О ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

И. Илиев (Пловдив)

Применяя аппарат тензорного исчисления, автор изучает существование линейных интегралов. На примере показано, что система может иметь функцию силы, хотя она и не имеет линейного интеграла [1].

1. Рассмотрим голономную систему с кинетической энергией

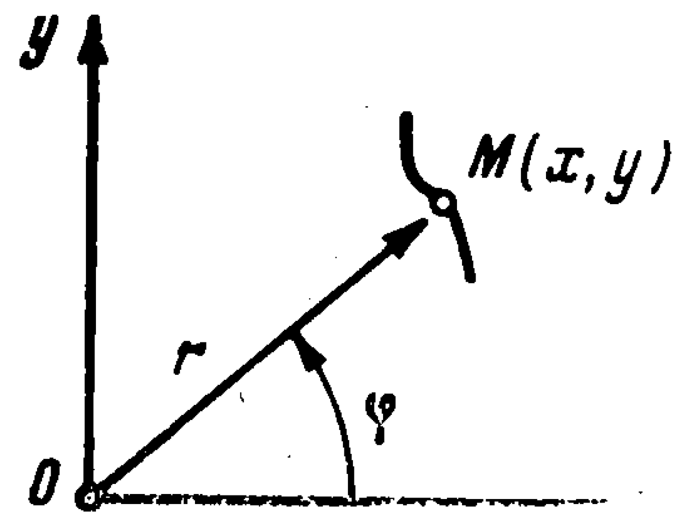
$$T = {}^1/_2 g_{\lambda\mu} q^{\lambda\cdot} q^{\mu\cdot}$$

и обобщенными силами $Q_\varkappa$. Здесь и в дальнейшем греческие индексы принимают значение 1, 2, 3, ..., n; точка в позиции штриха означает производную по времени t.

Уравнения движения системы в контрвариантной записи имеют вид

$$q^{\rho\cdot\cdot} + \Gamma^\rho_{\lambda\mu} q^{\lambda\cdot} q^{\mu\cdot} = Q^\rho \qquad (1.1)$$

$$\Gamma^\rho_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\rho\nu} \left[\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial q^\mu} + \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial q^\nu} \right], \qquad Q^\rho = g^{\rho\nu} Q_\nu$$



Фиг. 1

Уравнения (1.1) могут быть записаны также в следующем виде:

$$\delta q^\rho / dt = Q^\rho \qquad (1.2)$$

Рассмотрим следующий простой пример. Пусть точка M двигается под действием центральной силы. В качестве переменных выберем полярный радиус-вектор $q^1 = r$ и полярный угол $q^2 = \varphi$. Примем $m = 1$, тогда

$$2T = r^{2\cdot} + r^2 \varphi^{2\cdot}, \qquad Q_1 = F_2, \; Q_2 = 0$$

Определим $\Gamma^\rho_{\lambda\mu}$. Оказывается, что (фиг. 1)

$$\Gamma^1_{22} = -r, \; \Gamma^2_{12} = 1/r, \; \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{12} = 0$$

Допустим, что система имеет линейный первый интеграл

$$\lambda_\varkappa q^{\varkappa\cdot} = C, \qquad C = \mathrm{const}$$

Дифференцируя это соотношение, получаем

$$\delta\lambda_\varkappa q^{\varkappa\cdot} + \lambda_\varkappa \delta q^{\varkappa\cdot} = 0$$

Тогда, используя (1.2), находим

$$\delta\lambda_\varkappa / dt \, q^{\varkappa\cdot} + \lambda_\varkappa Q^\varkappa = 0$$

Отсюда и из соотношения

$$\delta\lambda_\varkappa / dt = \nabla_\rho \lambda_\varkappa q^{\rho\cdot}$$

после преобразований получаем

$$\nabla_\rho \lambda_\varkappa q^{\rho\cdot} q^{\varkappa\cdot} + \lambda_\varkappa Q^\varkappa = 0$$

Из этого соотношения имеем

$$\nabla_\rho \lambda_\varkappa + \nabla_\varkappa \lambda_\rho = 0 \qquad (1.3)$$

$$\lambda_\varkappa Q^\varkappa = 0 \qquad (1.4)$$

Следовательно, чтобы $\lambda_\varkappa q^{\varkappa\cdot} = C$ был первым интегралом системы, необходимо и достаточно выполнение условия (1.4). Первое условие означает, что $\nabla_\varkappa \lambda_\rho$ есть кососимметричный тензор, а второе, что λ_ρ и $Q_\varkappa$ взаимно перпендикулярны, при этом первое условие не зависит от $Q_\varkappa$, а зависит только от вида $2T$.

