\left[\frac{\ln\varkappa(p)}{2\pi}\ln\frac{l+x}{l-x}\right] \qquad (2)$$

$$T(p,x)=\frac{P_0}{\pi\sqrt{l^2-x^2}}\,\frac{1+\varkappa(p)}{\sqrt{\varkappa(p)}}\sin\left[\frac{\ln\varkappa(p)}{2\pi}\ln\frac{l+x}{l-x}\right]$$

При этом изображение $\varkappa$ ($\varkappa$ — постоянная, введенная Мусхелишвили) будет таким:

$$\varkappa(p)=\frac{3-\nu^*(p)}{1+\nu^*(p)}, \qquad \nu^*(p)=\nu\,\frac{1+K_2(p)/p}{1+K_1(p)/p} \qquad (3)$$

Введем обозначение

$$\alpha=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{l+x}{l-x}$$

Тогда выражение для давления в (2) можно преобразовать к следующему виду:

$$P(p,x)=\frac{P_0}{2\pi\sqrt{l^2-x^2}}\left[\varkappa(p)^{-1/2+i\alpha}+\varkappa(p)^{1/2-i\alpha}+\varkappa(p)^{-1/2-i\alpha}+\varkappa(p)^{1/2-i\alpha}\right] \qquad (4)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению начальной функции для изображения $[\varkappa(p)]^{\gamma}$, где γ — показатель степени при $\varkappa(p)$ в выражении (4).

На основе результатов экспериментальных исследований для многих материалов ядра ползучести могут быть достаточно удовлетворительно аппроксимированы посредством экспоненциальной функции. Поэтому в соотношениях (1) примем

$$K_i(t-\tau) = k_i e^{-\beta(t-\tau)} \qquad (i = 1, 2)$$

Воспользовавшись (3), найдем

$$\varkappa(p) = \frac{ap+b}{cp+d} \qquad \begin{pmatrix} a = 3-\nu, & b = 3(\beta+k_1) - \nu(\beta+k_2) \\ c = 1+\nu, & d = \beta + k_1 + \nu(\beta+k_2) \end{pmatrix}$$

Задача свелась к нахождению оригинала для

$$\left[\frac{ap+b}{cp+d}\right]^\gamma = \left(\frac{a}{c}\right)^\gamma \left(\frac{p+\lambda}{p+\lambda-\alpha}\right)^\gamma \qquad \left(\lambda = \frac{b}{a}, \ \alpha = \frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right)$$

Оригинал для $[p \,/\, (p-\alpha)]^\gamma$ выражается в виде вырожденного гипергеометрического ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma+k-1)\ldots\gamma}{k!} \alpha^k \frac{t^k}{k!}$$

сходящегося для любого t. Это позволяет найти оригинал для $[\varkappa(p)]^\gamma = [(ap + b \,/\, (cp+d)]^\gamma$. Он будет следующим:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^\gamma \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma+k-1)\ldots\gamma}{(k!)^2} \left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right)^k \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} k! - \right.$$
$$\left. - e^{-bt/a} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} k(k-1)\ldots(k-n+1)\, t^{k-n}\right]$$

Таким образом, давление $P(t, x)$, которое возникает под штампом, действующим на вязко-упругую полуплоскость, выражается в виде суммы четырех рядов, сходящихся при любом t. Воспользовавшись соотношениями для гамма-функций, окончательно получим

$$P(t, x) = \frac{P_0}{\pi\sqrt{l^2-x^2}} \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \mathrm{Re}\left[\frac{\Gamma(-{}^1/_2 + i\alpha + k)}{\Gamma(-{}^1/_2 + i\alpha)} \left(\frac{a}{c}\right)^{-{}^1/_2 + i\alpha} \times \right.\right. \qquad (5)$$
$$\left. \times \left(\frac{a}{c} \frac{-{}^1/_2 + i\alpha + k}{-{}^1/_2 + i\alpha} + 1\right)\right] \frac{(b/a - d/c)^k}{(k!)^2} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} k! - \right.$$
$$\left.\left. - e^{-bt/a} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} k\ldots(k-n+1)\, t^{k-n}\right]\right\}$$
$$\left(\alpha = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{l+x}{l-x}\right)$$

Это решение может быть исследовано для различных времен действия нагрузки, а также в различных местах под штампом. Вблизи углов штампа — l и $+l$ так же, как и в случае упругой задачи, напряжения бесконечное число раз меняют знак, однако величина этих участков весьма мала.

