ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ ТЕОРИЙ ФИЛЬТРАЦИИ И ТЕПЛОПЕРЕНОСА В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Т. Ф. Иванов

(Харьков)

Рассмотрены условия существования частных автомодельных решений уравнения одномерной фильтрации в неоднородных средах.

Показано, что полученные автомодельные решения можно использовать для исследования прямых и обратных задач одномерной фильтрации и теплопереноса.

1. Весьма разнообразные задачи одномерной нестационарной фильтрации жидкости в неоднородной пористой среде и задачи о распространении тепла описываются при соответствующих граничных и начальных условиях параболическими дифференциальными уравнениями вида

$$\gamma^2(x)\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^\alpha\lambda^2(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right]\quad (a=\text{const}) \tag{1.1}$$

Здесь x —обобщенная пространственная координата. Функция $\gamma(x)$ непрерывна, а $\lambda(x)$ имеет и непрерывную первую производную; $\alpha=0, 1, 2$ соответственно для плоскопараллельного, плоскорадиального и сферически-симметричного потоков.

Представим пористость m, проницаемость k, плотность жидкости σ и ее кинематическую вязкость ν в виде функций

$$m=m_0(x)\,\Theta_m(p-p_0),\qquad k=k_0(x)\,\Theta_k(p-p_0) \tag{1.2}$$
$$\sigma=\sigma_0\Theta_\sigma(p-p_0),\qquad \nu=\nu_0\Theta_\nu(p-p_0)$$

Здесь p_0 — некоторое фиксированное значение давления жидкости; функции $m_0(x)$, $k_0(x)$определяют распределение пористости и проницаемости в области фильтрации при $p=p_0$; а σ_0, ν_0 — значения плотности и вязкости жидкости при $p=p_0$; функции $\Theta_m(p-p_0)$, $\Theta_k(p-p_0)$, $\Theta_\sigma(p-p_0)$, $\Theta_\nu(p-p_0)$; определяют зависимость параметров m, k, σ, ν от давления.

Введем обобщенную функцию Лейбензона Ψ, определяемую равенством

$$\Psi=\int\frac{\Theta_k(p-p_0)}{\Theta_\nu(p-p_0)}\,d(p-p_0),\qquad \frac{k_0}{\nu_0}\frac{\partial\Psi}{\partial x}=-u \tag{1.3}$$

Здесь $u=\sigma v$ — массовая скорость фильтрации. Отсюда и из уравнения неразрывности с учетом (1.2) имеем уравнение фильтрации в виде

$$\sigma_0\nu_0 m_0(x)\frac{d(\Theta_m\Theta_\sigma)}{d\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^\alpha k_0(x)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right]$$

Если произведение $\Theta_m\Theta_\sigma$ можно принять линейной функцией от обобщенной функции Лейбензона ψ, то последнее уравнение преобразуется в уравнение вида (1.1).

$$\gamma^2(x)\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{a}{x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^\alpha\lambda^2(x)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right],\qquad \gamma^2(x)=\frac{m_0(x)}{\langle m_0\rangle} \tag{1.4}$$
$$\lambda^2(x)=\frac{k_0(x)}{\langle k_0\rangle},\qquad a=\langle k_0\rangle(\sigma_0,\ \nu_0,\ \beta_n)^{-1}\langle m_0\rangle^{-1},\qquad \beta_n=\frac{d}{d\Psi}(\Theta_m\Theta_\sigma)=\text{const}$$

Здесь $\langle m_0\rangle$, $\langle k_0\rangle$ — осредненные в области фильтрации значения проницаемости и пористости при $p=p_0$.

Уравнения вида (1.1) нередко встречаются при исследовании теплопроводности [1]. К уравнению вида (1.1) можно привести и задачи о распространении тепла в однородной пористой среде за счет теплопроводности и конвективного переноса с учетом дроссельного эффекта при нагнетании в пласт воды.