Нахождение линейных интегралов расчленяется на следующие две задачи. Во-первых, требуется найти все ковариантные векторы, ковариантные производные которых кососимметричны; во-вторых, из них следует выделить векторы, перпендикулярные вектору обобщенных сил $Q_\varkappa$.

Обратимся к примеру, рассмотренному в начале работы. Возьмем вектор $\lambda = 0$, $\lambda_2 = r^2$. Непосредственным вычислением получается

$$\nabla_1\lambda_1 = 0, \quad \nabla_2\lambda_2 = 0, \quad \nabla_1\lambda_2 = r, \quad \nabla_2\lambda_1 = -r$$

Отсюда следует, что первое условие (1.4) выполняется. Теперь, учитывая равенства $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = r^2$, $Q^1 = F_2/r^2$, $Q^2 = 0$ и второе условие (1.4), получаем

$$\lambda_\varkappa Q^\varkappa = F_2/r^2 \cdot 0 + r^2 \cdot 0 = 0$$

Используя условия (1.4), отсюда можно сделать заключение, что $r^2\varphi^{\cdot} = C$ есть линейный интеграл.

Этот интеграл может быть получен из уравнений Лагранжа, так как φ есть циклическая координата. К этому вопросу можно подойти по-иному, выбирая в качестве параметров $q^1 = x$ и $q^2 = y$ прямоугольные координаты точки M; система при этом будет иметь циклическую координату, хотя и у нее есть линейный интеграл

$$yx^{\cdot} - xy^{\cdot} = C$$

Для изучения существования линейных интегралов в таком случае, когда система не имеет циклической координаты, обратимся к условиям (1.4). Положим $\Delta_\rho\lambda_\varkappa = \varepsilon_{\rho\varkappa}$. Из (1.4) следует $\varepsilon_{\rho\varkappa} = -\varepsilon_{\varkappa\rho}$, т. е. тензор $\varepsilon_{\rho\varkappa}$ — кососимметричный. Выполняя абсолютное дифференцирование, имеем

$$\nabla_\mu\nabla_\nu\lambda_\rho = \nabla_\mu\varepsilon_{\nu\rho} \tag{1.5}$$

Тогда

$$\nabla_\rho\nabla_\nu\lambda_\rho - \nabla_\nu\nabla_\rho\lambda_\rho = \nabla_\rho\varepsilon_{\nu\rho} = R_{\rho\nu\rho}{}^{\mu}\lambda_\mu$$

С другой стороны

$$\nabla_\nu\nabla_\rho\lambda_\nu - \nabla_\rho\nabla_\nu\lambda_\nu = \nabla_\nu\varepsilon_{\rho\nu} = R_{\nu\rho\nu}{}^{\mu}\lambda_\mu$$

Дифференцируя еще раз, получаем

$$\nabla_\nu\nabla_{\rho}\varepsilon_{\nu\rho} = \nabla_\nu R_{\rho\nu\rho}{}^{\mu}\lambda_\mu + R_{\rho\nu\rho}{}^{\mu}\nabla_\nu\lambda_\mu$$

$$\nabla_\rho\nabla_\nu\varepsilon_{\rho\nu} = \nabla_\rho R_{\nu\rho\nu}{}^{\mu}\lambda_\mu + R_{\nu\rho\nu}{}^{\mu}\nabla_\rho\lambda_\mu$$

Сложив левые и правые стороны, найдем

$$R_{\nu\rho\nu}{}^{\mu}\varepsilon_{\mu\rho} + R_{\nu\rho\rho}{}^{\mu}\varepsilon_{\nu\mu} = \nabla_\nu R_{\rho\nu\rho}{}^{\mu}\lambda_\mu + \nabla_\rho R_{\nu\rho\nu}{}^{\mu}\lambda_\mu + R_{\rho\nu\rho}{}^{\mu}\varepsilon_{\nu\mu} + R_{\nu\rho\nu}{}^{\mu}\varepsilon_{\rho\mu}$$

Окончательно

$$(\nabla_\nu R_{\rho\nu\rho}{}^{\mu} + \nabla_\rho R_{\nu\rho\nu}{}^{\mu})\lambda_\mu = 2(R_{\nu\rho\nu}{}^{\mu}\varepsilon_{\mu\rho} + R_{\nu\rho\rho}{}^{\mu}\varepsilon_{\nu\mu}) \tag{1.6}$$

Число этих уравнений совпадает с числом существенных компонент бивектора $\varepsilon_{\mu\rho}$. Так как система линейная относительно $\varepsilon_{\mu\rho}$, то она дает возможность определить $\varepsilon_{\mu\rho}$ как линейную комбинацию из $\lambda_\rho - \varepsilon_{\mu\rho} = \omega_{\mu\rho}{}^{\varkappa}\lambda_\varkappa$.

