Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

О ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗРЫВА В ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМАХ

Ю. А. Буевич, Ю. П. Гупало

(Москва)

Рассмотрены уравнения сохранения массы и импульса жидкой дисперсионной среды и взвешенных частиц (дисперсной фазы) на произвольной поверхности разрыва в дисперсной системе. Получены условия, связывающие скачки скоростей, давлений и концентрации, и предложена модель поверхностного натяжения, действующего на этой поверхности. Величина коэффициента поверхностного натяжения зависит от отношения плотностей фаз, крупности частиц дисперсной фазы и других параметров.

Решена задача об устойчивости горизонтальной поверхности разрыва концентрации во взвешенном слое. Показано, что в случае, когда взвешенный слой располагается над поверхностью разрыва, последняя устойчива лишь по отношению к возмущениям с достаточно малой длиной волны. При этом критическая длина волны, которая и определяет предельные условия возникновения поршневого режима псевдоожижения, оказывается существенно зависящей от эффективного поверхностного натяжения. Верхняя же свободная поверхность взвешенного слоя, как и следовало ожидать, остается устойчивой по отношению к возмущениям с любой длиной волны. Полученные результаты согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

К исследованию поверхностей разрыва сводится ряд задач механики дисперсных систем. Одной из наиболее важных среди них является определение условий существования поршневого режима псевдоожижения, нарушающего нормальный ход технологических процессов в системе [1,2]. Под поршневым режимом подразумевают резкое нарушение однородности взвешенного слоя, наблюдаемое лишь в достаточно узких трубах и характеризуемое расслоением двухфазной системы по вертикали таким образом, что участки, занятые двухфазной смесью, регулярно чередуются с участками, занятыми однородной дисперсионной средой, в результате чего вся система напоминает многослойный сэндвич. Естественно ожидать, что задача о существовании поршневого режима сводится к исследованию устойчивости поверхностей разрыва.

Условия на поверхности разрыва в дисперсной системе, по-видимому, впервые рассматривались в работах [3,4]. Попытка решения задачи об устойчивости поверхности разрыва была предпринята Райсом и Вильгельмом [5], которые пришли к выводу о полной неустойчивости поверхности разрыва в случае, когда смесь расположена над однородной дисперсионной средой. Причина такого несоответствия с экспериментом, к которому пришли эти авторы, состоит в том, что они, как и впоследствии Марри [6], сделавший заключение об устойчивости верхней свободной поверхности взвешенного слоя, исходили из весьма грубой модели взвешенного слоя и поверхности разрыва. Главным недостатком этих исследований является игнорирование поверхностного натяжения.

Само существование поверхностного натяжения на поверхности разрыва в дисперсной системе до сих пор подвергалось дискуссии [1,2]. Однако, насколько известно авторам, как сторонники, так и противники этой гипотезы не привели сколько-нибудь существенных доводов в свою пользу, если не считать ссылок на сходство ряда явлений во взвешенном слое и однородной жидкости [2,7]. Была предпринята даже попытка экспериментального определения коэффициента поверхностного натяжения [7].

В предлагаемой работе устойчивость поверхности разрыва во взвешенном слое рассматривается на основании получаемых предварительно строгих условий на этой поверхности, включающих, в частности, некоторую модель поверхностного натяжения.

§ 1. Условия на поверхности разрыва. Модель поверхностного натяжения. В качестве исходной модели дисперсной системы примем модель, основанную на представлении о двойной среде, состоящей из двух взаимопроникающих, взаимодействующих сплошных сред. Для простоты ограничимся приближением, при котором каждая из этих сред аппроксимируется идеальной жидкостью, т. е. будем пренебрегать девиаторами напряжений в обеих средах. Тогда уравнения сохранения импульса и массы дисперсионной среды и дисперсной фазы можно записать в форме

$$d_1\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\right]\mathbf{v}=-\nabla p_1+d_1\varepsilon\mathbf{g}-\mathbf{f}$$

$$d_2\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{w}\nabla)\right]\mathbf{w}=-\nabla p_2+d_2\rho\mathbf{g}+\mathbf{f} \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\nabla(\varepsilon\mathbf{v})=0,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho\mathbf{w})=0,\qquad \varepsilon+\rho=1$$

Здесь $\mathbf{v}$, d_1, p_1 и $\mathbf{w}$, d_2, p_2 — скорости, плотности и давления дисперсионной среды и дисперсной фазы соответственно, ρ — объемная концентрация дисперсной фазы ($\varepsilon = 1-\rho$ — пористость системы), $\mathbf{f}$ — сила взаимодействия между дисперсионной средой и дисперсной фазой, $\mathbf{g}$ — ускорение поля внешних сил.

Силу взаимодействия $\mathbf{f}$ представим в виде

$$\mathbf{f}=-\rho\nabla p_1-\rho\mathbf{u}F(u,\rho),\qquad \mathbf{u}=\mathbf{w}-\mathbf{v} \qquad (1.2)$$

где первое слагаемое соответствует силе, действующей на частицы дисперсной фазы за счет градиента давления в дисперсионной среде, второе — силе сопротивления, в общем случае нелинейного, испытываемого частицами при их движении относительно дисперсионной среды, причем обе силы отнесены к единице объема смеси.

Запись силы $\mathbf{f}$ в форме (1.2) подразумевает учет лишь основных ее составляющих и пренебрежение эффектами, обусловленными ускорениями относительного движения частиц (эффект присоединенной массы и дополнительное сопротивление при нестационарном обтекании частиц). Это вполне оправдано, например, в случае, когда плотность частиц велика по сравнению с плотностью среды, или для движений, частота которых мала сравнительно с обратной величиной времени релаксации скорости частиц в потоке.

