К ТЕОРИИ ВОЛН РЕЛЕЕВСКОГО ТИПА В АНИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

И. О. Осипов

(Петрозаводск)

В работе [1] для плоского случая строится решение, представляющее волны релеевского типа в рассматриваемом полупространстве, используя метод комплексных решений Смирнова — Соболева [2]; исследуется вопрос существования волн релеевского типа.

Изучение существования волн релеевского типа для анизотропного полупространства в отличие от изотропного сводится к исследованию функции релеевского типа и некоторых алгебраических функций, входящих в решение. Этот вопрос рассмотрен в работе [1], ниже делаются дополнения к этой работе.

Решения (71), (72) и (77_1) (77_2) в работе [1], выражающие волны релеевского типа в анизотропном полупространстве, могут быть представлены единой формой

$$\begin{aligned} u_1 &= R\{c\theta\lambda_1 F_2(\theta) w_1(t+\theta x+\lambda_1 y)\} \\ v_1 &= R\{(a\theta^2+d\lambda_1^2-1)\ \ F_2(\theta)\ \ w_1(t+\theta x+\lambda_1 y)\} \\ u_2 &= R\{-c\theta\lambda_2 F_1(\theta) w_1(t+\theta x+\lambda_2 y)\} \\ v_2 &= R\{-(a\theta^2+d\lambda_2^2-1)F_1(\theta) w(t+\theta x+\lambda_2 y)\} \\ F_k &= a\theta^2-(c-d)\lambda_k^2-1 \qquad (k=1,2) \end{aligned} \tag{1}$$

при значениях комплексной переменной θ, равных корням уравнения релеевского типа $\theta = \pm 1/R$.

Здесь значения λ_1 и λ_2 имеют выражения

$$\lambda_k = \{A(\theta) + (-1)^k [A^2(\theta) - B(\theta)]^{1/2}\}^{1/2} \qquad (k=1,2) \tag{2}$$

$$A(\theta) = \frac{(b+d)-(ab+d^2-c^2)\theta^2}{2bd}, \qquad B(\theta) = \frac{a}{b}\left(\frac{1}{a}-\theta^2\right)\left(\frac{1}{d}-\theta^2\right)$$

Упругие постоянные реальных анизотропных сред рассматриваемого класса удовлетворяют условиям

$$a > d, \qquad b > d, \qquad d > 0, \qquad ab-(c-d)^2 > 0 \tag{3}$$

которые выражают необходимые и достаточные условия положительной определенности формы упругой энергии.

В работе [1] установлено, что при любых значениях упругих постоянных, удовлетворяющих условиям (3), функция релеевского типа для рассматриваемого полупространства имеет два вещественных корня $\theta = \pm 1/R$, которые находятся внутри интервалов $(\pm 1 / \sqrt{d}, \pm\infty)$. Следовательно, решение (1) существует при любых значениях упругих постоянных.

Остается убедиться, что решение (1) при любых значениях упругих постоянных, удовлетворяющих условиям (3), представляет собой волны релеевского типа, действие которых проявляется главным образом на границе полупространства $y = 0$ и быстро затухает с удалением от нее. Для этого достаточно показать, что при $\theta = \pm 1 / R$ алгебраические функции (2) имеют мнимые или комплексные значения.

В работе [1] была сделана попытка решить этот вопрос, предполагая, что для величин, входящих в выражения (2), возможны следующие три случая:

$$A(\pm 1/R) < 0, \quad A^2(\pm 1/R) - B(\pm 1/R) > 0 \tag{4}$$

$$A^2(\pm 1/R) - B(\pm 1/R) < 0 \tag{5}$$

$$A(\pm 1/R) > 0, \quad A^2(\pm 1/R) - B(\pm 1/R) > 0 \tag{6}$$

Первые два случая приводят к утверждению, что решения (1) представляют волны релеевского типа; третий случай, связанный с выполнением условий (6), в работе [1] остался не изучен.

Если при некоторых упругих постоянных условия (6) действительно имеют место, то при $\theta = \pm 1 / R$, функции (2) будут иметь вещественные значения. Следовательно, в этом случае волны релеевского типа не существуют, решение (1) будет выражать некоторый другой тип волн.

В работе [1] остался не изучен вопрос, все ли три случая, выраженные условиями (4) — (6), могут иметь место, а если могут, то при каких условиях для упругих постоянных имеет место тот или иной случай. Таким образом, остался не решен вопрос для всех ли сред рассматриваемого класса анизотропии волны релеевского типа могут существовать, а если не для всех, то при каких условиях для упругих постоянных такие волны могут существовать.

Рассмотрим эти вопросы, пользуясь результатами исследования алгебраических функций (2), выполненного в работах автора [3,4]. Необходимо иметь в виду, что в работе [3]

$$n_k = l\lambda_k, \quad \vartheta = l/ \quad m = 1 / \theta$$

При выполнении условий (3) могут иметь место неравенства

$$(a - d)b - c^2 > 0 \tag{7}$$

$$(a - d)b - c^2 < 0 \tag{8}$$

При выполнении условия (7) функции (2) на участках $(\pm 1 / \sqrt{d}, \pm \infty)$ вещественной оси комплексной плоскости θ имеют мнимые или комплексные значения в зависимости от выполнения тех или иных дополнительных условий для упругих постоянных, указанных в [3].

