ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЦЕССА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. Г. Павлов

(Казань)

Рассматривается задача отыскания группы преобразований G, относительно которой оптимальный процесс будет инвариантным, т. е. отыскивается такая группа G, относительно которой многообразие, определяемое дифференциальными уравнениями, описывающими управляемый процесс и функционал, будет инвариантным.

1. Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается нелинейным уравнением в безразмерной форме

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(f(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+F(u,\varphi)=0 \qquad t\in[0,T], \qquad x\in[0,l] \tag{1.1}$$

где $\varphi(t,x)$ — искомое распределение, $u(t,x)$ — распределенное управление, $f(\varphi)$, $F(u,\varphi)$ — непрерывные и достаточное число раз дифференцируемые по своим аргументам функции.

Предполагается существование такого распределенного управления $u(t,x)$, которое доставляет минимум функционала

$$J_u=\int_0^T\int_0^l Q(u,\varphi)\,dx\,dt \tag{1.2}$$

где T, l — известные положительные постоянные величины, $Q(u,\varphi)$ — непрерывная и достаточное число раз дифференцируемая функция.

Вводится понятие инвариантного оптимального процесса. Под инвариантным оптимальным процессом будем понимать такой оптимальный процесс, если он существует, который остается инвариантным относительно некоторой группы преобразований G. Таким образом, для установления существования такого оптимального процесса требуется построить такую группу преобразований G и найти связь между функциями $f(\varphi)$, $F(u,\varphi)$, $Q(u,\varphi)$, чтобы для любого преобразования $T_a\in G$ многообразие Ω, определяемое уравнениями

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial w}{\partial x}+F(u,\varphi)=0, \qquad w-f(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \tag{1.3}$$

и функционал (1.2) оставались инвариантными. Другими словами, требуется найти такие преобразования переменных t, x, φ, w, u и производных φ, u, w по t и x, при которых преобразованные точки с координатами t^*, x^*, φ^*, w^*, u^*, $\varphi^*_{t^*}$, $\varphi^*_{x^*}$, ..., $w^*_{x^*}$ принадлежали Ω, а значение функционала J_u оставалось неизменным.

2. Построение основной группы G. Группа преобразований G определяется алгеброй Ли инфинитезимальных операторов

$$Y=\xi_t\frac{\partial}{\partial t}+\xi_x\frac{\partial}{\partial x}+\xi_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}+\xi_u\frac{\partial}{\partial u}+\xi_w\frac{\partial}{\partial w} \tag{2.1}$$

Вводится группа G^* — первое продолжение G-преобразований, определяемая выражением

$$Y^*=Y+\xi_{\varphi_t}\frac{\partial}{\partial\varphi_t}+\xi_{\varphi_x}\frac{\partial}{\partial\varphi_x}+\xi_{u_t}\frac{\partial}{\partial u_t}+\xi_{u_x}\frac{\partial}{\partial u_x}+\xi_{w_t}\frac{\partial}{\partial w_t}+\xi_{w_x}\frac{\partial}{\partial w_x} \tag{2.2}$$

где G^* изоморфно G.

Условие инвариантности функционала (1.2) запишется

$$Y[J_u]=0 \tag{2.3}$$

т. е. значения функционала остаются неизменными, если переменные t, x, φ, u, w подвергнуть преобразованию

$$t^* = t + \varepsilon\xi_t, \quad x^* = x + \varepsilon\xi_x, \quad u^* = u + \varepsilon\xi_u, \quad \varphi^* = \varphi + \varepsilon\xi_\varphi, \quad w^* = w + \varepsilon\xi_w$$

Здесь ξ_t, ξ_x, ξ_φ, ξ_u, ξ_w — координаты оператора Y, являющиеся функциями координат пространства E_5, ε — малая величина.