Предположим теперь, что в объеме, занятом дисперсной системой, имеется некоторая поверхность разрыва, такая, что концентрации частиц по обе ее стороны различны. Естественно ожидать, что скачок концентрации будет сопровождаться также скачками других величин.

Такая поверхность может разделять области, занятые частицами одного типа, и, в частности, отделять дисперсную систему от потока однородной дисперсионной среды. Она может служить также границей между областями, занятыми частицами разных типов, что характерно, например, для задач о сепарации частиц в потоке.

Разумеется, в действительности поверхность разрыва представляет собой идеализацию, соответствующую некоторому переходному слою толщиной 2Δ, где изменение параметров движения дисперсной системы значительно более резкое, чем в областях по обе его стороны. Ясно, что Δ совпадает по порядку величины со средним расстоянием между частицами вблизи этого слоя. С другой стороны, модель дисперсной системы, описываемая континуальными уравнениями (1.1), справедлива, строго говоря, лишь при изучении процессов, характерный линейный масштаб которых намного больше указанного расстояния. Поэтому в рамках этой модели можно устремить Δ к нулю и говорить именно о поверхности разрыва.

Введем прямоугольную систему координат x, y, z, связанную с некоторым плоским элементом $z = 0$ поверхности разрыва S, и обозначим величины, относящиеся к областям $z > 0$ и $z < 0$, индексами плюс и минус соответственно.

Интегрируя уравнения сохранения массы (1.1) по z от $-\Delta$ до $+\Delta$ и устремляя Δ к нулю, получим следующие соотношения между величинами по обе стороны поверхности $z = 0$:

$$(\varepsilon v_z)^+ = (\varepsilon v_z)^-, \qquad (\rho w_z)^+ = (\rho w_z)^- \tag{1.3}$$

представляющие собой условия сохранения потоков жидкости и частиц через поверхность S.

Чтобы получить условия для касательных составляющих скоростей, проинтегрируем аналогичным образом x- и y-компоненты уравнений сохранения импульса (1.1). Для этого предварительно преобразуем левые части этих уравнений при помощи уравнений сохранения массы следующим образом:

$$\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\right]\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathbf{v}) + \nabla(\varepsilon\mathbf{T}_v), \quad \rho\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{w}\nabla)\right]\mathbf{w} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{w}) + \nabla(\rho\mathbf{T}_w)$$
$$\mathbf{T}_v = \|v_i v_j\|, \qquad \mathbf{T}_w = \|w_i w_j\|, \qquad i, j = x, y, z \tag{1.4}$$

Используя преобразования (1.4), из x- и y-компонент уравнений сохранения импульса (1.1) получим

$$(\varepsilon v_x v_z)^+ = (\varepsilon v_x v_z)^-, \qquad (\varepsilon v_y v_z)^+ = (\varepsilon v_y v_z)^-$$
$$(\rho w_x w_z)^+ = (\rho w_x w_z)^-, \qquad (\rho w_y w_z)^+ = (\rho w_y w_z)^- \tag{1.5}$$

Из (1.3) и (1.5) следуют соотношения

$$v_x^+ = v_x^-, \qquad v_y^+ = v_y^-, \qquad w_x^+ = w_x^-, \qquad w_y^+ = w_y^- \tag{1.6}$$

представляющие собой условия непрерывности касательных составляющих скоростей на поверхности S.

Из z-компоненты уравнения сохранения импульса дисперсионной среды получим прежним путем

$$\tfrac{1}{2} d_1 [(v_z^2)^- - (v_z^2)^+] = p_1^+ - p_1^- \tag{1.7}$$

Наконец, вместо z-компоненты уравнения сохранения импульса дисперсной фазы удобнее рассмотреть ее сумму с z-компонентой уравнения сохранения импульса дисперсионной среды. Тогда, вновь используя преобразования (1.4), получим (1.8)

$$d_1 [(\varepsilon v_z^2)^- - (\varepsilon v_z^2)^+] + d_2 [(\rho w_z^2)^- - (\rho w_z^2)^+] = p_1^+ - p_1^- + p_2^+ - p_2^-$$

Очевидно, соотношения (1.7) и (1.8) выражают условия баланса нормальных напряжений в дисперсионной среде и полных нормальных напряжений во всей системе соответственно на поверхности S. Уравнения баланса полных касательных напряжений непосредственно следуют из соотношений (1.5). Вместе с условием (1.8) их можно трактовать как условия непрерывности тензора плотности полного потока импульса Π на поверхности S

$$\Pi = (p_1 + p_2)\mathbf{I} + d_1\varepsilon\mathbf{T}_v + d_2\rho\mathbf{T}_w, \qquad \mathbf{I} = \|\delta_{ij}\| \tag{1.9}$$

Отметим также, что условие (1.7) можно получить и непосредственно из интеграла Бернулли для жидкости, протекающей через решетку частиц, однако при выводе (1.7) дополнительные предположения, необходимые для существования интеграла Бернулли, не использовались.

Подчеркнем, что в полученных выше условиях на поверхности разрыва фигурируют относительные скорости, причем в общем случае нормальные составляющие скорости частиц не обязательно равны нулю, другими словами, возможен переход частиц через поверхность разрыва S. Однако в ряде случаев, например, когда S служит границей между дисперсной системой и однородной дисперсионной средой, такой переход частиц невозможен, так как из второго условия (1.3) следует, что $w_z^- = 0$ при $\rho^+ = 0$.

