К ТЕОРИИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

И. М. Беленький

(Москва)

Рассмотрены некоторые свойства гамильтоновых систем, в связи с поведением двух функций: билинейной формы канонических переменных Ω и функции Пуанкаре Ω^*. В частности, показано, что при движении фазовой точки вдоль по «прямому» пути, элементарное действие по Гамильтону представляет полный дифференциал разности $(\Omega - \Omega^*)$. В случае периодических орбит установлена многозначность действия по Гамильтону, связанная с цикличностью функции Пуанкаре Ω^*.

Рассмотрены некоторые инварианты при свободных вполне канонических преобразованиях и указаны условия, при выполнении которых существуют интегралы, содержащие вековые члены.

Полученные результаты проиллюстрированы на примере задачи Кеплера.

1. Общие зависимости. Состояние гамильтоновой системы, как известно, описывается канонической системой уравнений

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j=1, 2, \ldots, k) \tag{1.1}$$

Умножая уравнения (1.1) соответственно на p_j и q_j и складывая их, после суммирования по индексу j получим дифференциальное соотношение для билинейной формы $\Omega(p, q)$ канонических переменных p_j и q_j

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_j} p_j - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial q_j} q_j \qquad \left(\Omega = \sum_{j=1}^{k} p_j q_j\right) \tag{1.2}$$

Следуя Пуанкаре [1], введем функцию Ω^* (у Пуанкаре эта функция обозначена через Ω без звездочки) при помощи дифференциального соотношения

$$\frac{d\Omega^*}{dt} = H + \sum_{j=1}^{k} q_j \frac{dp_j}{dt} = H - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial q_j} q_j \tag{1.3}$$

Функция Ω^* определена с точностью до аддитивной постоянной, зависящей от параметров, которые определяют начальное состояние системы.

Исключая вторые слагаемые из правых частей равенств (1.3) и (1.2) и замечая, что функция Гамильтона $H(t, p, q)$ определяется соотношением

$$H(t, p, q) = \sum_{j=1}^{k} p_j q_j^{\bullet} - L \qquad \left(p_j = \frac{\partial L}{\partial q_j^{\bullet}}\right)$$

нетрудно получить

$$d(\Omega - \Omega^*) = \sum_{j=1}^{k} p_j dq_j - H dt = L dt \tag{1.4}$$

Этот результат позволяет сформулировать следующее предложение:

Теорема 1.1. Пусть фазовая точка $N^*(p, q)$ динамической системы (1.1) с гамильтонианом $H = H(t, p, q)$ движется в $2k$-мерном фазовом пространстве E^{2k}. Тогда в действительном движении вдоль по прямому пути — элементарное действие по Гамильтону $L dt$ — представляет полный дифференциал разности между билинейной формой канонических переменных Ω и функцией Пуанкаре Ω^*.

Следствие 1.1. Обращение в нуль вариации

$$\delta(\Omega - \Omega^*)\big|_{A_1}^{A_2} = 0 \tag{1.5}$$

является необходимым условием при движении изображающей точки системы, в $(k + 1)$-мерном расширенном пространстве конфигураций $A(q_j, t)$, вдоль по «прямому» пути из положения $A_1(q_j^{(1)}, t_1)$ в положение $A_2(q_j^{(2)}, t_2)$. Это следует непосредственно из принципа Гамильтона в силу (1.4).

Теорема 12. Имеет место и обратное утверждение, т. е. если вдоль некоторого пути выполняется условие (1.5), то рассматриваемый путь будет прямым.

Это следует из рассмотрения вариации разности ($\Omega - \Omega^*$). Учитывая при этом, что варьирование изохронное ($\delta t = 0$), а вариации обобщенных координат q_j на концах равны нулю ($\delta q_j^{(1)} = 0$, $\delta q_j^{(2)} = 0$), нетрудно получить

$$\delta(\Omega - \Omega^*)\Big|_{A_1}^{A_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^{k} \left(q_j^{\bullet} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \sum_{j=1}^{k} \left(p_j^{\bullet} + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right\} dt = 0$$

Отсюда следуют уравнения Гамильтона (1.1), что и доказывает достаточность условия (1.5).

