

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО КОНВЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ, ВЫЗВАННОГО ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, А. А. Якимов  
(Пермь)

Рассматривается плоскопараллельное конвективное движение между вертикальными плоскостями, вызванное однородно распределенными в жидкости внутренними источниками тепла.

В закрытом сверху и снизу канале внутренний разогрев приводит к возникновению замкнутого конвективного движения с четными относительно оси канала профилями скорости и температуры.

Исследование устойчивости проводится в предположении, что влиянием тепловых возмущений можно пренебречь. Определены спектры декрементов нормальных гидродинамических возмущений. Показано, что движение становится неустойчивым относительно возмущений в виде вихрей, развивающихся на границах встречных конвективных потоков. Построены нейтральные кривые для двух нижних мод неустойчивости, отличающихся взаимным расположением цепочек вихрей.

**1. Стационарное движение.** Рассмотрим плоский вертикальный слой жидкости толщиной  $2h$ , ограниченный параллельными плоскостями  $x = \pm h$ . Обе плоскости поддерживаются при одинаковой постоянной температуре, принимаемой далее за начало отсчета. В жидкости равномерно по объему распределены внутренние источники тепла с объемной плотностью  $Q$ . Запишем уравнения конвекции с учетом внутренних источников тепла (все обозначения обычные)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + g\beta T \gamma \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \chi \Delta T + \frac{Q}{\rho c_p}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

Если вертикальный размер канала достаточно велик, то стационарное движение в средней части канала можно считать плоскопараллельным (расположение осей координат указано на фиг. 1)

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z = v_0(x), \quad T = T_0(x), \quad p = p_0(z) \quad (1.3)$$

Из (1.1) и (1.2) находим уравнения для  $v_0$ ,  $T_0$  и  $p_0$

$$\nu v_0'' + g\beta T_0 = \frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dz} = C, \quad T_0'' = -q \quad \left( q = \frac{Q}{\rho c_p \chi} = \text{const} \right) \quad (1.4)$$

Здесь  $C$  — постоянная разделения переменных.

На твердых изотермических границах канала скорость и температура обращаются в нуль. Кроме того, канал предполагается закрытым сверху и снизу; отсюда следует условие равенства нулю расхода по любому сечению:

$$v_0(\pm h) = 0, \quad T_0(\pm h) = 0, \quad \int_{-h}^h v_0 dx = 0 \quad (1.5)$$

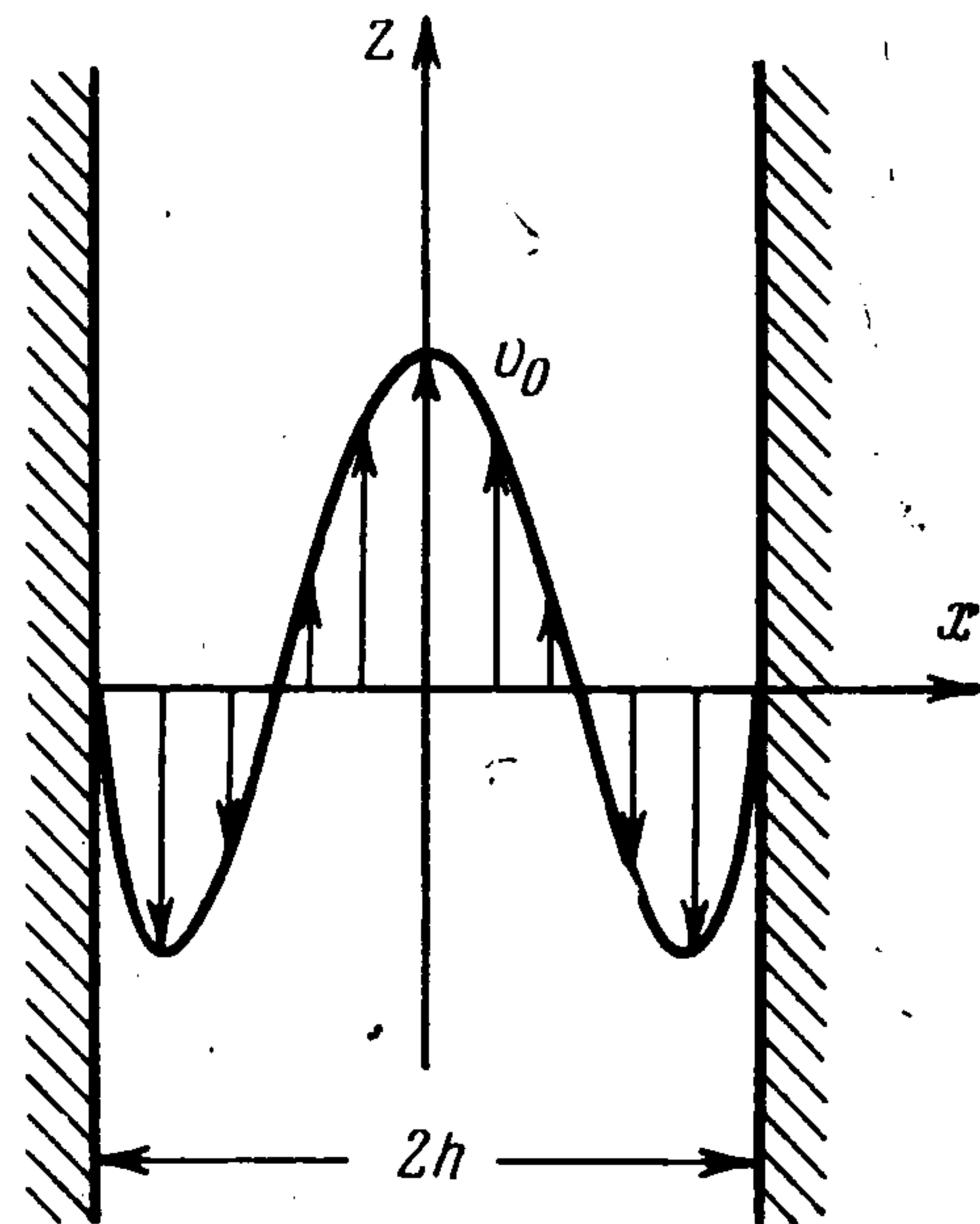
Из (1.4) и (1.5) находим распределения скорости, температуры и давления в плоскопараллельном стационарном движении

$$v_0 = \frac{g\beta q h^4}{120\nu} \left[ 1 - 6 \left( \frac{x}{h} \right)^2 + 5 \left( \frac{x}{h} \right)^4 \right]$$

$$T_0 = \frac{qh^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{x}{h} \right)^2 \right], \quad \frac{dp_0}{dz} = \frac{2}{5} \rho g \beta q h^2 \quad (1.6)$$