Если скорость фильтрации определяется равенством

$$U = U_0\, x^{-\alpha} \quad (U_0 = \mathrm{const})$$

то уравнение энергии в жесткой фильтрационной системе [2] в одномерном случае можно привести к виду

$$\frac{1}{x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^\alpha k_T \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{C_f U_0}{x^\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} = C_v \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{A \nu U_0^2}{\sigma k x^{2\alpha}} \tag{1.5}$$

Здесь C_v — объемная теплоемкость пористой среды и насыщающей ее жидкости, C_f — теплоемкость жидкости, k_T — теплопроводность пористой среды и насыщающей ее жидкости, $A = \mathrm{const}$ — тепловой эквивалент работы.

Из уравнения следует, что температуру T можно выразить в виде суммы функций $U(x, t)$ и некоторой функции $\Phi(x)$, зависящей только от x. При этом функция $U(x, t)$ будет определяться уравнением (1.1) с $\gamma^2(x) = C_v$

$$\lambda^2(x) = k_T \exp \frac{-U_0 C_f}{k_T} \int x^{-\alpha}\, dx \qquad (a{=}1)$$

В частном случае, при $\gamma^2(x) \equiv 1$, $\lambda^2(x) \equiv 1$ уравнение (1.1) соответствует уравнению теплопроводности в однородной среде.

Рассмотрим условия, которым должны удовлетворять функции $\gamma(x)$, $\lambda(x)$ для того, чтобы уравнение (1.1) имело частные автомодельные решения вида

$$U_\beta(x, t) = t^\beta y_\beta(\varepsilon), \qquad \varepsilon = -\frac{\varphi(x)}{4at}, \qquad \varphi(x) = \left(\int \frac{\gamma}{\lambda}\, dx + C_0\right)^2 \tag{1.6}$$

Здесь C_0 — постоянная интегрирования, β — произвольный параметр.

При подстановке (1.6) в уравнение (1.1) последнее после преобразований приводится к виду

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{\partial \varepsilon^2} + \varepsilon \frac{dy}{d\varepsilon} + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{d}{dx}\ln(x^\alpha \lambda\gamma) \Big/ \frac{d}{dx}\ln\left(\int \frac{\gamma}{\lambda}\, dx + C_0\right)\right]\frac{dy}{d\varepsilon} - \beta y = 0 \tag{1.7}$$

Решения уравнения (1.7) будут зависеть только от переменной ε и параметра β, если выражение в квадратных скобках в уравнении (1.3) будет равно постоянной (или нулю).

Обозначим эту постоянную через $(\alpha + b)$, где $b > 0$ — положительный параметр, характеризующий среду. Тогда из (1.7) получим после преобразований два уравнения

$$x^\alpha \gamma\lambda = \left(\int \frac{\gamma}{\lambda}\, dx + C_0\right)^{\alpha+b-1} \tag{1.8}$$

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{d\varepsilon^2} + \left(\varepsilon + \frac{\alpha + b}{2}\right)\frac{dy}{d\varepsilon} - \beta y = 0 \tag{1.9}$$

Из (1.8) после преобразований получим условие автомодельности уравнения (1.1) в виде

$$\left[(\alpha + b)\left(\int x^\alpha \gamma^2(x)\, dx + C_1\right)\right]^{2-\alpha-b} = \left[(2 - \alpha - b)\left(\int \frac{dx}{x^\alpha \lambda^2(x)} + C_2\right]^{\alpha+b} \tag{1.10}$$

Здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные. Уравнение (1.10) легко разрешить явно относительно $\gamma(x)$ или $\lambda(x)$.

В связи с непрерывностью и положительностью величины γ / λ функция $\varphi(x)$, определяемая третьим равенством (1.6) ограничена при ограниченных значениях x и за счет варьирования постоянной C_0 может быть приравнена нулю только в одной точке интервала изменения x, которую обозначим через M. Чтобы координата x выражалась функцией $\varphi(x)$ однозначно, необходимо точку M привести в соответствие минимальному значению x_0 координаты x в заданной области.