Выше рассматривался лишь плоский элемент поверхности раздела. Посмотрим теперь, как должно быть изменено условие (1.8) для полных нормальных напряжений на элементе криволинейной поверхности раздела $z = \zeta(t, x, y)$. С этой целью рассмотрим работу δA, необходимую для виртуального смещения $\delta\zeta$ этой поверхности. Работа δA, очевидно, складывается из работы, затрачиваемой на изменение объема, занятого дисперсной системой, и на изменение δS площади поверхности разрыва S.

Тогда

$$\delta A = \int\limits_S \{p_1^+ + p_2^+ - p_2^- - p_2^- + d_1[(\varepsilon v_z^2)^- - (\varepsilon v_z^2)^+] + d_2[(\rho w_z^2)^- - (\rho w_z^2)^+]\}\,\delta\zeta\,dS + \alpha\delta S \tag{1.10}$$

где α — энергия, необходимая для единичного увеличения площади поверхности раздела.

Дальнейшие рассуждения здесь вполне аналогичны тем, которые проводятся по отношению к поверхности раздела между двумя однофазными жидкостями (см., например, [8]). В результате получим для полных нормальных напряжений

$$p_1^+ - p_1^- + p_2^+ - p_2^- + d_1[(\varepsilon v_z^2)^- - (\varepsilon v_z^2)^+] + d_2[(\rho w_z^2)^- - (\rho w_z^2)^+] - \alpha(R_1^{-1} + R_2^{-1}) = 0 \tag{1.11}$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности разрыва.

Из (1.11) видно, что в случае криволинейной поверхности условие для полных нормальных напряжений отличается от соответствующего соотношения (1.8) для плоской поверхности дополнительным членом, обусловленным кривизной поверхности и нормальным перемещением частиц.

Очевидно, условия для полных касательных напряжений и для нормальных напряжений в жидкости, а также условия непрерывности потоков жидкости и частиц не изменятся, поэтому для криволинейной поверхности разрыва условия (1.3), (1.6) и (1.7) останутся прежними.

Соотношения (1.3), (1.6), (1.7) и (1.11) играют роль граничных условий, налагаемых на решения системы уравнений (1.1) на поверхности разрыва $z = \xi(t, x, y)$.

Рассмотрим теперь величину α, фигурирующую в условии (1.11) и выступающую как коэффициент эффективного поверхностного натяжения на поверхности разрыва в дисперсной системе, в соответствии с формулой (1.10), как энергию, необходимую для единичного увеличения площади поверхности разрыва. С этой целью вернемся к рассмотрению переходного слоя толщины 2Δ, о котором шла речь выше и в котором резко изменяются параметры движения системы. Увеличение площади поверхности разрыва, очевидно, означает выход определенного числа частиц из глубины дисперсной системы в указанный переходный слой. Ясно, что работа, затрачиваемая на выход одной частицы из области плюс в центр такого слоя, равна

$$A^+ = \lim_{\Delta \to 0} \int_{\Delta}^{+0} \theta^+ \frac{\partial p_1^+}{\partial z} dz = -\frac{\theta^+}{2} (p_1^+ - p_1^-) \tag{1.12}$$

Аналогично, для вывода частицы из области минус в центр переходного слоя необходимо совершить работу

$$A^- = \lim_{\Delta \to 0} \int_{-\Delta}^{-0} \theta^- \frac{\partial p_1^-}{\partial z} dz = \frac{\theta^-}{2} (p_1^+ - p_1^-) \tag{1.13}$$

где θ^+ и θ^- — объемы частиц в областях плюс и минус.

По определению величина α равна

$$\alpha = A^+N^+ + A^-N^- \tag{1.14}$$

где N^+ и N^- — число частиц, дополнительно попадающих из области плюс и минус соответственно на поверхность разрыва при увеличении ее площади на единицу.

Величины N^+ и N^- нетрудно выразить через концентрацию и объем частиц

$$N^+ = \left(\frac{\rho^+}{\theta^+}\right)^{2/3}, \quad N^- = \left(\frac{\rho^-}{\theta^-}\right)^{2/3} \tag{1.15}$$

Теперь из (1.12)—(1.15) получим окончательно

$$\alpha = {}^1/_2 \left[(\rho^{2/3}\theta^{1/3})^- - (\rho^{2/3}\theta^{1/3})^+\right] (p_1^+ - p_1^-) \tag{1.16}$$

Таким образом, коэффициент поверхностного натяжения оказывается пропорциональным скачку давления в дисперсионной среде на поверхности разрыва.

При помощи условия (1.7) можно также представить α в виде

$$\alpha = {}^1/_4 d_1 \left[(\rho^{2/3}\theta^{1/3})^- - (\rho^{2/3}\theta^{1/3})^+\right] \left[(v_z^2)^- - (v_z^2)^+\right] \tag{1.17}$$

Из (1.17) видно, что коэффициент поверхностного натяжения будет максимальным в том случае, когда поверхность разрыва представляет собой границу между дисперсной системой (например, взвешенным слоем) и однородной дисперсионной средой. Пусть для определенности поверхность разрыва горизонтальна и индекс минус относится к дисперсной системе, которая предполагается однородной. Тогда, учитывая первое условие (1.3), получим

$$\rho^+ = 0, \quad \rho^- = \rho, \quad \varepsilon^- = \varepsilon, \quad v_z^{\;+} = U, \quad v_z^{\;-} = \varepsilon^{-1} U$$