Таким образом, в отличие от конвективного течения между плоскостями, имеющими разную температуру, в рассматриваемом случае течение имеет четные профили скорости и температуры. Распределение скорости показано на фиг. 1. Как видно, течение состоит из трех конвективных потоков: центрального восходящего и двух нисходящих возле стенок. Максимальная скорость на оси

$$v_m = g\beta q h^4 / 120\nu$$



Фиг. 1

2. Нормальные возмущения. Для исследования устойчивости стационарного движения (1.6) применим метод возмущений. Рассмотрим возмущенное движение  $v_0 + v$ ,  $T_0 + T$ ,  $p_0 + p$ , где  $v$ ,  $T$ ,  $p$  — малые нестационарные возмущения. В линейном по возмущениям приближении из (1.1), (1.2) получим безразмерные уравнения возмущений

$$\partial v / \partial t + G [(v \nabla) v_0 + (v_0 \nabla) v] = -\nabla p + \Delta v + T \gamma \quad (2.1)$$

$$\partial T / \partial t + G [v \nabla T_0 + v_0 \nabla T] = P^{-1} \Delta T, \quad \text{div } v = 0 \quad (2.2)$$

$$(G = g\beta q h^5 / 2\nu^2, P = \nu / \chi)$$

Здесь в качестве единиц расстояния, времени, скорости, температуры и давления приняты соответственно

$$h, h^2 / \nu, g\beta q h^4 / 2\nu, qh^2 / 2, \rho g\beta q h^3 / 2$$

Число Прандтля определено обычным образом. Число Грассхофа определено через мощность внутренних источников тепла  $q$ ; легко видеть, что в число Грассхофа в качестве характерной разности температур входит максимальная температура на оси канала  $1/2 qh^2$ . Безразмерные невозмущенные профили скорости и температуры имеют вид

$$v_0 = 1/60(1 - 6x^2 + 5x^4), \quad T_0 = 1 - x^2 \quad (2.3)$$

Будем рассматривать плоские возмущения

$$v_x(x, z, t) = -\partial \psi / \partial z, \quad v_y = 0, \quad v_z(x, z, t) = \partial \psi / \partial x, \quad T = T(x, z, t) \quad (2.4)$$

Здесь  $\psi(x, z, t)$  — функция тока. Положим

$$\psi = \varphi(x) \exp(-\lambda t + ikz), \quad T = \theta(x) \exp(-\lambda t + ikz) \quad (2.5)$$

где  $\varphi$  и  $\theta$  — амплитуды нормальных возмущений,  $\lambda$  — декремент,  $k$  — волновое число.

Подставляя (2.5) в (2.1) и (2.2), получим амплитудные уравнения

$$\Delta^2 \varphi - ikGH\varphi + \theta' = -\lambda \Delta \varphi \quad (2.6)$$

$$P^{-1} \Delta \theta + ikG(T_0' \varphi - v_0 \theta) = -\lambda \theta \quad (2.7)$$

$$(\Delta \varphi \equiv \varphi'' - k^2 \varphi, \quad H\varphi \equiv v_0 \Delta \varphi - v_0'' \varphi)$$

Из условия обращения в нуль возмущений скорости и температуры на границах слоя следуют однородные граничные условия для амплитуд

$$\varphi = \varphi' = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (2.8)$$

Краевая задача (2.6)—(2.8) определяет спектр характеристических возмущений и их декрементов  $\lambda$ .

Из результатов работ [1-5] следует, что в случае вертикального расположения канала неустойчивость встречных конвективных потоков имеет гидродинамическую природу. Роль тепловых возмущений в этом случае относительно невелика, что, в частности, проявляется в слабой зависимости критического числа Грассхофа от числа Прандтля. Исследуемое течение также состоит из встречных конвективных потоков, поэтому есть основания считать, что его кризис (по крайней мере, при не слишком больших значениях числа Прандтля) связан с гидродинамическим механизмом. Поэтому определение устойчивости этого течения можно провести в чисто гидродинамической постановке, пренебрегая тепловыми возмущениями и их влиянием на развитие гидродинамических возмущений. В таком приближении следует пренебречь членом с подъемной силой  $\theta'$  в уравнении движения (2.6) и не рассматривать вовсе уравнение теплопроводности (2.7). При этом дело сводится к решению краевой задачи Орра — Зоммерфельда

$$\Delta^2 \varphi - ikGH\varphi = -\lambda \Delta \varphi, \quad \varphi = \varphi' = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (2.9)$$

с заданным профилем скорости  $v_0$ .

Для решения задачи применим метод Бубнова — Галеркина. В качестве базисной системы функций примем амплитуды  $\varphi_i^{(0)}$  возмущений в покоящейся жидкости, определяемые краевой задачей

$$\Delta^2 \varphi_i^{(0)} = -\mu_i \Delta \varphi_i^{(0)}, \quad \varphi_i^{(0)} = \varphi_i^{(0)'} = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.10)$$

(явный вид базисных функций приведен, например, в [6]).