Постоянная C_0 определяется уравнением (1.8) при $\alpha + b \neq 1$ и оказывается произвольной при $\alpha + b = 1$.

2. Два частных решения уравнения (1.1) определим формально равенствами

$$y_\beta(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2(2-\alpha-b)} e^{-\varepsilon}\varphi_2(\varepsilon) + \varphi_1(\varepsilon)\int_\varepsilon^\infty \eta^{-1/2(\alpha+b)} e^{-\eta}\,d\eta \tag{2.1}$$

$$y_s(\varepsilon) = e^{-\varepsilon}\psi_2(\varepsilon) + \varepsilon^{1/2(2-\alpha-b)}\psi_1(\varepsilon)\int_\varepsilon^\infty \eta^{1/2(\alpha+b-4)} e^{-\eta}\,a\eta$$

$$(2s = 2\beta - 2 + \alpha + b)$$

Функции y_β, y_s образуют фундаментальную систему, если $\alpha + b \neq 2m$.

Если в уравнениях (2.1) положить $\varphi_1(\varepsilon) \equiv 0$ или $\psi_1(\varepsilon) \equiv 0$, то $\varphi_2(\varepsilon)$ или $\psi_2(\varepsilon)$ определяются соответствующими функциями Похгаммера [3].

Функции $y_\beta(\varepsilon)$ при $\beta = \pm n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ будут порождающими для частных автомодельных решений $U_{\pm n}(\varphi, t)$ первого рода уравнения (1.1).

Соответственно при $s = \pm n$ функции $y_s(\varepsilon)$ порождают частные автомодельные решения $V_{\pm n}(\varphi, t)$ второго рода уравнения (1.1).

При $\beta = -n$ и $s = -n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ положим $\varphi_1(\varepsilon) \equiv \psi_1(\varepsilon) \equiv 0$; функции $\varphi_2(\varepsilon)$, $\psi_2(\varepsilon)$ представим соответствующими функциями Похгаммера, которые будут многочленами по целым положительным степеням ε.

При этом частные автомодельные решения первого и второго рода с отрицательными индексами $-n$ уравнения (1.1) определяются равенствами

$$U_{-n}(\varphi, t) = t^{-n\,1/2(2-\alpha-b)}\left[1 + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-2)^i(n-1)\ldots(n-i)\,\varepsilon^i}{i!\,(4-\alpha-b)\ldots(2i+2-\alpha-b)}\right]e^{-\varepsilon}$$

$$V_{-n}(\varphi, t) = t^{-1/2(2n-2+\alpha+b)}\, e^{-\varepsilon}\left[1 + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-2)^i(n-1)\ldots(n-i)\,\varepsilon^i}{i!\,(\alpha+b)\ldots(2i-2+\alpha+b)}\right] \tag{2.2}$$

Решения U_{-n}, V_{-n} удовлетворяют условиям

$$U_{-n}(\varphi > 0, 0) = V_{-n}(\varphi > 0, 0) = 0, \qquad V_{-n}(0, t > 0) = t^{-1/2(2n-2+\alpha+b)}$$

$$U_{-n}(0, t > 0) = 0 \quad \text{при } \alpha + b < 2, \qquad U_{-n}(0, t > 0) = t^{-n} \quad \text{при } a + b = 2 \tag{2.3}$$

При $\beta = n$ и $s = n$ $(n = 0, 1, 2\ldots)$ функции $\varphi_1(\varepsilon)$, $\varphi_2(\varepsilon)$, $\psi_1(\varepsilon)$, $\psi_2(\varepsilon)$ также выражаются многочленами по целым положительным степеням ε.