Следовательно, при значениях корней уравнения релеевского типа $\theta = \pm 1/R$ функции (2) принимают мнимые или комплексные значения, а решение (1) выражает волны релеевского типа.

Если выполняется условие (8), функции (2) на участках $(\pm 1 / \sqrt{d}, \pm \theta_1^0)$ имеют вещественные значения, на участках $(\pm \theta_1^\circ, \pm \infty)$ — комплексные. Здесь точки $\pm \theta_1^\circ$ представляют собой вещественные нули функции под внутренним радикалом (2) и определяются выражением [4]

$$\theta_1^\circ = \left(\frac{M - \sqrt{4bdc^2 [c^2 - (a - d)(b - d)]}}{K_1 K_2}\right)^{1/2} \tag{9}$$

$$K_1 = ab - (c - d)^2, \qquad K_2 = ab - (c + d)^2$$

$$M = (b + d)[(a - d)(b - d) - c^2] - (a - b)(b - d)d$$

Установим каким из этих участков могут принадлежать корни уравнения ралеевского типа при (8).

На участках $(\pm 1 / \sqrt{d} \pm \infty)$ вещественной оси первого листа римановой поверхности функция релеевского типа имеет вид [1]

$$R(\theta) = \mp iR_1(\theta)$$

$$R_1(\theta) = \{[ab - (c - d)^2]\, \theta^2 - b\} \sqrt{\theta^2 - 1/d} - \sqrt{ab}\sqrt{\theta^2 - 1/a} \tag{10}$$

причем на границах этих участков

$$R_1(\pm 1 / \sqrt{d}) < 0, \qquad R_1(\pm \infty) > 0 \tag{11}$$

Подставляя (9) в выражение (10), получим

$$R_1(\pm \theta_1^\circ) = \frac{\sqrt{dc^2}\,[D^+ - \sqrt{bN}]\,[\sqrt{bN} - D^-]}{\sqrt{d}K_2\sqrt{M + \sqrt{4bdc^2 N}}}, \quad D^\pm = \sqrt{d}(b - d) \pm \sqrt{dc^2} \tag{12}$$

При выполнении (8) имеем [3]

$$K_2 < 0, \qquad N = c^2 - (a - d)\ (b - d) > 0 \tag{13}$$

В выражении (12) разности квадратов в квадратных скобках имеют значения

$$\begin{aligned} &[\sqrt{d}\,(b-d)+\sqrt{dc^2}]^2-[\sqrt{bN}]^2=(b-d)\,K_1>0 \\ &[\sqrt{bN}]^2-[\sqrt{d}\,(b-d)-\sqrt{dc^2}]^2=-(b-d)\,K_2>0 \end{aligned} \tag{14}$$

Для величин под внешним радикалом в знаменателе (12) имеем

$$\sqrt{4bdc^2N}-|M|>0 \tag{15}$$

так как при (8)

$$4bdc^2N - M^2 = -(b-d)^2K_1K_2 > 0$$

Из (12)—(15) следует, что $R_1(\theta_1^\circ) < 0$. Тогда согласно (11) можем утверждать, что при условии (8) корни уравнения релеевского типа находятся внутри участков $(\pm\theta_1^\circ,\ \pm\infty)$.

Следовательно, в случае выполнения условия (8) при значениях корней уравнения релеевского типа $\theta = \pm 1/R$ функции (2) имеют комплексные значения, а решение (1) представляет собой волны релеевского типа.

В заключение отметим, выполненные исследования позволили до конца изучить рассматриваемый в работе [1] вопрос существования волн релеевского типа на свободной границе анизотропного полупространства с четырьмя упругими постоянными.

Установлена возможность существования волн релеевского типа при любых реальных значениях упругих постоянных для сред рассматриваемого класса анизотропии.

Продолжено изучение функции релеевского типа. Установлено, что корни уравнения релеевского типа при условии (7) находятся внутри участков $(\pm 1\,/\,\sqrt{d},\ \pm\infty)$, при условии (8) — внутри участков $(\pm\ \theta_1^\circ,\ \pm\infty)$. Следовательно, скорость волн релеевского типа R при условии (7) не превышает значения $\sqrt{d}$, при условии (8) — значения $1\,/\,\theta_1^0$.

Показано, что для любых значений упругих постоянных при значениях корней уравнения релеевского типа функции (2) принимают мнимые или комплексные значения. Следовательно, из трех предполагаемых в работе [1] случаев могут иметь место, в зависимости от упругих постоянных, случаи (4) и (5); третий случай (6) не имеет места.

Поступила 25 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Свекло В. А. Упругие колебания анизотропного тела. Уч. зап. ЛГУ, сер. матем. н., 1949, вып. 17.
2. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2. М.— Л., ОНТИ, 1937.
3. Осипов И. О. К методу функционально-инвариантных решений для задач динамической теории упругости анизотропных сред. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1963, № 3.
4. Осипов И. О. К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.