где U — скорость восходящего потока дисперсионной среды. В этом случае коэффициент поверхностного натяжения

$$\alpha = {}^1/_4 d_1 \rho^{2/3} \theta^{1/3} (\varepsilon^{-2} - 1) U^2 \tag{1.18}$$

Чтобы получить зависимость коэффициента поверхностного натяжения от физических параметров дисперсионной среды и частиц дисперсной фазы, воспользуемся предложенной в работе [9] эмпирической зависимостью для скорости U, которую удобно представить в форме

$$U \approx \frac{2}{9} \frac{\nu}{a} \frac{\beta}{1 + 0.0955 \sqrt{\beta}}, \quad \beta = \frac{\sigma a^3 g}{\nu^2} \varepsilon^{19/4}, \quad \sigma = \frac{d_2 - d_1}{d_1} \tag{1.19}$$

где ν — кинематическая вязкость дисперсионной среды, a — радиус частиц дисперсной фазы (частицы предполагаются сферическими). Эта зависимость соответствует также известным эмпирическим формулам Ричардсона и Заки [10].

Из (1.18) и (1.19) видно, что при $\beta \ll 1$ (практически уже при $\beta < 1$) коэффициент поверхностного натяжения равен

$$\alpha \approx 0.020 d_1 (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)^{5/3} \varepsilon^{15/2} \mu^{-2} (d_2 - d_1)^2 a^5 g^2 \tag{1.20}$$

т.е. обратно пропорционален квадрату динамической вязкости жидкости, прямо пропорционален квадрату разности плотностей частиц и жидкости и пятой степени крупности частиц. При $\beta \gg 1$ (практически при $\beta \gtrsim 10^4$)

$$\alpha \approx 2.2 (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)^{5/3} \varepsilon^{11/4} (d_2 - d_1) a^2 g \tag{1.21}$$

т. е. в этом случае коэффициент поверхностного натяжения оказывается пропорциональным разности плотностей частиц и жидкости и квадрату крупности частиц, причем не зависит от вязкости жидкости.

Таким образом, в зависимости от физических параметров дисперсной системы, коэффициент поверхностного натяжения может меняться в очень широких пределах.

Рассмотрим несколько типичных примеров. Определим величину коэффициента поверхностного натяжения на горизонтальной свободной поверхности однородного взвешенного слоя пористостью $\varepsilon = 0.5$ при псевдоожижении водой ($d_1 = 1$ *г/см*^{3}, $\nu = 0.01$ *см*^{2}*/сек*) и воздухом ($d_1 = 0.0012$ *г/см*^{3}, $\nu = 0.15$ *см*^{2}*/сек*) частиц катализатора плотностью $d_2 = 3$ *г/см*^{3} и радиусом 0.05 и 1 *мм*. Воспользовавшись формулами (1.20) и (1.21), получим

при псевдоожижении водой

$U = 0.041$ *см/сек*, $\alpha = 6 \cdot 10^{-6}$ *эрг/см*^{2} ($a = 0.05$ *мм*)

$U = 4.6$ *см/сек*, $\alpha = 1.5$ *эрг/см*^{2} ($a = 1$ *мм*)

при псевдоожижении воздухом

$U = 3.2$ *см/сек*, $\alpha = 4.5 \cdot 10^{-5}$ *эрг/см*^{2} ($a = 0.05$ *мм*)

$U = 190$ *см/сек*, $\alpha = 3.5$ *эрг/см*^{2} ($a = 1$ *мм*)

Приведенные значения α свидетельствуют о беспочвенности дискуссии о том, имеется или не имеется поверхностное натяжение во взвешенном слое. Действительно, коэффициент поверхностного натяжения оказывается ничтожно малым для мелких частиц и достаточно ощутимым для крупных (для сравнения напомним, что на поверхности раздела вода — воздух $\alpha = 72$ *эрг/см*^{2}).

§ 2. Устойчивость разрыва во взвешенном слое. Исследуем устойчивость поверхности разрыва концентрации твердой фазы во взвешенном слое в наиболее интересном для приложений случае, когда поверхность разрыва расположена горизонтально и отделяет область, занятую однородным взвешенным слоем, от области, занятой однородной дисперсионной средой, причем однородный поток жидкости направлен по нормали к поверхности разрыва.

Это включает в себя следующие две разновидности поверхностей разрыва:

1) поток жидкости направлен в сторону взвешенного слоя, расположенного над дисперсионной средой (например, верхняя поверхность жидкой прослойки при поршневом режиме);

2) поток жидкости направлен в сторону однородной дисперсионной среды, которая располагается над взвешенным слоем (например, верхняя свободная поверхность однородного взвешенного слоя или нижняя поверхность жидкой прослойки при поршневом режиме псевдоожижения).

Для простоты будем полагать, что однородная дисперсионная среда и взвешенный слой занимают полупространства. Кроме того, ограничимся случаем, когда сила сопротивления при относительном движении частиц и жидкости линейна по $\mathbf{u}$. Тогда функция $F(u, \varepsilon)$ в (1.2) имеет вид [9,10]

$$F(u, \varepsilon) = K(\rho)\frac{d_2 - d_1}{\tau}, \qquad \tau_0 = \frac{2}{9}\frac{a^2}{\nu}\frac{d_2 - d_1}{d_1} \tag{2.1}$$

где τ — время релаксации скорости частиц (для сферических частиц $\tau = \tau_0$).