Соотношение (1.4) справедливо для произвольных гамильтоновых систем как обратимого, так и необратимого типов. Для консервативных же систем, т. е. в условиях существования обобщенного интеграла энергии $H(p, q) = h$, оно было получено ранее [1, 2].

2. Многозначность действия по Гамильтону в случае периодических орбит. Пусть гамильтонова система (1.1) допускает периодическое решение $p_j(t)$ и $q_j(t)$ с некоторым периодом τ, а фазовая точка $N^*(p, q)$ совершает периодическое движение по некоторой замкнутой кривой (c). Определим действие по Гамильтону при движении фазовой точки $N^*(p, q)$ по циклу (c). Интегрируя (1.4) и замечая, что

$$p_j(t + \tau) = p_j(t), \quad q_j(t + \tau) = q_j(t), \quad \Omega(t + \tau) = \Omega(t)$$

получаем

$$\oint_{(c)} L dt = -\alpha \qquad (\alpha = \Omega^*(t + \tau) - \Omega^*(t)) \tag{2.1}$$

Это можно записать и в другой форме

$$\int_0^{\tau} \sum_{j=1}^{k} p_j dq_j - H dt = -\alpha \tag{2.2}$$

Таким образом, за время τ обхода цикла (c) действие по Гамильтону изменяется на циклическую постоянную α.

Для натуральных консервативных систем фазовый поток протекает по изоэнергетической поверхности

$$H(p, q) = T^*(p, q) + V(q) = h \tag{2.3}$$

Здесь $T^*(p, q)$ — союзное выражение кинетической энергии, $V(q)$ — потенциальная энергия, а h — постоянная энергия.

Для таких систем циркуляция действия Γ, взятая по циклу (c), в силу (2.2) и (2.3) будет равна [3]

$$\Gamma(c) = \oint_{(c)} \sum_{j=1}^{k} p_j dq_j = -\oint_{(c)} q_j dp_j = h\tau - \alpha \tag{2.4}$$

Циркуляцию действия $\Gamma(c)$ можно выразить через среднее значение кинетической энергии $\langle T(\tau) \rangle$ за время периода τ. Действительно, в силу (2.1) и (2.3) получаем

$$\langle T(\tau) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} T^*(p(t), q(t)) dt = \frac{h\tau - \alpha}{2\tau} \tag{2.5}$$

и, следовательно, циркуляция действия $\Gamma(c)$ будет равна

$$\Gamma(c) = \oint_{(c)} \sum_{j=1}^{k} p_j dq_j = 2\tau \langle T(\tau) \rangle \tag{2.6}$$

Во многих случаях циклическую постоянную α, а следовательно, и циркуляцию $\Gamma(c)$ можно весьма просто выразить через постоянную энергии h и период τ.

Пусть консервативная система движется в силовом поле, потенциальная энергия $V(q)$ которого — однородная функция обобщенных координат q_j степени n, а союзное выражение кинетической энергии $T^*(q, p)$ — квадратичная форма обобщенных импульсов p_j и однородная функция степени $(-\nu)$ относительно обобщенных координат q_j. Тогда, как известно [2], в случае периодических движений циклическая постоянная α равна

$$\alpha = \frac{2+\nu-n}{2+\nu+n} h\tau \quad (h \neq 0), \qquad \alpha = -2\tau \langle T(\tau)\rangle \quad (h=0) \tag{2.7}$$

и, следовательно, в силу (2.4) имеем

$$\Gamma(c) = \frac{2n}{2+\nu+n} h\tau \quad (h \neq 0), \qquad \Gamma(c) = -\alpha \quad (h=0) \tag{2.8}$$

Проиллюстрируем сказанное выше на примере задачи Кеплера. Пусть единичная масса ($m = 1$) под действием притягивающего центра O с потенциалом $V = -\mu / r$ (μ — приведенная масса), совершает периодическое движение по эллиптической орбите (c). Вычислим значение J действия по Гамильтону при обходе орбиты (c). Выписав для этого лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) + \frac{\mu}{r} = h + \frac{2\mu}{r} \qquad (h < 0) \tag{2.9}$$