Аналогично [1] имеем для $T_a \in G$

$$T_a J_u = \int_0^T \int_0^l Q(u + \varepsilon\xi_u,\ \varphi + \varepsilon\xi_\varphi)\, d(x + \varepsilon\xi_x)\, d(t + \varepsilon\xi_t) = \int_0^T \int_0^l [Q(u, \varphi) + \varepsilon Y(Q)] \times$$

$$\times \left[1 + \varepsilon\left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_t}{\partial t}\right)\right] dx\, dt = \int_0^T \int_0^l \left[Q(u, \varphi) + \varepsilon\left(Y(Q) + Q(u, \varphi)\left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_t}{\partial t}\right)\right)\right] dx\, dt$$

Для инвариантности функционала (1.2) необходимо и достаточно выполнения следующего равенства:

$$Y[Q(u, \varphi)] + Q(u, \varphi)\left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_t}{\partial t}\right) = 0 \tag{2.4}$$

Условия инвариантности многообразия Ω, определяемого системой (1.3), имеют вид [2]

$$Y^*[\Omega] = 0 \tag{2.5}$$

Условия инвариантности функционала J_u и многообразия Ω позволяют получить систему определяющих уравнений алгебры Ли, из которой определяются координаты инфинитезимального оператора Y и устанавливается связь между функциями $f(\varphi)$, $F(u, \varphi)$, $Q(u, \varphi)$. Эти условия примут вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial Q}{\partial u}\xi_u + \frac{\partial Q}{\partial \varphi}\xi_\varphi + Q(u, \varphi)\left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_t}{\partial t}\right) = 0 \\
\xi_{\varphi_t} - \xi_{w_x} + \frac{\partial F}{\partial u}\xi_u + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\xi_\varphi = 0 \\
f(\varphi)\xi_{\varphi_x} + \frac{df}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\xi_\varphi - \xi_w = 0
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Исследование определяющих уравнений для координат инфинитезимального оператора Y позволяет получить следующие соотношения:

$$\xi_\varphi = \left(2\frac{\partial \xi_x}{\partial x} - \frac{d\xi_t}{dt}\right)\frac{f}{f'} \tag{2.7}$$

$$\xi_w = \left\{\left[1 + 2\left(\frac{f}{f'}\right)'\right]\frac{\partial \xi_x}{\partial x} - \left[1 + \left(\frac{f}{f'}\right)'\right]\frac{d\xi_t}{dt}\right\} w + 2\frac{f^2}{f'}\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
\xi_u = \frac{1}{\partial F/\partial u}&\left\{\left[F\left(\frac{f}{f'}\right)' - \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{f}{f'}\right]\left(2\frac{\partial \xi_x}{\partial x} - \frac{d\xi_t}{dt}\right) -\right. \\
&\left.- \frac{f}{f'}\left(2\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x\,\partial t} - \frac{d^2\xi_t}{dt^2}\right) + 2\frac{f^2}{f'}\frac{\partial^3 \xi_x}{\partial x^3} - F\frac{d\xi_t}{dt}\right\}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{f}{f'}\right)''\left(2\frac{\partial \xi_x}{\partial x} - \frac{d\xi_t}{dt}\right) = 0, \quad \left[2\frac{1}{f}\left(\frac{f^2}{f'}\right)' + 1 + 2\left(\frac{f}{f'}\right)'\right]\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} = 0 \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial Q}{\partial \varphi}\frac{f}{f'} + \frac{\partial Q/\partial u}{\partial F/\partial u}\left[F\left(\frac{f}{f'}\right)' - \frac{f}{f'}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right]\right\}\left(2\frac{\partial \xi_x}{\partial x} - \frac{d\xi_t}{dt}\right) - \\
&- \frac{\partial Q/\partial u}{\partial F/\partial u}\left[\frac{f}{f'}\left(2\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x\,\partial t} - \frac{d^2\xi_t}{dt^2}\right) - 2\frac{f^2}{f'}\frac{\partial^3 \xi_x}{\partial x^3} + F\frac{d\xi_t}{dt}\right] + Q(u, \varphi)\left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{d\xi_t}{dt}\right) = 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

А. Рассматривается случай определения группы преобразований G для произвольной зависимости $f(\varphi)$, $F(u, \varphi)$, $Q(u, \varphi)$.