При $\beta = n$ соответствующие частные автомодельные решения $U_n(\varphi, t)$ первого рода с положительными индексами n уравнения (1.1) определяются равенствами вида

$$U_n(\varphi, t) = t^n\left[\sum_{i=0}^{n} a_i\varepsilon^i\int_\varepsilon^\infty \eta^{-1/2(\alpha+b)} e^{-\eta}\,d\eta - e^{-\xi}\sum_{i=0}^{n-1} b_i\varepsilon^{1/2(2i+2-\alpha-b)}\right. \tag{2.4}$$

$$a_0 = 1, \qquad a_i = \frac{2^i n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!\,(\alpha+b)(2+\alpha+b)\ldots(2i-2+\alpha+b)} \tag{2.5}$$

$$b_i = \frac{2(i+1)\,a_{i+1}}{n+i+1} + \frac{i+1}{n+i+1}\sum_{k=2}^{n-i}\frac{(i+2)\ldots(i+k)(2i+4-\alpha-b)\ldots(2i+2k-\alpha-b)\,a_{k+i}}{(n+i+2)\ldots(n+i+k)}$$

Решения первого рода удовлетворяют условиям

$$U_n(\varphi > 0,\ 0) = 0 \tag{2.6}$$

$$U_n(0,\ t > 0) = t^n\,\Gamma\,[{}^1/_2\,(2 - \alpha - b)] \quad \text{при } \alpha + b < 2$$

При $s = n$ соответствующие частные автомодельные решения $V_n(\varphi, t)$ второго рода с положительными индексами n уравнения (1.1) определяются равенствами вида

$$V_n(\varphi,\ t) = t^{\frac{2n+2-\alpha-b}{2}}\left[\sum_{i=0}^{n} A_i \varepsilon^{\frac{2i+2-\alpha-b}{2}} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\eta}\eta^{\frac{\alpha+b-4}{2}}\,d\eta - e^{-\varepsilon}\sum_{i=0}^{n-1} B_i\varepsilon^i\right] \tag{2.7}$$

$$A_0 = 1, \qquad A_i = \frac{2^i n\,(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!\,(4-\alpha-b)\ldots(2i+2-\alpha-b)} \tag{2.8}$$

$$B_i = \frac{2\,(i+1)\,A_{i+1}}{n+i+1} + \frac{i+1}{n+i+1}\sum_{k=2}^{n-i}\frac{(i+2)\ldots(i+k)(2i+\alpha+b)\ldots(2i+2k-4+\alpha+b)\,A_{k+i}}{(n+i+2)\ldots(n+i+k)}$$

Функции $V_n(\varphi, t)$ удовлетворяют условиям

$$V_n(\varphi > 0,\ 0) = 0$$

$$V_n(0,\ t > 0) = t^{\frac{2n+2-\alpha-b}{2}}\left(\frac{2}{2-\alpha-b} - B_0\right) \quad \text{при } \alpha + b < 2 \tag{2.9}$$

Введем функции $q(x, t)$, определяемые равенствами

$$q(x,\ t) = -\,x^\alpha\lambda^2(x)\,\frac{\partial U}{\partial x} \tag{2.10}$$

Отсюда и из (1.6) получим после преобразований

$$q(x,\ t) = -\,(4a)^{0{,}5\,(\alpha+b-2)}\,t^{\beta-1+0.5\,(\alpha+b)}\,\varepsilon^{0.5\,(\alpha+b)}\,dy/d\varepsilon \tag{2.11}$$

Функции $q(x, t)$, образованные при подстановке в (2.10) автомодельных решений первого рода $U_{\pm n}(\varphi, t)$, обозначим через $q_{\pm n}(\varphi, t)$, а при подстановке решений второго рода $V_{\pm n}(\varphi, t)$ — через $P_{\pm n}(\varphi, t)$.

Функции $q_n(\varphi, t)$, $p_n(\varphi, t)$ $(n = 0{,}1, \ldots)$ удовлетворяют соответственно условиям

$$p_n(0, t > 0) = 2t^n\,(4a)^{1/2\,(\alpha+b-2)}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+b}{2}\right), \quad p_n(\varphi > 0,\ 0) = q_n(\varphi > 0,\ 0) = 0 \tag{2.12}$$

$$q_n(\varphi,\ t) \equiv p_n(\varphi,\ t) \quad \text{при } \alpha + b = 2$$

3. Из (2.6) и (2.12) следует, что $U_n(0, t > 0)$ при $\alpha + b < 2$, а $p_n(0, t > 0)$ при $\alpha + b > 0$ образуют полные системы функций.