и воспользовавшись интегралом площадей $cdt = r^2 d\vartheta$, а также известными соотношениями задачи двух тел [3, 4]

$$p = r(1 + e\cos\vartheta), \qquad h = -\mu / 2a, \qquad c = \sqrt{\mu}\sqrt{a(1-e^2)}$$

получим

$$J = \oint\limits_{(c)} Ldt = h\tau + \frac{2\mu p}{c}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{1 + e\cos\vartheta} \tag{2.10}$$

Здесь r — радиус-вектор, ϑ — истинная аномалия, a — большая полуось эллипса, e — эксцентриситет, c — постоянная площадей, τ — период.

Интеграл, стоящий в правой части (2.10), равен

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{1 + e\cos\vartheta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}$$

Воспользовавшись далее значением для периода τ, окончательно получим

$$J = h\tau - 4h\tau = -3h\tau \quad (\tau = 2\pi a^{3/2} / \sqrt{\mu})$$

Так как J равно взятой с обратным знаком циклической постоянной α, то циркуляция действия $\Gamma(c)$ в силу (2.3) будет равна $\Gamma(c) = h\tau - \alpha = -2h\tau$.

Этот же результат можно было получить и непосредственно воспользовавшись (2.8), если только заметить, что в случае задачи Кеплера имеем $\nu = 0$ и $n = -1$.

Теорема 2.1. Пусть фазовая точка системы, состоящей из N гравитирующих точечных масс, совершает при ненулевом значении постоянной энергии ($h \neq 0$) периодическое движение по некоторой кривой (c).

Тогда если сила взаимного притяжения между частицами обратно пропорциональна ($m + 1$)-степени расстояния между ними, то циклическая постоянная α и циркуляция $\Gamma(c)$ будут соответственно равны

$$\alpha = \frac{2+m}{2-m} h\tau, \qquad \Gamma(c) = \frac{-2m}{2-m} h\tau \qquad (h \neq 0) \tag{2.11}$$

Это следует непосредственно из (2.7) и (2.8), если только заметить, что для рассматриваемой гравитирующей системы следует принять $\nu = 0$ и $n = -m$.

Следствие 2.1. Фазовая точка N^* (p, q) рассматриваемой гравитирующей системы не может совершать периодических движений при ненулевом значении постоянной энергии $h \neq 0$, если только $m = 2$.

При $m = 2$ фазовая точка N^* (p, q) может совершать периодические движения лишь для параболического типа движения ($h = 0$), что согласуется с движением материальной точки в центральном поле [5].

3. О некоторых инвариантах при вполне канонических преобразованиях. Рассмотрим так называемое свободное вполне каноническое преобразование с отличным от нуля функциональным определителем D

$$(Q_j, P_j) \to (q_j, p_j) \qquad \left(D = \frac{\partial (Q_j, P_j)}{\partial (q_j, p_j)} \neq 0\right) \tag{3.1}$$

При этом область G изменения переменных (p_j, q_j) преобразуется взаимно однозначно в область G' изменения переменных (P_j, Q_j), а цикл (c) преобразуется в цикл (c').

Так как преобразование (3.1) является свободным, то в качестве независимых переменных могут быть приняты переменные q_j и Q_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

Принимая в качестве производящей функцию $V = V(q_j, Q_j)$, выпишем основное дифференциальное соотношение, определяющее вполне каноническое преобразование [6]

$$\sum_{j=1}^{k} P_j dQ_j = \sum_{j=1}^{k} p_j dq_j + dV(q_j, Q_j) \tag{3.2}$$

При этом новая функция Гамильтона $H'(t, P, Q)$ получается из первоначальной функции $H(t, p, q)$ простой заменой переменных (3.1), так что

$$H(t, p, q) = H'(t, P, Q) \tag{3.3}$$

Теорема 3.1. Пусть фазовая точка N^* (p, q) гамильтоновой системы (1.1), двигаясь по изоэнергетической поверхности $H(p, q) = h$, совершает в фазовом пространстве E^{2k} периодическое движение по некоторому циклу (c). Тогда при любом вполне каноническом преобразовании (3.2) произведение периода τ на среднее значение кинетической энергии $\langle T(\tau)\rangle$ является инвариантом. Этот результат следует непосредственно из условия инвариантности циркуляции $\Gamma(c)$ (2.6). Отсюда, в частности, в силу (2.5) следует, что инвариантами также будут: а) величина $(h\tau - \alpha)$ при $h \neq 0$ и б) циклическая постоянная α при $h = 0$.