Из (2.10) и (2.11) следует, что

$$\frac{\partial \xi_t}{dt} = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t\, \partial x} = \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \xi_x}{\partial x^3} = 0$$

Тогда

$$\xi_\varphi = \xi_u = \xi_w = 0, \qquad \xi_t = a_1, \ \xi_x = a_2 \tag{2.12}$$

Следовательно, базис алгебры Ли основной группы системы (1.3) и функционала (1.2) состоит из операторов

$$Y_1 = \partial(\cdot)/\partial t, \ \ Y_2 = \partial(\cdot)/\partial x \tag{2.13}$$

Б. Как отмечалось в [2], группа преобразований G может быть расширена за счет специального вида функции $f(\varphi)$

$$f(\varphi) = c_1 \varphi^{2m}, \ f(\varphi) = c_2 e^{n\varphi} \ (c_1, c_2, \ m, \ n = \mathrm{const})$$

Рассмотрим задачу отыскания группы преобразований G, относительно которой оптимальный процесс будет инвариантным при $f(\varphi) = c_1 \varphi^{2m}$ и $m \neq -{}^2/_3$.

Соотношения (2.7) — (2.11) при этом примут вид

$$\xi_\varphi = \frac{1}{2m}\left(2\frac{\partial \xi_x}{\partial x} - \frac{d\xi_t}{dt}\right)\varphi, \qquad \xi_w = \frac{1}{m}\left[(m+1)\frac{\partial \xi_x}{\partial x} - (2m+1)\frac{d\xi_t}{dt}\right] w$$

$$\xi_u = \frac{1}{\partial F/\partial u}\left[\frac{1}{2m}\left(F - \varphi\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)\left(2\frac{\partial \xi_x}{\partial x} - \frac{d\xi_t}{dt}\right) - \frac{1}{2m}\left(2\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t\, \partial x} - \frac{d^2\xi_t}{dt^2}\right)\varphi - F\frac{d\xi_t}{dt}\right] \tag{2.14}$$

$$\partial^2 \xi_x / \partial x^2 = 0 \tag{2.15}$$

$$\left[\varphi\frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \frac{\partial Q/\partial u}{\partial F/\partial u}\left(F - \varphi\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) + mQ\right]\frac{\partial \xi_x}{\partial x} - \left\{\frac{\varphi}{2}\frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial Q/\partial u}{\partial F/\partial u}\left[(2m+1)F - \varphi\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right] - mQ\right\}\frac{d\xi_t}{dt} -$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\partial Q/\partial u}{\partial F/\partial u}\left(2\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t\, \partial x} - \frac{d^2 \xi_t}{dt^2}\right)\varphi = 0 \tag{2.16}$$

Так как $F = F(u, \varphi)$, $Q = Q(u, \varphi)$, то из (2.16) с учетом (2.15) вытекает, что для координат инфинитезимальных операторов, определяющих группу преобразований G, относительно которой оптимальный процесс будет инвариантным при $f = c_1\varphi^{2m}$, возможны следующие соотношения:

1°.
$$\begin{gathered}\xi_x = \alpha_1 x + \alpha_0, \qquad \xi_t = \alpha_1 t + \beta_0, \qquad \xi_\varphi = \frac{1}{2m}\alpha_1\varphi \\ \xi_w = -\alpha_1 w, \qquad \xi_u = \frac{1}{2m}\left[(1-2m)F - \varphi\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right]\frac{\alpha_1}{\partial F/\partial u}\end{gathered} \tag{2.17}$$

Здесь α_1, α_0, β_0 — определяющие постоянные. Следовательно, базис алгебры Ли основной группы состоит из операторов