Пусть в прямоугольной системе координат x, y, z плоскость $z = 0$ — невозмущенная поверхность разрыва; однородная дисперсионная среда и взвешенный слой занимают области $z > 0$ и $z < 0$ соответственно. Как и прежде, всем величинам в области $z > 0$ будем приписывать верхний индекс плюс, в области $z < 0$ — минус.

Уравнения (1.1) с учетом (1.2) и (2.1) допускают следующее простое решение, удовлетворяющее условиям на поверхности разрыва (1.3), (1.6)—(1.8) и соответствующее однородному установившемуся потоку жидкости (область $z > 0$) и неподвижной однородной взвеси частиц (область $z < 0$):

$$v_x^{\circ+} = v_y^{\circ+} = 0, \quad v_z^{\circ+} = U = -\tau g_z \frac{(\varepsilon^{\circ-})^2}{K(\rho^{\circ-})}, \quad \rho^{\circ+} = 1 - \varepsilon^{\circ+} = 0$$

$$v_x^{\circ-} = v_y^{\circ-} = 0, \; v_z^{\circ-} = U/\varepsilon^{\circ-}, \; w_x^{\circ-} = w_y^{\circ-} = w_z^{\circ-} = 0, \; \rho^{\circ-} = 1 - \varepsilon^{\circ-} = \mathrm{const}$$

$$p_1^{\circ+} = d_1 g_z z + p_{10}^{+}, \qquad p_1^{\circ-} = [d_1 + (d_2 - d_1)\rho^{\circ-}]\, g_z z + p_{10}^{-}$$

$$p_2^{\circ-} = p_{20}^{-} = (p_{10}^{+} - p_{10}^{-})\frac{1 - \varepsilon^{\circ-}}{1 + \varepsilon^{\circ+}}, \qquad p_{10}^{+} - p_{10}^{-} = \frac{1}{2} d_1 U^2 \left[\frac{1}{(\varepsilon^{\circ-})^2} - 1\right] \tag{2.2}$$

Здесь U — скорость однородного установившегося потока жидкости вдоль оси z (скорость фильтрации во взвешенном слое с пористостью $\varepsilon^{\circ-}$), $p_{10}{}^{+}$ и $p_{10}{}^{-}$, $p_{20}{}^{-}$ — давления на поверхности разрыва при $z \to +0$ и $z \to -0$ соответственно. Любые две из трех величин U, $\varepsilon^{\circ-}$, τ и, разумеется, плотность жидкой и твердой фаз предполагаются известными.

Заметим, что при выбранной выше ориентации оси z поверхности разрыва первого типа соответствуют значения $g_z = +g$, $U < 0$, второго типа — значения $g_z = -g$, $U > 0$.

Рассмотрим теперь малые возмущения поверхности разрыва

$$z = \zeta(x, y, t)$$

и соответствующие возмущения стационарного решения (2.2), т.е. положим

$$q(x, y, z, t) = q^{\circ}(z) + q'(x, y, z, t) \tag{2.3}$$

подразумевая под q составляющие скорости и давления по обе стороны поверхности разрыва. При этом в целях упрощения предполагается, что концентрация твердой фазы не испытывает возмущений, т. е. при возмущении поверхности разрыва взвешенный слой остается однородным, что вполне согласуется с экспериментальными данными.

Подставим выражения (2.3) с учетом невозмущенного решения (2.2) в исходные уравнения (1.1) и линеаризуем их по возмущениям. В дальнейшем отбрасываем всюду штрихи, обозначающие возмущения; кроме того, поскольку концентрация твердой фазы не возмущается, отбросим все верхние индексы у $\rho^{\circ-}$ и $\varepsilon^{\circ-}$, т. е. под величинами ρ и ε подразумеваем невозмущенные значения концентрации твердой фазы и пористости взвешенного слоя соответственно.

Таким образом, для малых возмущений получим уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial z}\right)v^{+} = -\frac{1}{d_1}\nabla p_1{}^{+}, \quad \nabla v^{+} = 0, \quad \sigma = \frac{d_2 - d_1}{d_1} \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{U}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\right)v^{-} = -\frac{1}{d_1}\nabla p_1{}^{-} + \frac{\sigma\rho K(\rho)}{1-\rho}\frac{w^{-} - v^{-}}{\tau}, \quad \nabla v^{-} = 0$$

$$\rho\frac{\partial w^{-}}{\partial t} = -\frac{1}{d_2}\nabla(\rho p_1{}^{-} + p_2{}^{-}) - \frac{\sigma\rho K(\rho)}{1+\sigma}\frac{w^{-} - v^{-}}{\tau}, \quad \nabla w^{-} = 0 \tag{2.5}$$

Граничные условия (1.3), (1.6), (1.7), (1.11) для возмущений должны быть поставлены на возмущенной поверхности разрыва $z = \zeta(x, y, t)$. Соответствующие условия, приведенные к плоскости невозмущенной поверхности разрыва $z = 0$, имеют вид

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = w_z{}^{-}, \qquad v_z{}^{+} = \varepsilon v_z{}^{-} + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial t} \tag{2.6}$$

$$v_x{}^{+} = v_x{}^{-} + \rho\frac{U}{\varepsilon}\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \qquad v_y{}^{+} = v_y{}^{-} + \rho\frac{U}{\varepsilon}\frac{\partial\zeta}{\partial y}$$

$$U\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)\left(v_z{}^{+} - \frac{\partial\zeta}{\partial t}\right) = \frac{1}{d_1}(p_1{}^{+} - p_1{}^{-}) - \rho\sigma g_z\zeta$$

$$U\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2\left(v_z{}^{+} - \frac{\partial\zeta}{\partial t}\right) = \frac{1}{d_1}p_2{}^{-} + \frac{\alpha}{d_1}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)$$