4. О некоторых интегралах, содержащих вековые члены. Рассмотрим некоторую гамильтонову систему (1.1), и пусть решениями этой системы будут

$$q_j = q_j(t, \alpha_i), \; p_j = p_j(t, \alpha_i) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{4.1}$$

Здесь α_i $(i = 1, 2, \ldots, 2k)$ — постоянные интегрирования. Следуя Пуанкаре [1], введем $2k$-функции вида

$$J_i = 2\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i} q_j + \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_i} + \sum_{j=1}^{k} q_j \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i} \tag{4.2}$$

Дифференцируя по t, в силу (1.1) и (1.2) получаем

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\frac{d\Omega}{dt}\right) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i} - \sum_{j=1}^{k} q_j \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)$$

Дифференцируя далее (1.3) по α_i

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{d\Omega^*}{dt}\right)=\frac{\partial H}{\partial\alpha_i}-\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial\alpha_i}-\sum_{j=1}^{k}q_j\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)$$

и замечая, что

$$\frac{\partial H}{\partial\alpha_i}=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial\alpha_i}+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial\alpha_i}\tag{4.3}$$

в результате упрощений получаем

$$\frac{dJ_i}{dt}=\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{d}{dt}(\Omega+\Omega^*)\right)\tag{4.4}$$

Введем еще $2k$-функций вида

$$J_i^*=\sum_{j=1}^{k}p_j\frac{\partial q_j}{\partial\alpha_i}\qquad(i=1,2,\ldots,2k)\tag{4.5}$$

Дифференцируя J_i^* по t в силу уравнений системы (1.1) получаем

$$\frac{dJ_i^*}{dt}=\sum_{j=1}^{k}p_j\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)-\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial\alpha_i}$$

Если теперь продифференцировать (1.2) по α_i и воспользоваться (4.3), то после упрощений получим

$$\frac{dJ_i^*}{dt}=\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{d}{dt}(\Omega-\Omega^*)\right)\tag{4.6}$$

что в силу (1.4) можно представить и в такой форме

$$\frac{dJ_i^*}{dt}=\frac{\partial L}{\partial\alpha_i}\qquad(i=1,2,\ldots,2k)\tag{4.7}$$

Из формул (4.4) и (4.6) в результате интегрирования нетрудно получить

$$J_i+J_i^*=2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_i}+\text{const},\qquad J_i-J_i^*=2\frac{\partial\Omega^*}{\partial\alpha_i}+\text{const}\tag{4.8}$$

Здесь константы, стоящие в правых частях, зависят от постоянных (α_1, α_2, ..., α_{2k}).

Теорема 4.1. Пусть консервативная система движется в силовом поле, потенциальная энергия $V(q)$ которого — однородная функция обобщенных координат q_j степени n, а союзное выражение кинетической энергии $T^*(q, p)$ — квадратичная форма обобщенных импульсов p_j и однородная функция степени ($-\nu$) относительно обобщенных координат q_j. Тогда если выполняется условие $1+n+\nu=0$, то при ненулевом значении постоянной энергии h существуют интегралы, содержащие вековые члены вида

$$J_i=(1-2n)\beta_i t+\text{const}\qquad(\beta_i=\partial H/\partial\alpha_i)\tag{4.9}$$

Действительно, если выполняются указанные выше условия однородности функций $V(q)$ и $T^*(q, p)$, то, как известно, имеет место соотношение [2]

$$d/dt\,(\Omega+\Omega^*)=(1-2n)h+2(1+n+\nu)T^*\qquad(H(p,q)=h)\tag{4.10}$$

Далее, воспользовавшись условием $1+n+\nu=0$ и замечая, что $H(p(t,\alpha_i), q(t,\alpha_i))=H^*(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k})=h$, в результате интегрирования (4.10), получаем интегралы вида (4.9), которые можно представить в следующей форме:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_i}+\sum_{j=1}^{k}q_j\frac{\partial p_j}{\partial\alpha_i}=(1-2n)\beta_i t+\text{const}\qquad(h\neq 0)\tag{4.11}$$