После подстановки полученных выражений в первое условие (1.4), имеем

$$\nabla_\rho\lambda_\varkappa = \omega_{\rho\varkappa}{}^{\nu}\lambda_\nu \tag{1.7}$$

Таким образом, вопрос разрешимости поставленной задачи сводится к нахождению решения системы частных дифференциальных уравнений. Составим условие интегрируемости

$$\nabla_\mu\nabla_\nu\lambda_\varkappa - \nabla_\nu\nabla_\mu\lambda_\varkappa = R_{\mu\nu\varkappa}{}^{\rho}\lambda_\rho = \omega_{\nu\varkappa}{}^{\rho}\omega_{\mu\rho}{}^{\pi}\lambda_\pi - \omega_{\mu\varkappa}{}^{\rho}\omega_{\nu\rho}{}^{\pi}\lambda_\pi + (\nabla_\mu\omega_{\nu\varkappa}{}^{\rho} - \nabla_\nu\omega_{\mu\varkappa}{}^{\rho})\lambda_\rho$$

Полученные соотношения должны быть выполнены для существования линейного интеграла и со вторым равенством (1.4) будут условиями существования решения указанного типа.

Рассмотрим, как преобразуются условия (1.4), когда система имеет циклическую координату q^{μ_0}. В этом случае $\lambda_\nu = g_{\nu\mu_0}$, так что

$$\nabla_\nu\lambda_\varkappa + \nabla_\varkappa\lambda_\nu = \nabla_\nu g_{\varkappa\mu_0} + \nabla_\varkappa g_{\nu\mu_0} = \frac{\partial g_{\varkappa\mu_0}}{\partial q^\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\varkappa}\, g_{\rho\mu_0} + \frac{\partial g_{\nu\mu_0}}{\partial q^\varkappa} - \Gamma^\rho_{\varkappa\nu}\, g_{\rho\mu_0}$$

где по индексу μ_0 дифференцирование не производится. По теореме Риччи

$$\frac{\partial g_{\varkappa\mu_0}}{\partial q^\nu} - \Gamma^\rho_{\varkappa\nu}\, g_{\rho\mu_0} = \Gamma^\rho_{\nu\mu_0}\, g_{\varkappa\rho}, \qquad \frac{\partial g_{\nu\mu_0}}{\partial q^\varkappa} - \Gamma^\rho_{\varkappa\nu}\, g_{\rho\mu_0} = \Gamma^\rho_{\varkappa\mu_0}\, g_{\nu\rho}$$

В этом случае условие (1.3) принимает вид

$$\nabla_\nu\lambda_\varkappa + \nabla_\varkappa\lambda_\nu = \Gamma^\rho_{\nu\mu_0}\, g_{\varkappa\rho} + \Gamma^\rho_{\varkappa\mu_0}\, g_{\nu\rho} = \Gamma_{\varkappa,\,\nu\mu_0} + \Gamma_{\nu,\,\varkappa\mu_0} = \frac{\partial g_{\varkappa\nu}}{\partial q^{\mu_0}} = 0$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial q^{\mu_0}} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\nu}}{\partial q^{\mu_0}}\, q^{\varkappa\cdot} q^{\nu\cdot} = 0$$

Второе условие (1.4) можно написать так

$$\lambda_\varkappa Q^\varkappa = g_{\mu_0\varkappa} Q^\varkappa = Q_{\mu_0} = 0$$