Следуя обычному методу, разложим возмущения в спектр и рассмотрим элементарные возмущения

$$q' = Q \exp(-i\omega t + \lambda z + ik_x x + ik_y y), \qquad \operatorname{Im} k_x = \operatorname{Im} k_y = 0 \tag{2.7}$$

Здесь подразумеваем под q' возмущения скорости и давления по обе стороны поверхности разрыва, а также возмущение самой этой поверхности (в последнем случае $\lambda = 0$). Достаточным условием неустойчивости рассматриваемой поверхности разрыва является наличие в спектре (2.7) составляющих, у которых $\operatorname{Im}\omega > 0$; вследствие полноты системы (2.7) это условие также и необходимо, т. е. если все $\operatorname{Im}\omega < 0$, поверхность разрыва устойчива.

Далее для амплитуд возмущений компонент скоростей по осям x и y введем преобразование

$$k_x Q_x + k_y Q_y = kQ, \qquad k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2} \tag{2.8}$$

При помощи (2.8) задача сводится к анализу двумерных возмущений (аналог теоремы Сквайра).

После подстановки (2.7) в уравнения (2.4) получим, с учетом преобразования (2.8), следующую систему уравнений для амплитуд возмущений в области, занятой дисперсионной средой:

$$(U\lambda - i\omega) V_z^+ = -\frac{\lambda}{d_1} P_1^+, \quad (U\lambda - i\omega) V^+ = -\frac{ik}{d_1} P_1^+, \quad \lambda V_z^+ + ikV^+ = 0 \tag{2.9}$$

Корни характеристического уравнения системы (2.9)

$$\lambda_1^+ = -k, \qquad \lambda_2^+ = +k, \qquad \lambda_3^+ = i\omega U^{-1} \tag{2.10}$$

Решения, соответствующие корню λ_2^+, должны быть отброшены, так как они не затухают на бесконечности (при $z \to \infty$). Нетрудно видеть далее, что решения, соответствующие корню λ_3^+, затухают на бесконечности лишь при $\operatorname{Im}\omega < 0$, $U < 0$ или при $\operatorname{Im}\omega > 0$, $U > 0$. Отсюда следует, что в случае поверхности разрыва первого типа ($U < 0$) эти решения могут быть отброшены как заведомо устойчивые. Поэтому решения, соответствующие корню λ_3^+, будут учитываться лишь в случае поверхности разрыва второго типа ($U > 0$).

Нетривиальные решения системы (2.9), которые рассматриваются в дальнейшем, можно записать в виде

$$V_z^+ = A, \quad V^+ = -iA, \quad P_1^+ = -d_1(U + i\omega k^{-1}) A \qquad (\lambda = \lambda_1^+)$$
$$V_z^+ = B^{**}, \quad V^+ = -iB^{**}, \quad P_1^+ = 0 \qquad (\lambda = \lambda_3^+) \tag{2.11}$$

Здесь A и B^{**} — произвольные постоянные, причем две звездочки вверху служат для указания, что постоянная не равна нулю только в случае поверхности разрыва второго типа.

Для амплитуд возмущений в области, занятой взвешенным слоем, получим из (2.5) следующую систему уравнений:

$$\left(\frac{U}{\varepsilon}\lambda - i\omega\right)V_z^- = -\frac{\lambda}{d_1}P_1^- - \rho\sigma g_z\varepsilon\frac{W_z^- - V_z^-}{U}$$

$$\left(\frac{U}{\varepsilon}\lambda - i\omega\right)V^- = -\frac{ik}{d_1}P_1^- - \rho\sigma g_z\varepsilon\frac{W^- - V^-}{U}$$

$$-i\omega\rho W_z^- = -\frac{\lambda}{d_2}(\rho P_1^- + P_2^-) + \frac{\rho\sigma g_z\varepsilon^2}{1+\sigma}\frac{W_z^- - V_z^-}{U}$$

$$-i\omega\rho W^- = -\frac{ik}{d_2}(\rho P_1^- + P_2^-) + \frac{\rho\sigma g_z\varepsilon^2}{1+\sigma}\frac{W^- - V^-}{U}$$

$$\lambda V_z^- + ikV^- = 0, \quad \lambda W_z^- + ikW^- = 0 \qquad (2.12)$$

Корни характеристического уравнения системы (2.12) равны

$$\lambda_{1,2}^- = -k, \qquad \lambda_{3,4}^- = +k \qquad (2.13)$$

$$\lambda_5^- = i\omega\frac{\varepsilon}{U} + \rho\sigma g_z\left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^2\left[1 - \left(1 + i\omega\frac{1+\sigma}{\sigma g_z}\frac{U}{\varepsilon^2}\right)^{-1}\right]$$

Решения, соответствующие корням $\lambda_{1,2}^-$, должны быть отброшены, так как они не затухают на бесконечности (при $z \to -\infty$). Рассмотрим теперь корень λ_5^- и определим знак его действительной части. Можно показать, что (2.14)

$$\operatorname{Re}\lambda_5^- = -\frac{\varepsilon}{U}\operatorname{Im}\omega - \rho\frac{1+\sigma}{U}\frac{\operatorname{Im}\omega + \chi|\omega|^2}{1 + 2\chi\operatorname{Im}\omega + \chi^2|\omega|^2}, \qquad \chi = -\frac{1+\sigma}{\sigma g_z}\frac{U}{\varepsilon^2}$$

Из (2.14) следует, что нарастающие со временем ($\operatorname{Im}\omega > 0$) или нейтральные ($\operatorname{Im}\omega = 0$) возмущения затухают на бесконечности ($\operatorname{Re}\lambda_5^- > 0$) лишь при $U < 0$, т. е. в случае поверхности разрыва первого типа. Поэтому решения, соответствующие корню λ_5^-, должны учитываться только в этом случае; в случае же поверхности разрыва второго типа они отбрасываются либо как не затухающие на бесконечности, либо как заведомо устойчивые.