Подставляя в уравнение (2.9) аппроксимацию

$$\varphi = a_0 \varphi_0^{(0)} + a_1 \varphi_1^{(0)} + \dots + a_N \varphi_N^{(0)} \quad (2.11)$$

умножая на  $\varphi_i^{(0)}$  и интегрируя по  $x$  в пределах от минус единицы до единицы, получим систему линейных однородных уравнений

$$\sum_{n=0}^N [(\mu_n - \lambda) \delta_{mn} + ikGH_{mn}] a_n = 0 \quad (m = 0, 1, \dots, N) \quad (2.12)$$

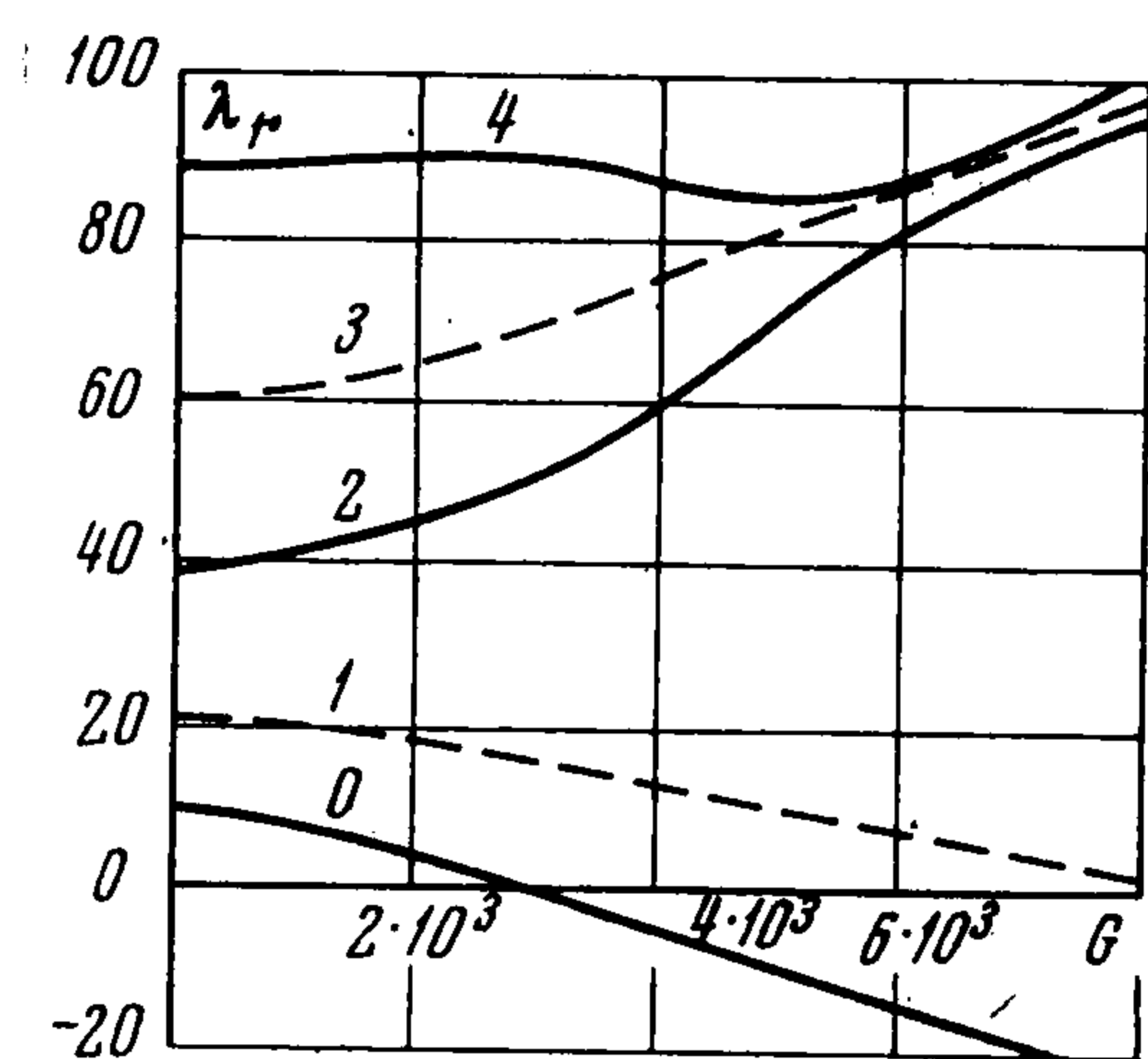
$$H_{mn} = \frac{1}{J_n} \int_{-1}^1 \varphi_m^{(0)} H \varphi_n^{(0)} dx, \quad J_n = \int_{-1}^1 \varphi_n^{(0)} \Delta \varphi_n^{(0)} dx$$

Характеристические декременты  $\lambda$  определяются как собственные значения матрицы системы (2.12).