В случае параболических типов движения ($h = 0$) вековые члены исчезают и будут существовать интегралы вида

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_i} + \sum_{j=1}^{k} q_j \frac{\partial p_j}{\partial\alpha_i} = \text{const} \qquad (h = 0) \tag{4.12}$$

Заметим, что для свободной системы, состоящей из N гравитирующих по ньютонианскому закону точечных масс, условие $1 + n + \nu = 0$ выполняется, поскольку для указанной системы имеем $\nu = 0$ и $n = -1$. Следовательно, в силу теоремы (4.1) при $h \neq 0$ существуют интегралы вида

$$J_i = 3\beta_i t + \text{const} \qquad \left(\beta_i = \frac{\partial H}{\partial\alpha_i},\ i = 1, 2, \ldots, 2k\right) \tag{4.13}$$

что совпадает с результатом, полученным ранее Пуанкаре [1].

Так, для рассмотренной выше задачи Кеплера выпишем гамильтониан, приняв в качестве обобщенных координат декартовы координаты $q_1 = x$ и $q_2 = y$. Имеем

$$H = \tfrac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \mu / r = h \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

Воспользовавшись далее (1.2) и (1.3), при помощи теоремы Эйлера об однородных функциях нетрудно получить

$$\frac{d\Omega}{dt} = 2h + \frac{\mu}{r}, \qquad \frac{d\Omega^*}{dt} = h - \frac{\mu}{r}$$

Это приводит к соотношению

$$d/dt\,(\Omega + \Omega^*) = 3h \quad (h = -\mu/2a)$$

Отсюда при помощи (4.4) в результате интегрирования и дифференцирования по параметру α_i получим интегралы вида (4.13).

В частности, для рассмотренной выше задачи Кеплера, полагая $\alpha_1 = a$ и $\alpha_2 = e$ и замечая, что

$$x = r\cos\vartheta = a\,(\cos E - e), \quad y = r\sin\vartheta = a\sqrt{1 - e^2}\sin E$$

(E — эксцентрическая аномалия) нетрудно получить

$$p_x = -\mu^{1/2}a^{-1/2}\frac{\sin E}{1 - e\cos E}, \qquad p_y = \mu^{1/2}a^{-1/2}(1 - e^2)^{1/2}\frac{\cos E}{1 - e\cos E}, \qquad \Omega = ea^{1/2}\mu^{1/2}\sin E$$

Интегралы (4.13) принимают при этом следующий вид:

$$J_1 = x\frac{\partial p_x}{\partial a} + y\frac{\partial p_y}{\partial a} + \frac{\partial\Omega}{\partial a} = \frac{3}{2}\mu a^{-2}t \qquad \left(\beta_1 = \frac{\partial h}{\partial a} = \frac{\mu}{2a^2}\right)$$

$$J_2 = x\frac{\partial p_x}{\partial e} + y\frac{\partial p_y}{\partial e} + \frac{\partial\Omega}{\partial e} = 0 \qquad \left(\beta_2 = \frac{\partial h}{\partial e} = 0\right)$$

Поступила 30 X 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. М., «Наука», 1965, стр. 26—28.
2. Беленький И. М. О финальных движениях консервативных систем. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
3. Synge J. L. Classical dynamics. Berlin, Springer, 1960. (Рус. перев.: Классическая динамика, М., Физматгиз, 1963, стр. 294, 103—105).
4. Голдстейн Г. Классическая механика. М., Гостехиздат, 1957, стр. 91—95.
5. Беленький И. М. О достаточных условиях отсутствия периодических траекторий для консервативных систем. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
6. Lanczos C. The variational principles of mechanics. Toronto, 1962 (Рус. перев.: Вариационные принципы механики. М., «Мир», 1965, стр. 238.).