Если нагружение происходит мгновенно, т. е. $t \to 0$ в (5), то найденный результат совпадает с решением, которое получено для упругой полуплоскости [2, 3].

Для больших времен имеем следующее асимптотическое выражение:

$$P(x) = \frac{P_0}{\pi\sqrt{l^2-x^2}} \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{a}{c}\right)^{-{}^1/_2 + i\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} + i\alpha + k - 1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2} + i\alpha\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{a}{c} \frac{-{}^1/_2 + i\alpha + k}{-{}^1/_2 + i\alpha} + 1\right) \frac{(1 - ad/bc)^k}{k!}\right\}$$

Это выражение для давления можно представить как сумму трех гипергеометрических функций

$$P(x)=\frac{P_0}{\pi\sqrt{l^2-x^2}}\operatorname{Re}\left[\left(\frac{a}{c}\right)^{1/2+i\alpha}F\left(-\frac{1}{2}+i\alpha,1;1;1-\frac{ad}{bc}\right)+\right. \tag{6}$$
$$+\left(\frac{a}{c}\right)^{1/2+i\alpha}\left(1-\frac{ad}{bc}\right)F\left(\frac{1}{2}+i\alpha,1;1;1-\frac{ad}{bc}\right)+$$
$$\left.+\left(\frac{a}{c}\right)^{-1/2+i\alpha}F\left(-\frac{1}{2}+i\alpha,1;1;1-\frac{ad}{bc}\right)\right]$$

Для давления под серединой штампа ($x=0$) имеем

$$P(t,0)=\frac{P_0}{\pi l}\frac{b}{a}\left(\frac{a}{c}\right)^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}+k-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{c}-\frac{2ka}{c}+1\right)\times$$
$$\times\frac{(b/a-d/c)^k}{(k!)^2}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1}k!-e^{-bt/a}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}k\ldots(k-n+1)\,t^{k-n}\right]$$

При мгновенном нагружении давление в середине штампа определяется формулой

$$P(0,0)=\frac{P_0}{\pi l}\frac{\varkappa+1}{\sqrt{\varkappa}} \tag{7}$$

При длительном нагружении давление монотонно изменяется и стремится к некоторому пределу

$$\underset{t\to\infty}{P(t,0)}=\frac{P_0}{\pi l}\left\{\left[\left(\frac{a}{c}\right)^{1/2}+\left(\frac{a}{c}\right)^{-1/2}\right]F\left(-\frac{1}{2},1;1;1-\frac{ad}{bc}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{a}{c}\right)^{1/2}\left(1-\frac{ad}{bc}\right)F\left(\frac{1}{2},1;1;1-\frac{ad}{bc}\right)\right\}$$

Воспользовавшись значениями для некоторых гипергеометрических функций, это выражение для давления можно преобразовать к более простому виду

$$\underset{t\to\infty}{P(t,0)}=\frac{P_0}{\pi l}\frac{b/d+1}{\sqrt{b/d}} \tag{8}$$

Отношение b/d выражается следующим образом через постоянные материалы:

$$\frac{b}{d}=\frac{3(\beta+k_1)-\nu(\beta+k_2)}{\beta+k_1+\nu(\beta+k_2)}=\frac{3-\nu\eta}{1+\nu\eta}\qquad\left(\eta=\frac{\beta+k_2}{\beta+k_1}\right)$$

Формула для давления при $t\to\infty$ (8) имеет такой же вид, как для давления в начальный момент времени (7), но с измененным значением $\varkappa$; это и следовало ожидать. Из сопоставления выражений (7) и (8) следует, что давление под серединой штампа будет возрастать с увеличением времени при $\eta<1$ и $\eta>2\nu^{-1}-1$ и убывать при $1<\eta<2\nu^{-1}-1$. (Коэффициент Пуассона для реальных материалов изменяется в пределах $0<\nu<1/2$).

Поступила 8 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Деформация ортотропного упруго-вязкого тела в условиях плоской задачи. Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 4.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория упругости. Кручение и изгиб, изд. 5, М., «Наука», 1966.
3. Абрамов В. М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения. Докл. АН СССР, 1937, т. 17, № 4.