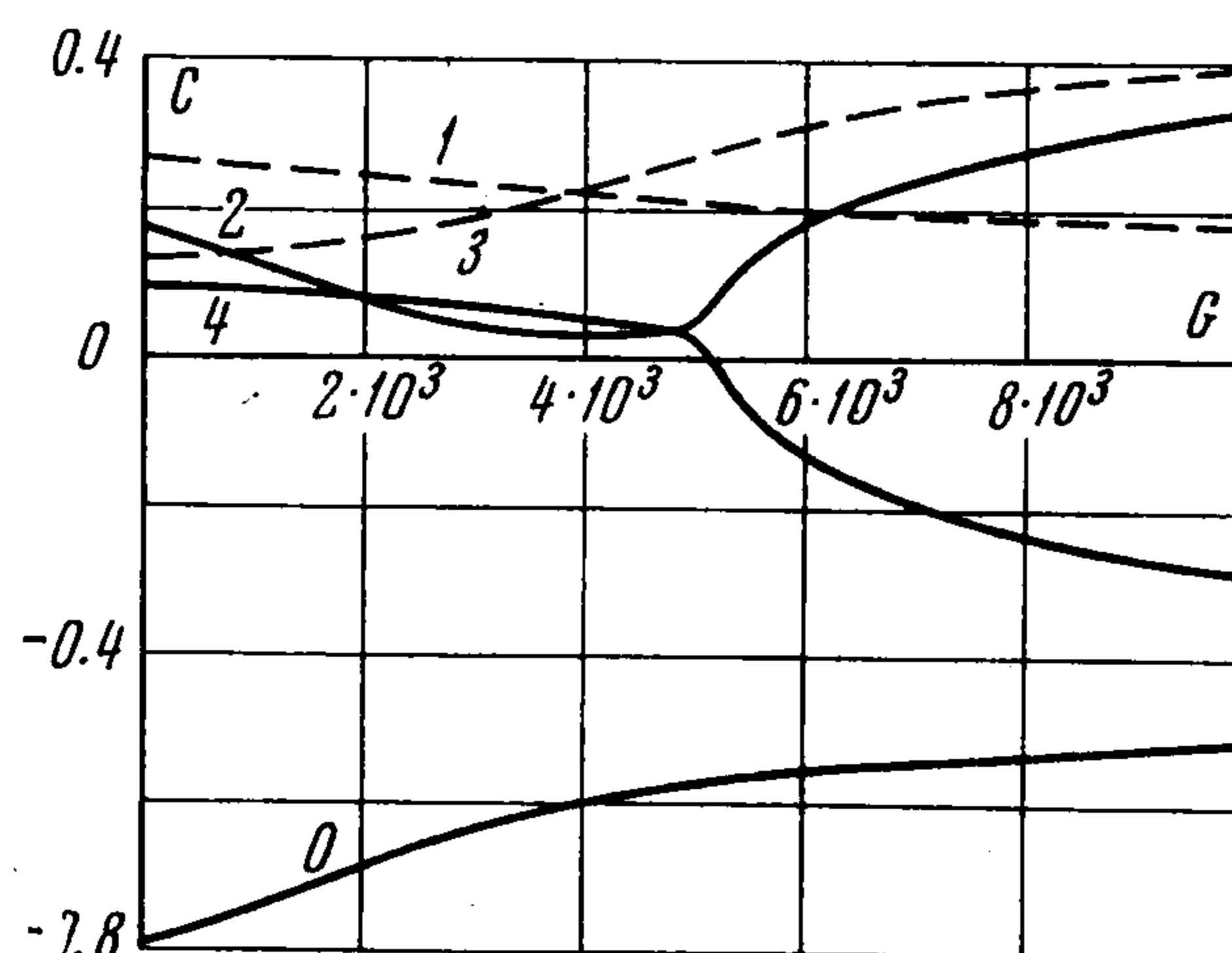
Ввиду четности профиля скорости  $v_0$  краевая задача (2.9) имеет решения двух типов: четные и нечетные относительно  $x$ . Четные решения аппроксимируются подсистемой четных базисных функций (2.10) ( $i = 0, 2, 4, \dots$ ), а нечетные решения — подсистемой нечетных функций ( $i = 1, 3, 5, \dots$ ). Соответственно этому матрица системы (2.12) имеет блочнодиагональную форму. Таким образом, можно отдельно находить приближенные решения четного и нечетного типов, оставляя в аппроксимации (2.11) соответственно четные или нечетные функции.

Собственные значения  $\lambda$  находились путем диагонализации комплексной матрицы при помощи  $QR$ -алгоритма (см. [7]). Для построения четных и нечетных решений выбирались аппроксимации, содержавшие до 16 базисных функций четного или нечетного типов. Практическая оценка сходимости проводилась сопоставлением найденных значений комплексных декрементов в приближениях, содержавших 8 и 16 базисных функций одной четности. В области  $0 \leq kG \leq 3 \cdot 10^4$  значения декрементов восьми нижних уровней спектра в этих приближениях практически не отличались.

**3. Спектр декрементов. Неустойчивость.** Перейдем к обсуждению полученных результатов. На фиг. 2 и 3 даны для примера результаты расчета спектра декрементов для фиксированного значения волнового числа  $k = 1$ . В соответствии с общей теорией [6] свойство четности невозмущенного профиля приводит к тому, что уже при сколь-



Фиг. 2



Фиг. 3

угодно малой скорости основного течения (при сколь угодно малых  $G$ ) декременты нормальных возмущений оказываются комплексными:  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ . Вещественная часть  $\lambda_r$  характеризует скорость затухания (нарастания) возмущений, а мнимая часть  $\lambda_i$  определяет их фазовую скорость.

На фиг. 2 изображены вещественные части нескольких «нижних» уровней спектра декрементов. Сплошные линии относятся к четным возмущениям (0, 2, 4, ...), пунктир — к нечетным (1, 3, 5, ...). Уровни занумерованы в порядке возрастания вещественной части  $\lambda_r$  при малых  $G$ .