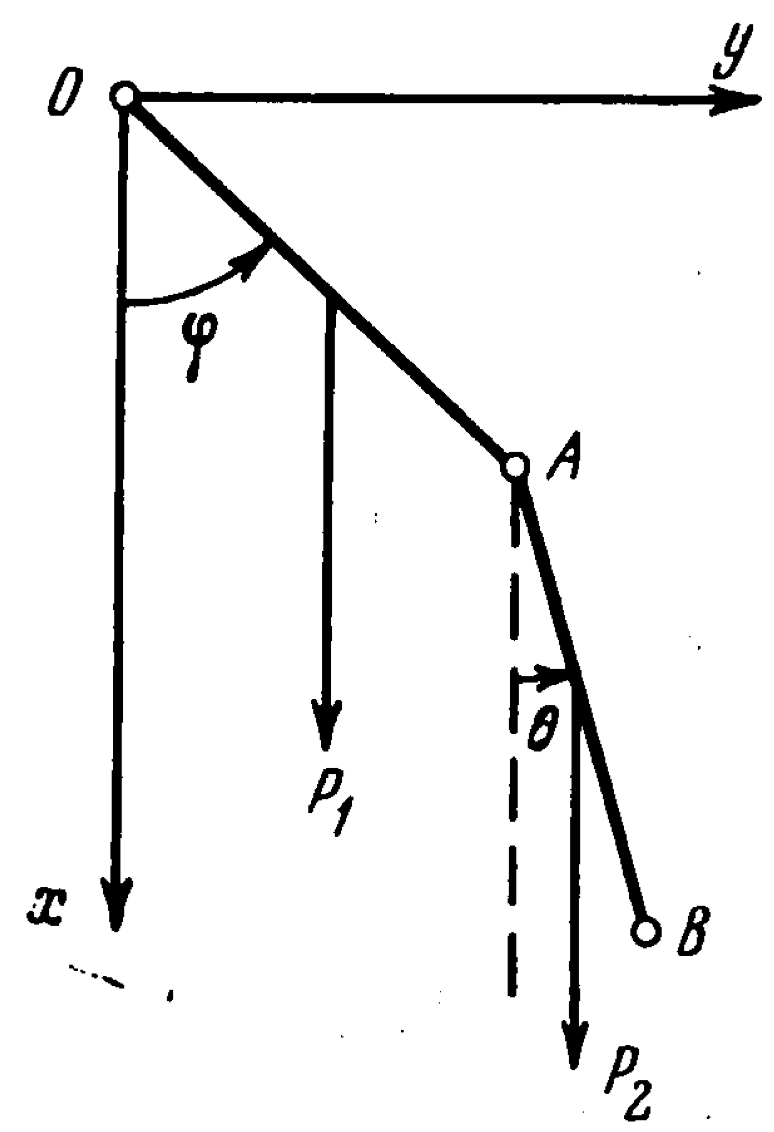
В конечном счете $\partial T / \partial q^{\mu_0} = 0$ и $Q_{\mu_0} = 0$ должны быть выполнены, если q^{μ_0} — циклическая координата. Эти условия хорошо известны в аналитической механике. К вопросу существования «скрытых» линейных интегралов можно подходить иначе. Из второго уравнения (1.4) абсолютным дифференцированием получается

$$\nabla_\rho\lambda_\varkappa Q^\varkappa + \lambda_\varkappa\nabla_\rho Q^\varkappa = 0, \qquad \nabla_\varkappa\lambda_\rho Q^\rho + \lambda_\rho\nabla_\varkappa Q^\rho = 0$$

Умножая первое уравнение на Q^ρ и второе на $Q^\varkappa$ и сложив их, находим

$$(\nabla_\varkappa\lambda_\rho + \nabla_\rho\lambda_\varkappa)\, Q^\varkappa Q^\rho + \lambda_\varkappa Q^\rho \nabla_\rho Q^\varkappa + \lambda_\rho Q^\varkappa \nabla_\varkappa Q^\rho =$$
$$= 2\lambda_\varkappa Q^\rho \nabla_\rho Q^\varkappa = 0 \qquad (1.8)$$

Таким образом, получено новое уравнение относительно $\lambda_\varkappa$. Эти рассуждения применимы, если хотя бы один из коэффициентов $Q_\varkappa \neq 0$. Процесс получения уравнения (1.8) может быть применен и к самому этому уравнению и так неограниченное число раз. Если полученные этим способом линейные уравнения несовместимы, то система не имеет решения. В противном случае эти уравнения накладывают только ограничения на области изменения $\lambda_\varkappa$.