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y_3 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} +$$

$$+ \frac{1}{2m}\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi} - w\frac{\partial}{\partial w} + \frac{1}{2m}\left[(1-2m)F - \varphi\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right]\frac{1}{\partial F/\partial u}\frac{\partial}{\partial u} \tag{2.18}$$

На функции $Q(u, \varphi)$, $F(u, \varphi)$ накладывается следующая связь:

$$\varphi \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \frac{1}{\partial F / \partial u}\left[(1-2m) F - \varphi \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right] \frac{\partial Q}{\partial u} + 4mQ = 0$$

2°.
$$\xi_x = \alpha_1 e^t x + \alpha_0, \quad \xi_t = \alpha_1 e^t + \beta_0, \quad \xi_\varphi = \frac{\alpha_1}{2m} e^t \varphi \tag{2.19}$$

$$\xi_w = -\alpha_1 e^t w, \quad \xi_u = \frac{1}{2m} e^t \left[(1-2m) F - \varphi - \varphi \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right] \frac{\alpha_1}{\partial F / \partial u}$$

Базис алгебры Ли основной группы в этом случае будет

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$Y_3 = e^t \left\{\frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2m} \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} - w \frac{\partial}{\partial w} + \frac{1}{2m}\left[(1-2m) F - \varphi - \varphi \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right] \frac{1}{\partial F / \partial u} \frac{\partial}{\partial u}\right\}$$

а на $Q(u, \varphi)$, $F(u, \varphi)$ накладывается связь

$$\varphi \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \frac{1}{\partial F / \partial u}\left[(1-2m) F - \varphi - \varphi \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right] \frac{\partial Q}{\partial u} + 4mQ = 0$$

3°.
$$\xi_x = \alpha_0, \quad \xi_t = \beta_1 t + \beta_0, \quad \xi_\varphi = -\frac{\beta_1}{2m} \varphi \tag{2.20}$$

$$\xi_w = -\frac{2m+1}{m} \beta_1 w, \quad \xi_u = -\frac{\beta_1}{2m}\left[(1+2m) F - \varphi \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right] \frac{1}{\partial F / \partial u}$$

Тогда базис алгебры Ли основной группы состоит из операторов

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m} \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} -$$
$$- \frac{2m+1}{m} w \frac{\partial}{\partial w} - \frac{1}{2m}\left[(1+2m) F - \varphi \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right] \frac{1}{\partial F / \partial u} \frac{\partial}{\partial u}$$

а $Q(u, \varphi)$, $F(u, \varphi)$ должны удовлетворять соотношению

$$\varphi \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \frac{1}{\partial F / \partial u}\left[(1+2m) F - \varphi \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right] \frac{\partial Q}{\partial u} - 2mQ = 0$$

4°.
$$\xi_x = \alpha_1 x + a_0, \quad \xi_t = \beta_0, \quad \xi_\varphi = \frac{\alpha_1}{m} \varphi \tag{2.21}$$

$$\xi_w = \frac{m+1}{m} \alpha_1 w, \quad \xi_u = \frac{\alpha_1}{m}\left(F - \varphi \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) \frac{1}{\partial F / \partial u}$$

Тогда

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{m} \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} +$$
$$+ \frac{m+1}{m} w \frac{\partial}{\partial w} + \frac{1}{m}\left(F - \varphi \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) \frac{1}{\partial F / \partial u} \frac{\partial}{\partial u}$$

Связь между $Q(u, \varphi)$, $F(u, \varphi)$ в этом случае будет

$$\varphi \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \frac{1}{\partial F / \partial u}\left(F - \varphi \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) \frac{\partial Q}{\partial u} + mQ = 0$$

Поступила 18 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Чеботарев Н. Г. Об определении объема в группах Ли. Собр. соч., т. 2. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1949, стр. 289—301.
2. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.