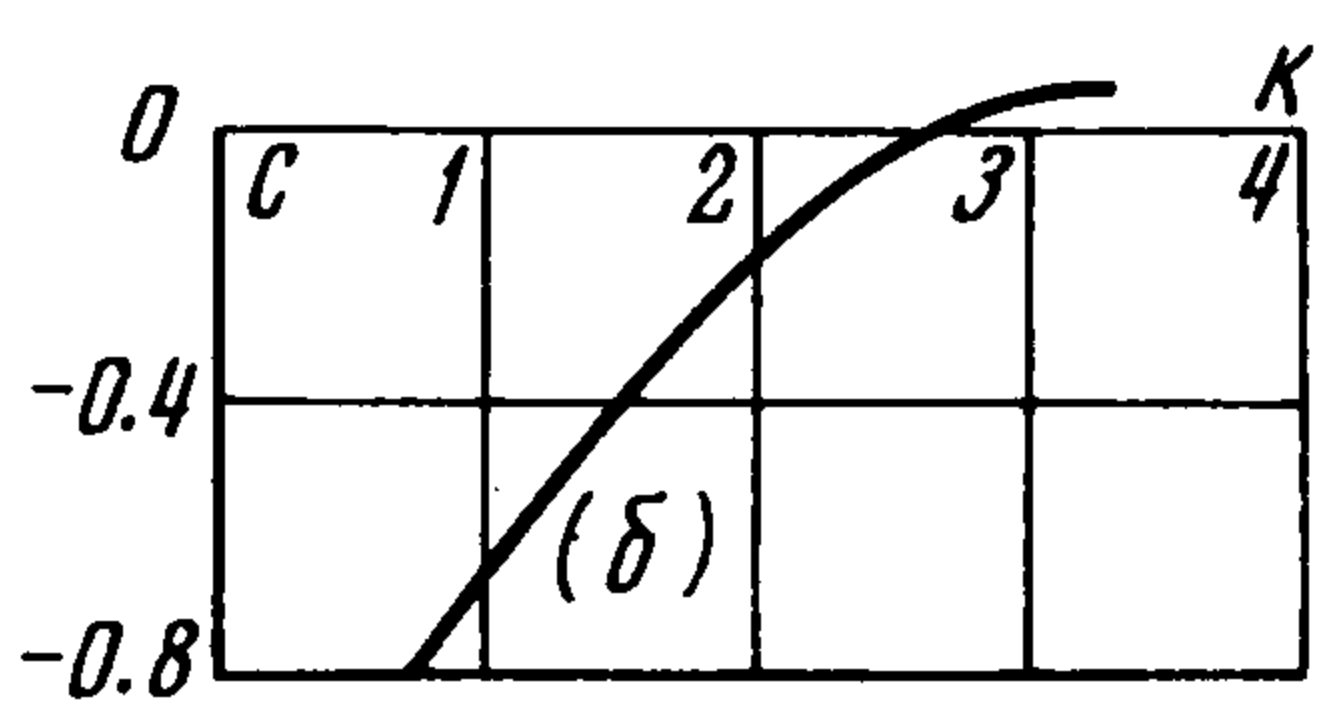
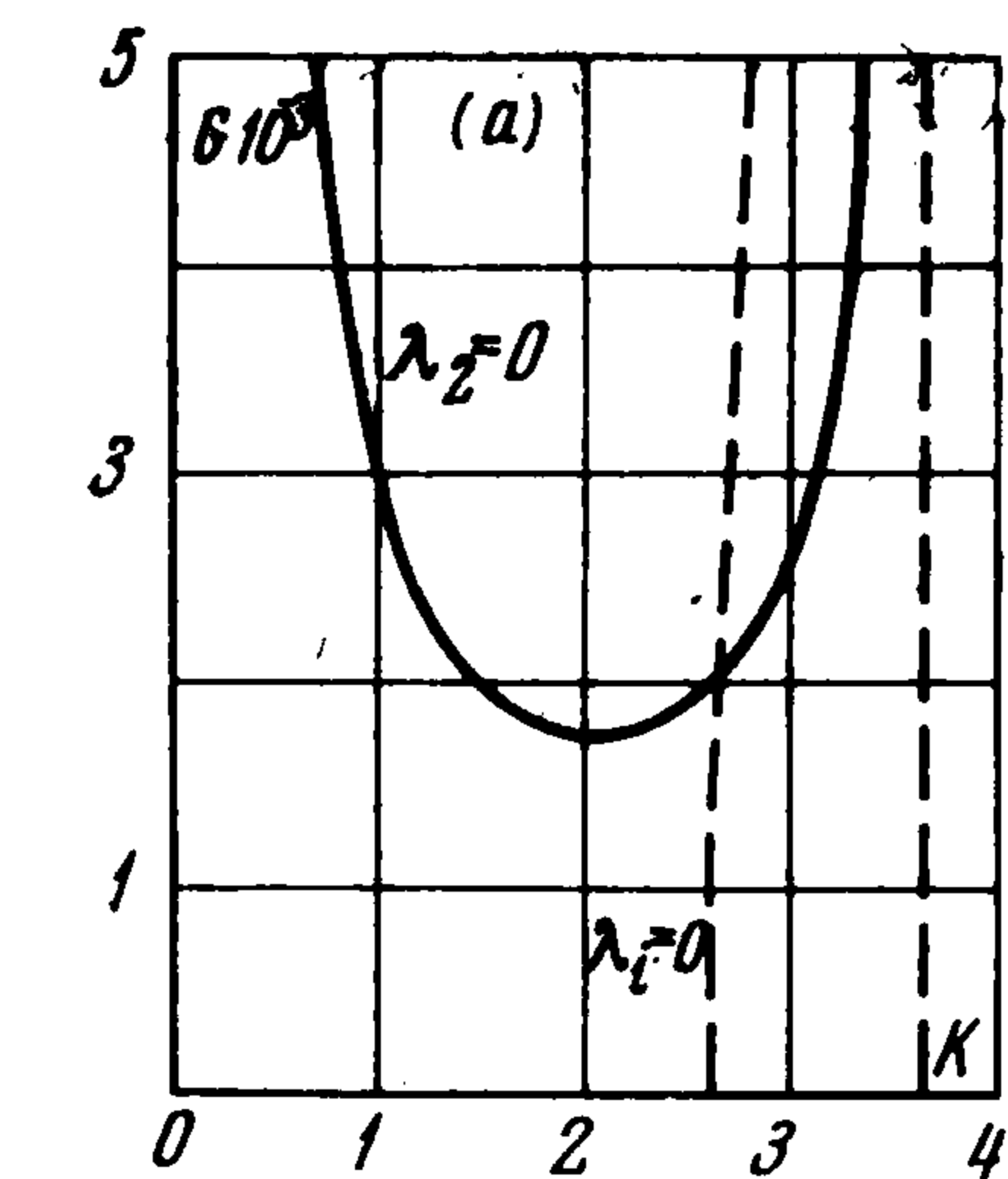
Как видно из фиг. 2, два нижних уровня (первый четный и первый нечетный) при достаточно больших  $G$  порождают неустойчивость; вещественные части соответствующих декрементов (с номерами нуль и единица) становятся отрицательными при увеличении  $G$ . Для данного значения волнового числа  $k = 1$  критические значения числа Грассхофа равны  $G = 2960$  и  $G = 8600$ .