Фиг. 2

Рассмотрим пример, иллюстрирующий указанные методы. Двойной математический маятник образован из двух тяжелых стержней OA и AB, связанных цилиндрично в точке A и подвешенных в точке O. Предположим, что $|OA| = |AB| = 2r$ и их массы равны между собой и равны m (фиг. 2). Выражение кинетической энергии и живой силы и, соответственно

$$2T = A\varphi^{\cdot 2} + B\theta^{\cdot 2} + 2C\cos(\theta - \varphi)\theta^\cdot\varphi^\cdot$$

$$A = \frac{16}{3}mr^2, \quad B = \frac{4}{3}mr^2, \quad C = 2mr^2, \quad U = 3mgr\cos\varphi + mgr\cos\theta$$

Полагая $q^1 = \theta$ и $q^2 = \varphi$, для Γ_{ij}^k получаем

$$\Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{22}^2 = \frac{C^2 \sin(\theta-\varphi)\cos(\theta-\varphi)}{AB - C^2\cos^2(\theta-\varphi)}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{AC\sin(\theta-\varphi)}{AB - C^2\cos^2(\theta-\varphi)}, \qquad \Gamma_{11}^2 = \frac{-BC\sin(\theta-\varphi)}{AB - C^2\cos^2(\theta-\varphi)}$$

Остальные $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Вычислим компоненты метрического тензора $R_{\gamma\beta\mu}^\alpha$. Как известно [2]

$$R_{\gamma\beta\mu}^\alpha = \frac{\partial\Gamma_{\gamma\mu}^{\ \alpha}}{\partial_q^{\ \beta}} - \frac{\partial\Gamma_{\beta\mu}^{\ \alpha}}{\partial_{q\gamma}} + \Gamma_{\gamma\mu}^{\ \delta}\Gamma_{\beta\delta}^{\ \alpha} - \Gamma_{\gamma\delta}^{\ \alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\ \delta}$$

$$R_{121}^2 = \frac{-BC\cos(\theta-\varphi)}{AB - C^2\cos^2(\theta-\varphi)}, \qquad R_{212}^1 = \frac{AC\cos(\theta-\varphi)}{AB - C^2\cos^2(\theta-\varphi)}$$

$$R_{121}^1 = R_{212}^2 = \frac{C^4\sin^2(\theta-\varphi) - C^2 AB\cos^2(\theta-\varphi)}{(AB - C^2\cos^2(\theta-\varphi))^2}$$

Выпишем выражение (1.6)

$$[\nabla_1 R_{212}{}^j + \nabla_2 R_{121}{}^j]\lambda_j = 2[R_{121}{}^l\varepsilon_{l2} + R_{122}{}^l\varepsilon_{1l}] = 2[R_{121}{}^1 + R_{122}{}^2]\varepsilon_{12} = 0$$

Имея в виду $R_{121}{}^1 = -R_{211}{}^2$, находим

$$g^{jk}[\nabla_1 R_{212k} + \nabla_2 R_{121k}]\lambda_j = 0$$

Преобразуя полученное выражение, окончательно получим

$$g^{jk}[\nabla_1 R_{212k} + \nabla_2 R_{121k}] = g^{j1}\nabla_1 R_{2121} + g^{j2}\nabla R_{1212}$$

Так что

$$g^{jk}\nabla_k R_{1212}\lambda_j = 0 \tag{1.9}$$

Соотношения (1.4) и (1.9) представляют собой систему линейных уравнений относительно λ_j. Условие существования решений имеет следующий вид

$$Q_s = \rho\nabla_s R_{1212} \tag{1.10}$$

Далее

$$\nabla_1 R_{1212} = \frac{\partial R_{1212}}{\partial q^1} - \Gamma_{11}^1 R_{1212} - \Gamma_{11}^1 R_{1212}$$

$$\nabla_2 R_{1212} = \frac{\partial R_{1212}}{\partial q^2} - \Gamma_{22}^2 R_{1212} - \Gamma_{22}^2 R_{1212}$$

Воспользуясь

$$\Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^1, \qquad R_{1212} = g_{p2}R_{121}{}^p = f(\theta-\varphi)$$

$$\frac{\partial R_{1212}}{\partial\theta} = f'(\theta-\varphi), \qquad \frac{\partial R_{1212}}{\partial\varphi} = -f'(\theta-\varphi)$$

находим

$$\nabla_1 R_{1212} = -\nabla_2 R_{1212} \tag{1.11}$$

Условие (1.9) в развернутом виде записывается так:

$$g^{11}\nabla_1 R_{1212}\lambda_1 + g^{21}\nabla_1 R_{1212}\lambda_2 + g^{12}\nabla_2 R_{1212}\lambda_1 + g^{22}\nabla_2 R_{1212}\lambda_2 = 0$$