Нетривиальные решения системы (2.12), которые рассматриваются в дальнейшем, можно записать в виде

$$V_z^- = C, \quad V^- = iC, \quad W_z^- = D, \quad W^- = iD$$

$$P_1^- = \frac{d_1}{k}\left(i\omega - \frac{U}{\varepsilon}k + \rho\sigma g_z\frac{\varepsilon}{U}\right)C - \rho\sigma g_z\frac{\varepsilon}{U}\frac{d_1}{k}D$$

$$P_2^- = \frac{d_1\rho}{k}\left(-i\omega + \frac{U}{\varepsilon}k - \sigma g_z\frac{\varepsilon}{U}\right)C + \frac{d_2\rho}{k}\left(i\omega + \frac{\sigma g_z}{1+\sigma}\frac{\varepsilon}{U}\right)D$$

$$(\lambda = \lambda_{3,4}^-)$$

$$V_z^- = E^*, \quad V^- = i\lambda_5^- k^{-1}E^*, \quad P_1^- = P_2^- = 0$$

$$W_z^- = \left[1 + \frac{1}{\rho\sigma g_z}\frac{U}{\varepsilon}\left(i\omega - \lambda_5^-\frac{U}{\varepsilon}\right)\right]E^*$$

$$W^- = i\left[1 + \frac{1}{\rho\sigma g_z}\frac{U}{\varepsilon}\left(i\omega - \lambda_5^-\frac{U}{\varepsilon}\right)\right]\frac{\lambda_5^-}{k}E^* \qquad (2.15)$$

$$(\lambda = \lambda_5^-)$$

Здесь C, D и E^* — произвольные постоянные, причем одна звездочка вверху служит для указания, что постоянная не равна нулю только в случае поверхности разрыва первого типа.

После подстановки в условия на поверхности разрыва (2.6) спектральных разложений (2.7), применения преобразования (2.8) и использования решений (2.11) и (2.15) получим следующую систему уравнений относительно постоянных A, B^{**}, C, D, E^* и амплитуды возмущения поверхности разрыва Z:

$$D+\left[1+\frac{1}{\rho\sigma g_z}\frac{U}{\varepsilon}\left(i\omega-\lambda_5^- \frac{U}{\varepsilon}\right)\right]E^*+i\omega Z=0 \qquad (2.16)$$

$$A+B^{**}-\varepsilon C-\varepsilon E^*+i\omega\rho Z=0, \quad A+B^{**}+C+\frac{\lambda_5^-}{k}E^*+\rho\frac{U}{\varepsilon}kZ=0$$

$$\left(i\omega+\frac{U}{\varepsilon^2}k\right)A+U\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right)kB^{**}+\left(i\omega-\frac{U}{\varepsilon}k+\rho\sigma g_z\frac{\varepsilon}{U}\right)C-$$

$$-\rho\sigma g_z\frac{\varepsilon}{U}D+\left[i\omega U\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right)+\rho\sigma g_z\right]kZ=0$$

$$\rho\frac{U}{\varepsilon^2}kA+\rho\frac{U}{\varepsilon^2}kB^{**}+\left(i\omega-\frac{U}{\varepsilon}k+\sigma g_z\frac{\varepsilon}{U}\right)C-$$

$$-\left[i\omega(1+\sigma)+\sigma g_z\frac{\varepsilon}{U}\right]D+\left(i\omega\rho\frac{U}{\varepsilon^2}k+\frac{\alpha}{d_1\rho}k^3\right)Z=0$$

Таким образом, имеем однородную систему пяти уравнений с пятью неизвестными (напомним, что в каждом случае лишь одна из величин, отмеченных звездочками, отлична от нуля). Условие существования нетривиальных решений системы (2.16) дает уравнение относительно ω. Исследование знака мнимой части корней этого уравнения приводит к искомому условию устойчивости.

Рассмотрим каждую из разновидностей поверхности разрыва раздельно.

Поверхность разрыва первого типа. В этом случае взвешенный слой расположен над однородной дисперсионной средой, $g_z=+g$, $U<0$, $B^{**}=0$. Характеристическое уравнение системы (2.16) представляет собой алгебраическое уравнение пятой степени относительно ω. Исследование его корней значительно упрощается, если заметить, что левую часть уравнения можно представить произведением полиномов второго и третьего порядков. Тогда характеристическое уравнение можно записать в виде

$$\Pi_2(\Omega)\,\Pi_3(\Omega)=0, \qquad \Omega=-i\omega \qquad (2.17)$$

$$\Pi_2(\Omega)=\Omega^2+\left(\frac{U}{\varepsilon}k-\frac{\varepsilon\sigma g}{U}\,\frac{1+\rho\sigma}{1+\sigma}\right)\Omega-\frac{\varepsilon\sigma g}{1+\sigma}k$$

$$\Pi_3(\Omega)=a_0\Omega^3+a_1\Omega^2+a_2\Omega+a_3$$

$$a_0=2+(1+\varepsilon)\sigma, \qquad a_1=-\frac{U}{\varepsilon}a_0k-\frac{\varepsilon}{U}(2+\rho\sigma)\sigma g$$

$$a_2=\frac{\alpha(1+\varepsilon)}{\rho d_1}k^3+\frac{\rho}{\varepsilon}U^2k^2+(3\varepsilon-1)\sigma gk$$

$$a_3=-\frac{\alpha\varepsilon\sigma g}{d_1U}k^3\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho\varepsilon^2\sigma g}U^2k+1\right)-\frac{\rho}{\varepsilon^2}U^3k^3+\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\rho\sigma gUk^2+\rho\varepsilon\sigma^2g^2\frac{k}{U}$$