На фиг. 3 изображены безразмерные фазовые скорости  $c$  для тех же возмущений. За единицу фазовой скорости принято максимальное значение скорости невозмущенного движения на оси канала  $v_m$ . Определенная в этих единицах безразмерная фазовая скорость связана с мнимой частью декремента  $\lambda_i$  соотношением

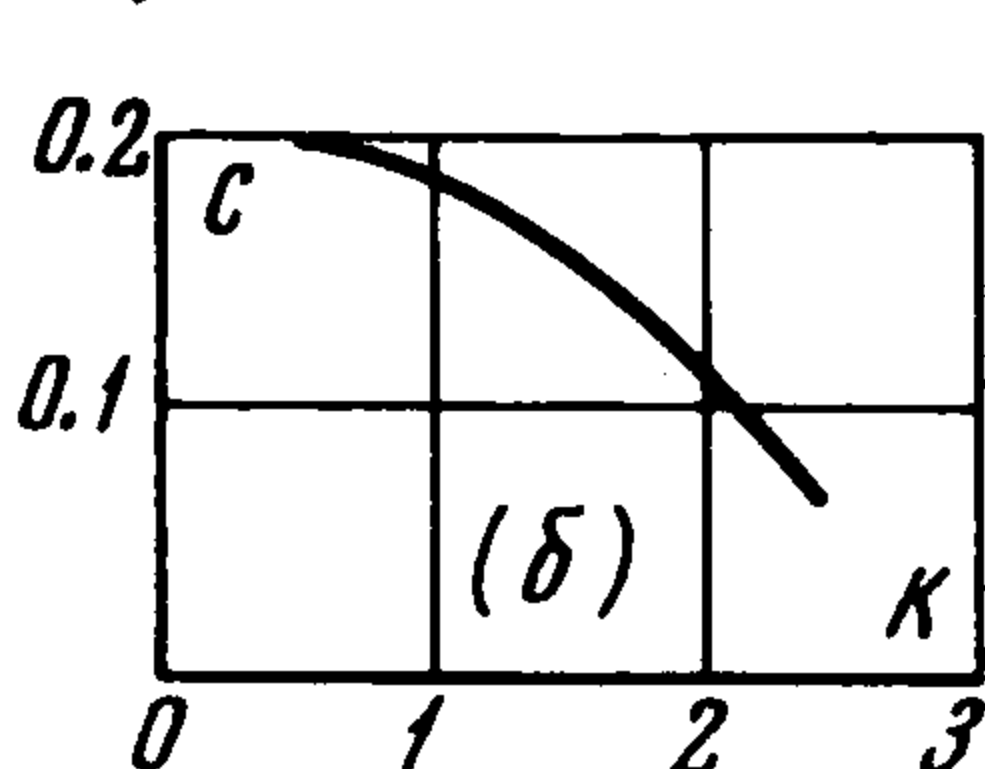
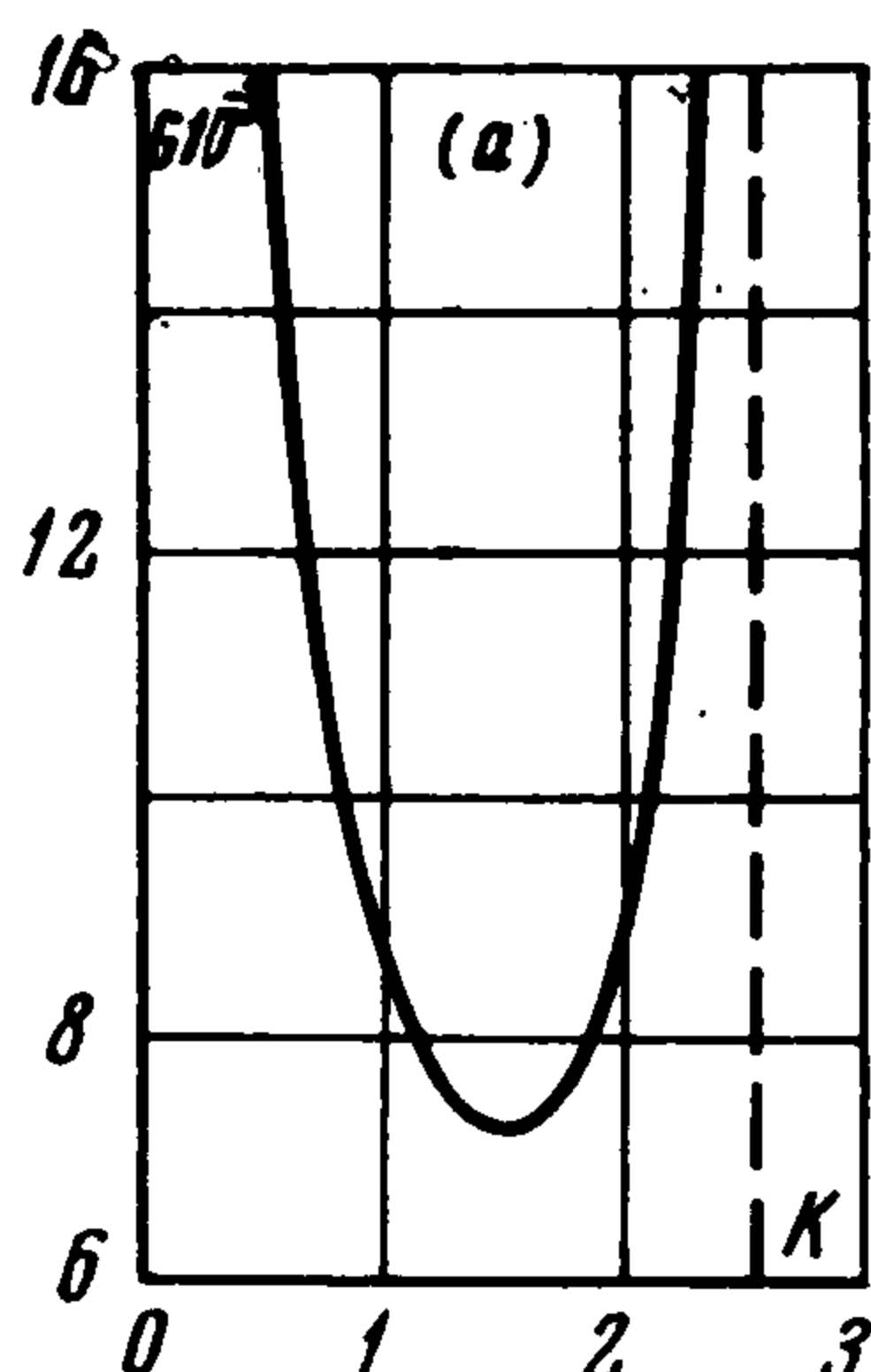
$$c = \frac{60}{G} \frac{\lambda_i}{k}$$