Допустим, что $\nabla_2 R_{1212} = 0$. Тогда

$$\nabla_2 R_{1212} = g_{2p}\nabla_2 R_{121}{}^p = 0, \qquad \nabla_2 R_{1211} = g_{1p}\nabla_2 R_{121}{}^p = 0$$

Так как определитель этой системы отличен от нуля, то

$$\nabla_2 R_{121}{}^1 = \nabla_2 R_{121}{}^2 = 0$$

Но

$$\nabla_2 R_{121}{}^2 = \frac{\partial R_{121}{}^2}{\partial\varphi} \neq 0$$

Полученное противоречие показывает, что

$$\nabla_2 R_{1212} \neq 0$$

Сделая сокращения, находим

$$(g^{11} - g^{12}) \lambda_1 + (-g^{22} + g^{21}) \lambda_2 = 0$$

Отсюда

$$\lambda_1 = \frac{\rho}{\Delta}(B + C\cos(\theta - \varphi)), \qquad \lambda_2 = \frac{\rho}{\Delta}(A + C\cos(\theta - \varphi)) \tag{1.12}$$

Здесь

$$g_{11} = B, \; g_{22} = A, \; g_{12} = g_{21} = C\cos(\theta - \varphi)$$

$$g^{11} = g_{22} / \Delta, \quad g^{12} = g^{21} = -g_{12} / \Delta, \quad g^{22} = g_{11} / \Delta, \quad \Delta = AB - C^2\cos^2(\theta - \varphi)$$

Непосредственным счетом устанавливается, что вектор

$$\lambda_1 = B + C\cos(\theta - \varphi), \; \lambda_2 = A + C\cos(\theta - \varphi) \tag{1.13}$$

удовлетворяет условию (1.4), а именно:

$$\nabla_1\lambda_1 = \nabla_2\lambda_2 = 0, \qquad \nabla_1\lambda_2 + \nabla_2\lambda_1 = 0$$

Так как все решения системы даются в виде (1.12), то любое другое решение должно быть коллинеарным (1.13). Так что $\mu_k = v\lambda_k$.

Покажем, что $v = \mathrm{const}$. Действительно

$$\nabla_1\mu_1 = \nabla_1 v\lambda_1 + v\cdot\nabla_1\lambda_1 = \nabla_1 v\cdot\lambda_1 = 0$$

$$\nabla_2\mu_2 = \nabla_2 v\lambda_2 + v\cdot\nabla_2\lambda_2 = \nabla_2 v\lambda_2 = 0 \tag{1.14}$$

$$\nabla_1\mu_2 + \nabla_2\mu_1 = \nabla_1 v\lambda_2 + v\nabla_1\lambda_2 + \nabla_2 v\lambda_1 + v\nabla_2\lambda_1 = \nabla_1 v\lambda_2 + \nabla_2 v\lambda_1 = 0$$

Могут представиться следующие случаи:

1) пусть $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$; тогда

$$\nabla_1 v = \partial v / \partial\theta = 0, \qquad \nabla_2 v = \partial v / \partial\varphi = 0$$

следовательно, $v = \mathrm{const}$.

2) пусть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ или наоборот; тогда

$$\nabla_2 v = 0, \qquad \nabla_1 v\lambda_2 = 0$$

значит, $\Delta_1 v = 0$, т. е. имеем случай 1); 3) случай $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ не представляет интереса.

Получили $v = \mathrm{const}$. Кроме решения (1.13) имеем еще другие решения уравнения (1.3) и все они получаются умножением на произвольную константу.

Для изучения существования линейного интеграла обратимся к условию (1.10)

$$Q_1 = \rho\nabla_1 R_{1212}, \qquad Q_2 = \rho\nabla_2 R_{1212} = -\rho\nabla_1 R_{1212}$$

Так что должно выполнятся $Q_1 = -Q_2$. Имея в виду выражение живой силы, получим

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial\theta} = -mgr\sin\theta, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial\varphi} = -3mgr\sin\varphi, \quad Q_1 \neq Q_2$$

Таким образом, система не имеет линейного интеграла независимо от того, что она имеет функцию силы.

Поступила 23 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Березкин Е. Н. Лекции по теоретической механике, ч. 2. М., Изд-во МГУ, 1968.
2. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., «Наука», 1967.
3. Синдж Д. Л. Тензорные методы в динамике. М., Изд-во иностр. лит., 1947.