Будем отыскивать ограниченные в конечном промежутке времени решения $U(x, t)$ уравнения (1.1) на полубесконечной пространственной прямой ($\alpha = 0$), внутри круга бесконечного радиуса ($\alpha = 1$) или внутри шара бесконечного радиуса ($\alpha = 2$) при начальных условиях

$$U(x,\ 0) = F(x) + \sum_{m=1} A_m{}^\circ U_0(\varepsilon_m), \qquad \varepsilon_m = \frac{\varphi(x)}{4aT_m} \qquad (T_m = \text{const})$$

$$F(x) = C_5 + C_6\int\frac{dx}{x^\alpha\lambda^2(x)} \tag{3.1}$$

Здесь C_5, C_6 — произвольные постоянные.

Краевые условия заданы одним из уравнений

$$U(0, t) = F(0) + \theta_1(t), \quad x^\alpha \lambda^2 (x) dU/dx|_{x=0} = C_4 - \theta_2(t) \tag{3.2}$$

Здесь $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ — непрерывные функции. Решения отыскиваем в виде суммы частных решений $U_n(\varphi, t)$, $V_n(\varphi, t)$ и фундаментальной функции, удовлетворяющей начальному условию (3.1)

$$U(x, t) = F(x) + \sum_{m=1} A_m^\circ U_0 \left[\frac{\varphi(x)}{4a(T_m + t)}\right] + \sum_{n=0} B_n^\circ U_n(\varphi, t) + \sum_{n=0} D_n V_n(\varphi, t) \tag{3.3}$$

Если граничные условия заданы вторым уравнением (3.2) при $\alpha + b = 2$ или первым уравнением (3.2), полагаем в (3.3) все коэффициенты D_n равными нулю. Если же условия заданы вторым уравнением (3.2) при $\alpha + b \neq 2$, то полагаем равными нулю все коэффициенты B_n°, A_m°.

В силу (2.6), (3.9) и (2.12) решения (3.3) удовлетворяют начальному условию (3.1), а граничные условия (3.2) приводятся соответственно к виду

$$\Gamma[0.5(2 - \alpha - b)] \sum_{n=0} B_n^\circ t^n = \Theta_1(t) - \Gamma[0.5(2 - \alpha - b)] \sum_{m=1} A_m^\circ \qquad (\alpha + b < 2)$$

$$2 \sum_{n=0} B_n^\circ \left[\sum_{i=0}^{n} (a_i + ib_0)\right] t^n = \Theta_2(t) - 2 \sum_{m=1} A_m^\circ \qquad (\alpha + b = 2)$$

$$2(4a)^{1/2(\alpha + b - 2)} \Gamma[0.5(\alpha + b)] \sum D_n t^n = \Theta_2(t) \qquad (\alpha + b \neq 2) \tag{3.4}$$

В силу теоремы Вейерштрасса постоянными B_n° при D_n° и постоянными D_n при $B_n^\circ = 0$ в решении (3.3) можно распорядиться так, чтобы условия (3.4) выполнялись с заданной точностью.

Функции U_{-n}, V_{-n} можно использовать для асимптотического разложения различных решений уравнения (1.1) при $t \to \infty$, удовлетворяющих в промежутке $[x_0, \infty$ $(0 \leqslant x_0)$ начальным условиям (2.8), если значение $x = x_0$ таково, что, начиная) с некоторого $t = t_0$, функция $\varphi(x_0) = \varphi_0$ в третьем равенстве (1.6) удовлетворяет неравенству

$$\varphi_0 \ll 4\alpha t, \qquad t > t_0 \tag{3.5}$$

При выполнении (3.5) функции $U_n(\varphi_0, t)$ определяются, согласно (2.4), (2.5), приближенными равенствами