Положительным значениям фазовой скорости  $c$  соответствуют возмущения в виде бегущих волн, распространяющихся вдоль положительного направления оси  $z$ , т. е. сносимые центральным восходящим потоком. Возмущения с  $c < 0$  бегут в противоположную сторону. Расчеты показывают, что при различных  $k$  и  $G$  фазовая скорость одной и той же моды может иметь разный знак (на фиг. 3 видно, например, изменение знака  $c$  при увеличении числа Грассхофа для четвертого уровня спектра).

Из спектров  $\lambda_r(G)$ , полученных для разных волновых чисел, определяются критические числа  $G$  в зависимости от  $k$  (нейтральные кривые; вдоль этих кривых  $\lambda_r = 0$ ). Нейтральные кривые для нижнего четного и нижнего нечетного уровней изображены



Фиг. 4



Фиг. 5

на фиг. 4 и 5. Вместе с нейтральными кривыми представлены также и критические значения фазовых скоростей (значения  $c$ , соответствующие точкам нейтральной кривой).

Таким образом, расчет приводит к выводу, что рассматриваемое стационарное движение становится неустойчивым относительно четных и нечетных возмущений. Наиболее опасны возмущения четного типа: минимальное критическое число Грассхофа для них  $G_m = 1720$  и достигается при критическом волновом числе  $k_m = 2.05$ ; для возмущений же нечетного типа  $G_m = 7180$ ,  $k_m = 1.57$ . Интересно заметить, что фазовая скорость основной моды неустойчивости при изменении

параметров вдоль нейтральной кривой меняет знак (фиг. 4, б). Длинноволновые нейтральные возмущения с  $k < 2.65$  имеют отрицательную фазовую скорость, т. е. сносятся вниз; в частности, для критического возмущения, соответствующего минимуму на нейтральной кривой,  $c_m = -0.16$ . Для возмущений с волновыми числами  $k > 2.65$  фазовая скорость  $c > 0$ , т. е. возмущения сносятся вверх. Таким образом, существует точка на нейтральной кривой ( $k = 2.65$ ), которой соответствует нейтральное «стоячее» возмущение с равной нулю фазовой скоростью. Эта точка является пересечением нейтральной линии  $\lambda_r = 0$  с линией  $\lambda_i = 0$ , все точки которой соответствуют стоячим (затухающим или нарастающим) возмущениям. Существование стоячих возмущений, в том числе и нейтрального (при  $k = 2.65$ ), обусловлено, разумеется, тем, что рассматриваемое стационарное течение, хотя и имеет четный профиль, обладает, однако, свойством замкнутости (расход равен нулю).

В отличие от основного уровня неустойчивости нейтральные критические возмущения нечетной моды имеют при всех  $k$  положительную фазовую скорость, т. е. сносятся вверх (фиг. 5, б). На минимуме нейтральной кривой  $c_m = 0.15$ .

Для определения формы критических возмущений, соответствующих двум уровням неустойчивости, следует найти коэффициенты разложений (2.11). Эти коэффициенты определяются (с точностью до нормировки) однородной системой (2.12). Вычисление собственного вектора проводилось методом Гаусса. Зная функцию тока возмущений  $\psi$ , можно построить функцию тока суммарного движения  $\Psi = \psi_0(x) + a\psi(x, z, t)$ , где  $\psi_0$  — функция тока основного движения (2.3).

Изолинии функции тока суммарного движения определяются уравнением  $\text{Re } \Psi = \text{const}$  ( $\text{Re}$  — вещественная часть). На фиг. 6 представлена форма суммарного (возмущенного) движения для двух мод неустойчивости. При построении изолиний фиксировался момент времени  $t = 0$ , а нормировочный коэффициент  $a$  определялся из требо-

вания, чтобы максимальное значение функции тока возмущений составляло 0.1 от максимального значения невозмущенной функции тока. Обе картины движения соответствуют нарастающим возмущениям с параметрами  $k$  и  $G$ , близкими к минимумам нейтральных кривых. Фигура 6, а относится к четной моде неустойчивости с параметрами  $k = 2, G = 2000$ ; фиг. 6, б относится к нечетной моде с параметрами  $k = 1.5, G = 8000$ ; указанные на фигуре значения  $Re \Psi$  увеличены в  $10^3$  раз.