Из (2.13) теперь видно, что корни полинома $\Pi_2(\Omega)$ обращают в нуль разность $\lambda_5^- - k$. Но тогда из (2.16) и (2.15) следует, что если ни один из этих корней не является корнем полинома $\Pi_3(\Omega)$, соответствующие решения системы (2.16) таковы, что все возмущения имеют нулевые амплитуды. Поэтому достаточно рассмотреть лишь корни полинома $\Pi_3(\Omega)$.

По определению Ω условие устойчивости соответствует требованию отрицательности $\operatorname{Re}\Omega$. Применив критерий Гурвица к полиному $\Pi_3(\Omega)$, получим, таким образом, следующие необходимые и достаточные условия устойчивости:

$$a_0 > 0, \qquad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \qquad a_3 > 0 \tag{2.18}$$

Из (2.17) видно, что первое из этих условий не зависит от волнового числа k и выполняется всегда. Второе условие можно записать так:

$$\frac{\alpha}{\rho d_1} k^2 + \frac{1+\rho+\sigma}{\varepsilon^2} U^2 k + (1+\rho\sigma)\sigma g > 0$$

Ясно, что и это условие выполняется при любых значениях k (напомним, что, по определению, $k \geqslant 0$).

Остается третье условие, которое удобно представить в безразмерной форме

$$\Lambda^3 + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2}\Lambda^2 - \left(\Sigma^2 + \frac{1}{\varepsilon^3}\right)\Lambda - \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\Sigma^2 < 0 \tag{2.19}$$

$$\Lambda = \frac{\sigma g}{U^2 k}, \qquad \Sigma = \left(\frac{\alpha\sigma g}{\rho d_1 U^4}\right)^{1/2}$$

Таким образом, поверхность разрыва будет устойчивой для всех волновых чисел, удовлетворяющих неравенству

$$k > k_* = \frac{\sigma g}{U^2 \Lambda_*} \tag{2.20}$$

где Λ_* — единственный положительный корень полинома в левой части неравенства (2.19). При $k < k_*$ разрыв неустойчив.

Поверхность разрыва второго типа. В этом случае однородная дисперсионная среда расположена над взвешенным слоем, $g_z = -g$, $U > 0$, $E^* = 0$. Характеристическое уравнение системы (2.16) можно записать в виде

$$(\Omega - Uk)\left[\left(1 + \frac{1+\varepsilon}{2}\sigma\right)\Omega^2 + \sigma g\frac{\varepsilon}{U}\Omega + \frac{\alpha(1+\varepsilon)}{2\rho d_1}k^3 + \frac{\rho}{2\varepsilon}U^2k^2 + \frac{\rho}{2}\sigma g k\right] = 0,$$

$$\Omega = -i\omega \tag{2.21}$$

Корень $\Omega = Uk$ соответствует случаю $\lambda_3^+ = -k$ и, так же, как в рассмотренном случае поверхности разрыва первого типа, амплитуды всех возмущений оказываются нулевыми. Два других корня характеристического уравнения имеют, очевидно, отрицательные действительные части при любых $k > 0$.

Таким образом, рассматриваемая поверхность разрыва всегда устойчива по отношению к возмущениям любой частоты, что соответствует экспериментальным данным. Так как этот результат, как видно из (2.21), не зависит от величины поверхностного натяжения, не удивительно что Марри [6] пришел в этом случае к правильному выводу, несмотря на неправильную постановку граничных условий на поверхности разрыва.

В заключение отметим, что полученные выше результаты можно аналогичным методом обобщить на случай нелинейного сопротивления частиц и на случай взвешенного слоя конечной толщины.

Поступила 3 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Дэвидсон И. Ф., Харрисон Д. Псевдоожижение твердых частиц. М. «Химия», 1965.
2. Гельперин Н. И., Айнштейн В. Г., Кваша В. Б. Основы техники псевдоожижения. М., «Химия», 1967.
3. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
4. Клейман Я. З. О распространении сильных разрывов в многокомпонентной среде. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
5. Rice W. J., Wilhelm R. H. Surface dynamics of fluidized beds and quality of fludization. A. I. Ch. E. J., 1958, vol. 4, No 4.
6. Murray J. D. On the mathematics of fluidization. Part I. Fundamental equations and wave propagation. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, No 3.
7. Furukawa J., Ohmae T. Liquid-like properties of fluidised systems. Industr. and Engng Chem., 1958, vol. 50, No 5.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
9. Горошко В. Д., Розенбаум Р. Б., Тодес О. М. Приближенные закономерности гидравлики взвешенного слоя и стесненного падения. Изв. вузов, Нефть и газ, 1958, № 1.
10. Richardson J. F., Zaki W. N. Sedimentation and fluidization. Part 1. Trans. Inst Chem. Engrs, 1954, vol. 32, No. 1, p. 35.