$$t^{-n} U_n(\varphi_0, t > t_0) \approx \Gamma\left(1 - \frac{\alpha + b}{2}\right) - \left(\frac{2}{2 - \alpha - b} + b_0\right)\left(\frac{\varphi_0}{4at}\right)^{1/2(2 - \alpha - b)} \qquad (\alpha + b < 2)$$

$$t^{-n} U_n(\varphi_0, t > t_0) \approx \ln t - \ln \frac{\varphi_0}{2.25a} - b_0 \qquad (\alpha + b = 2)$$

$$t^{-n} U_n(\varphi_0, t > t_0) \approx \left(\frac{2}{a + b - 2} - b_0\right)\left(\frac{\varphi_0}{4at}\right)^{1/2(2 - \alpha - b)} -$$

$$- \frac{2}{\alpha + b - 2} \Gamma\left(2 - \frac{\alpha + b}{2}\right) \qquad (\alpha + b > 2) \tag{3.6}$$

Функции U_{-n}, V_{-n} при выполнении (3.5) определяются с достаточной точностью равенствами

$$U_{-n}(\varphi_0, t) \approx \left(\frac{\varphi_0}{4a}\right)^{1/2(2 - \alpha - b)} t^{-1/2(2n + 2 - \alpha - b)}, \qquad V_{-n}(\varphi_0, t) \approx t^{-1/2(2n - 2 + \alpha + b)} \tag{3.7}$$

Пусть исследуемое решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям (3.1), формально определяется равенством

$$U(x, t) = F(x) + \sum_{m=0} A_m{}^\circ U_0 \left[\frac{\varphi(x)}{4a(T_m + t)}\right] + U^*(x, t)\, t^{(\alpha+b-2)\,{}^1/_2} \tag{3.8}$$

Здесь функция $U^*(x, t)$, являющаяся регулярным решением уравнения (1.1), удовлетворяет условиям

$$U^*(x, 0) = 0, \qquad U^*(x_0, t)\, t^{-{}^1/_2\,|2-\alpha-b|} \to 0 \quad \text{при } t \to \infty \tag{3.9}$$

Согласно теоремам о разложении регулярных функций в асимптотические ряды [4], функция $U^*(x_0, t)$ разлагается при $t \to \infty$ в степенной асимптотический ряд, который при достаточно больших t сходится к $U^*(x_0, t)$

$$U(x_0, t) \sim \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \ldots \qquad (c_n = \text{const})$$

Поэтому и в силу условий (3.7), (3.8) функцию $U^*(x, t)$ при $t > t_0$ можно выразить в виде

$$\left(\frac{\varphi}{4at}\right)^{0.5(2-\alpha-b)} U^*(x, t) \approx \sum_{n=1} c_n U_{-n}(\varphi, t) \qquad (\alpha+b<2)$$

$$t^{{}^1/_2(2-\alpha-b)}\, U^*(x, t) \approx \sum_{n=1} c_n V_{-n}(\varphi, t) \qquad (\alpha+b \geqslant 2) \tag{3.10}$$

В работе [5] на асимптотическом разложении основан эффективный метод оценки параметров однородных пористых пластов по кривым восстановления давления при немгновенном прекращении притока жидкости в скважину.

Используя автомодельные решения второго рода, легко обобщить этот метод и на неоднородные пласты.

Из (2.7) и (2.12) следует, что кривая восстановления забойного давления в бесконечном пласте асимптотически стремится к полулагорифмической прямой только при $\alpha + b = 2$.

При $\alpha + b < 2$ забойное давление в остановленной скважине, эксплуатировавшей бесконечный пласт, будет степенной функцией времени.

При $\alpha + b > 2$ забойное давление в остановленной скважине, эксплуатировавшей бесконечный пласт, стремится к некоторой постоянной.

Поступила 18 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
2. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта. М., «Недра», 1965.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961.
4. Эрдейн А. Асимптотические разложения. М., Физматгиз. 1962.
5. Иванов Т. Ф. Представление решений некоторых задач теории фильтрации и теплопроводности в виде суммы частных автомодельных решений уравнения теплопроводности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, вып. 5.