Изображенные на фиг. 6 структуры возмущенного движения позволяют понять природу неустойчивости рассматриваемого конвективного течения, а также отличие между обеими модами неустойчивости. Как и в случае конвективного течения между плоскостями, нагретыми до разной температуры, в рассматриваемом случае неустойчивость развивается в виде системы вихрей на границе раздела встречных конвективных потоков.

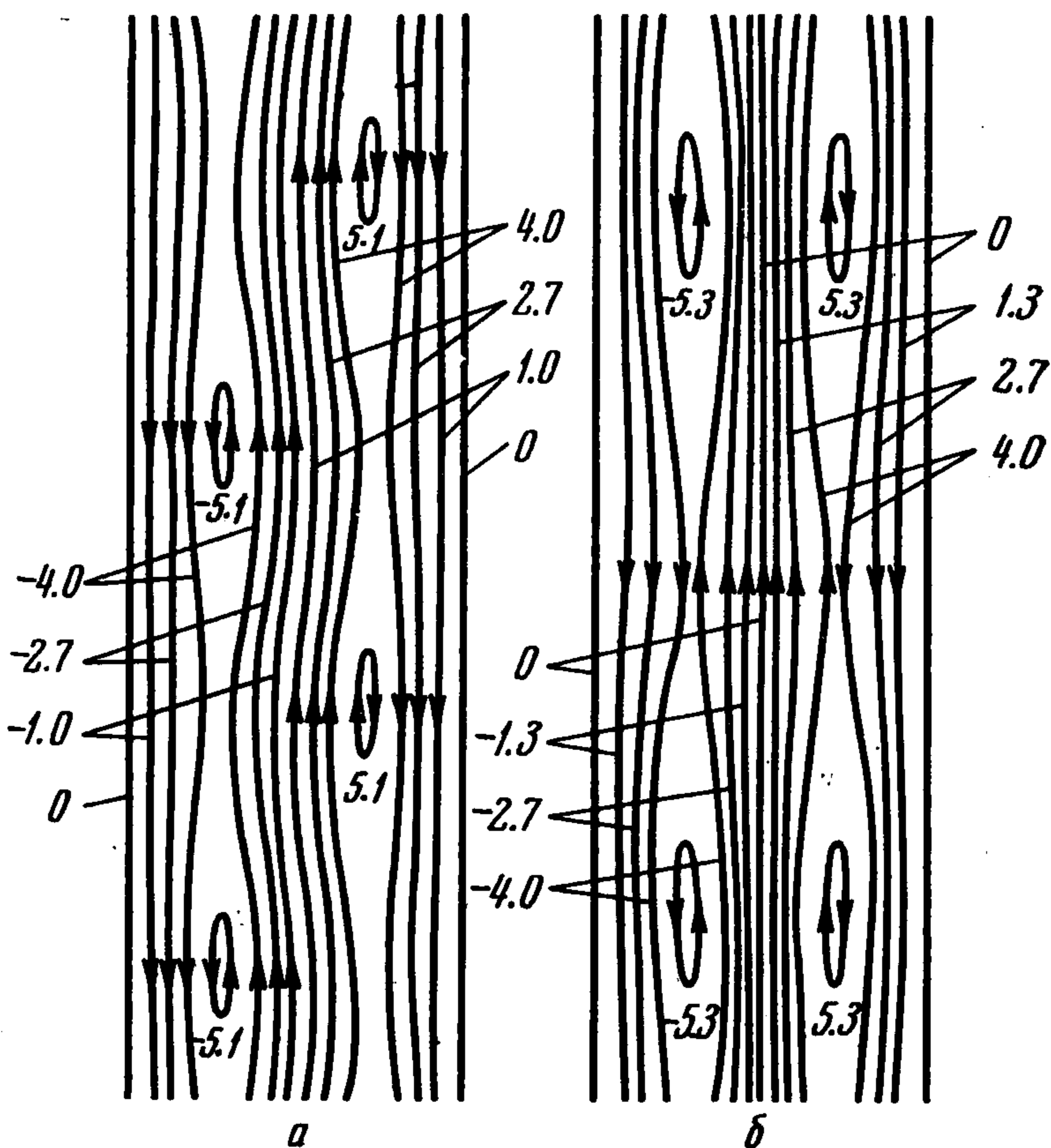
В отличие от течения с кубическим профилем этих границ раздела теперь две — в правой и левой половинах канала. Соответственно этому развиваются две цепочки вихрей, которые могут отличаться своим взаимным расположением. Нижней моде неустойчивости соответствуют две цепочки вихрей, расположенных в шахматном порядке (фиг. 6, а). На верхней моде неустойчивости эти цепочки расположены зеркально — симметрично относительно середины канала (фиг. 6, б). Шахматное расположение отвечает более «плотной упаковке» вихрей и потому оказывается более предпочтительным — ему соответствует меньшее значение критического числа Грасхофа.

Более плотная упаковка системы вихрей приводит, естественно, и к меньшей критической длине волны: при шахматном расположении расстояние между соседними вихрями (на минимуме нейтральной кривой) равно  $3h$ , тогда как при зеркальном расположении это расстояние  $4h$  ( $h$  — полуширина канала).

Поступила 10 II 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б и р и х Р. В. О малых возмущениях плоскопараллельного течения с кубическим профилем скорости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
2. Р у д а к о в Р. Н. Спектр возмущений и устойчивость конвективного движения между вертикальными плоскостями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
3. Б и р и х Р. В., Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М., Р у д а к о в Р. Н. Гидродинамическая и тепловая неустойчивость стационарного конвективного движения. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
4. Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М. Об устойчивости плоскопараллельного конвективного движения относительно пространственных возмущений. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
5. Б и р и х Р. В., Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М., Р у д а к о в Р. Н. Устойчивость стационарного конвективного движения жидкости с продольным градиентом температуры. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
6. Б и р и х Р. В., Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М. О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
7. В о е в о д и н В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. М., «Наука», 1966.



Фиг. 6