

## О ДИФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН

Г. М. А р у т ю н я н

(Москва)

Показано, что для достаточно больших значений показателя адиабаты газа решение задачи о дифракции ударной волны произвольной интенсивности около малого угла имеет иное (по сравнению с известными) представление, и что в общем случае решение этой задачи допускает три представления. Для рассматриваемого случая получены соответствующие формулы давления.

Задача о дифракции ударной волны произвольной интенсивности около малого угла впервые была рассмотрена Лайтхиллом в работе [1]. Однако, как известно, она не была доведена до законченного аналитического решения, что явилось одной из причин, побудивших Тинга и Лудлоффа вновь рассмотреть эту задачу, но с применением иного метода решения [2]. В результате ими были получены аналитические формулы для давления. Как утверждают Лудлофф в [3], формула для давления в случае сверхзвуковых течений за набегающим скачком представляет при этом собой сумму из четырех членов с арккосинусами. Если же течение за набегающим скачком дозвуковое, то в этом случае два члена с арккосинусами должны быть заменены соответствующими членами с гиперболическими арккосинусами. Из этого, таким образом, следует, что в смысле структуры формул речь в общем случае может идти лишь о двух представлениях решения рассматриваемой задачи.

В работе [4] впоследствии было показано, что и методом Лайтхилла эта задача может быть обобщена до законченных аналитических формул. При этом для давления на дифрагируемой поверхности были получены оба представления решения, упомянутые в [3].

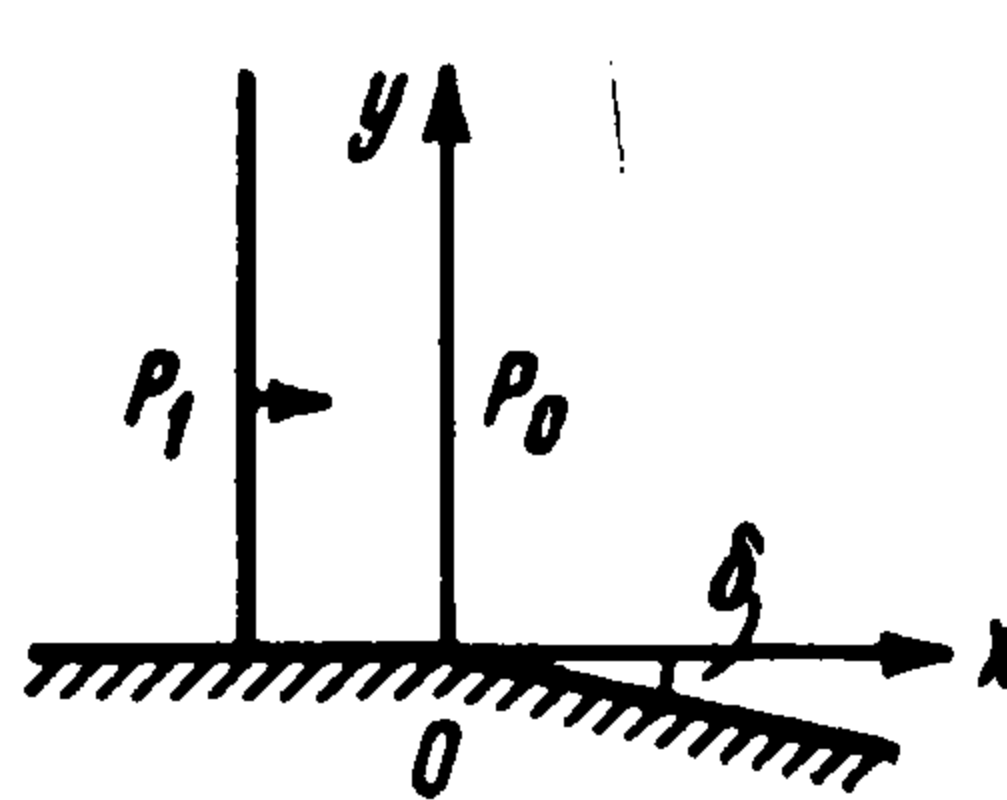
Дальнейший анализ с применением метода Лайтхилла, однако, показал, что эти два представления применимы, вообще говоря, лишь в том случае, если значения показателя адиабаты газа не очень велики. Ниже будет показано, что существует целая область в плоскости  $M_1\gamma$  ( $\gamma$  — показатель адиабаты газа,  $M_1$  — число Маха потока за набегающим скачком), где решение рассматриваемой задачи допускает третье представление, отличающееся от упомянутых в [3].

1. Пусть плоская ударная волна произвольной интенсивности распространяется со скоростью  $U$  по покоящейся среде, которая ограничена стенкой, поворачивающей в некоторой точке (фиг. 1) на малый угол  $\delta$ . После прихода скачка в вершину угла ударная волна дифрагирует с образованием области неустановившегося течения (при  $\delta < 0$  имеет место маховское отражение).

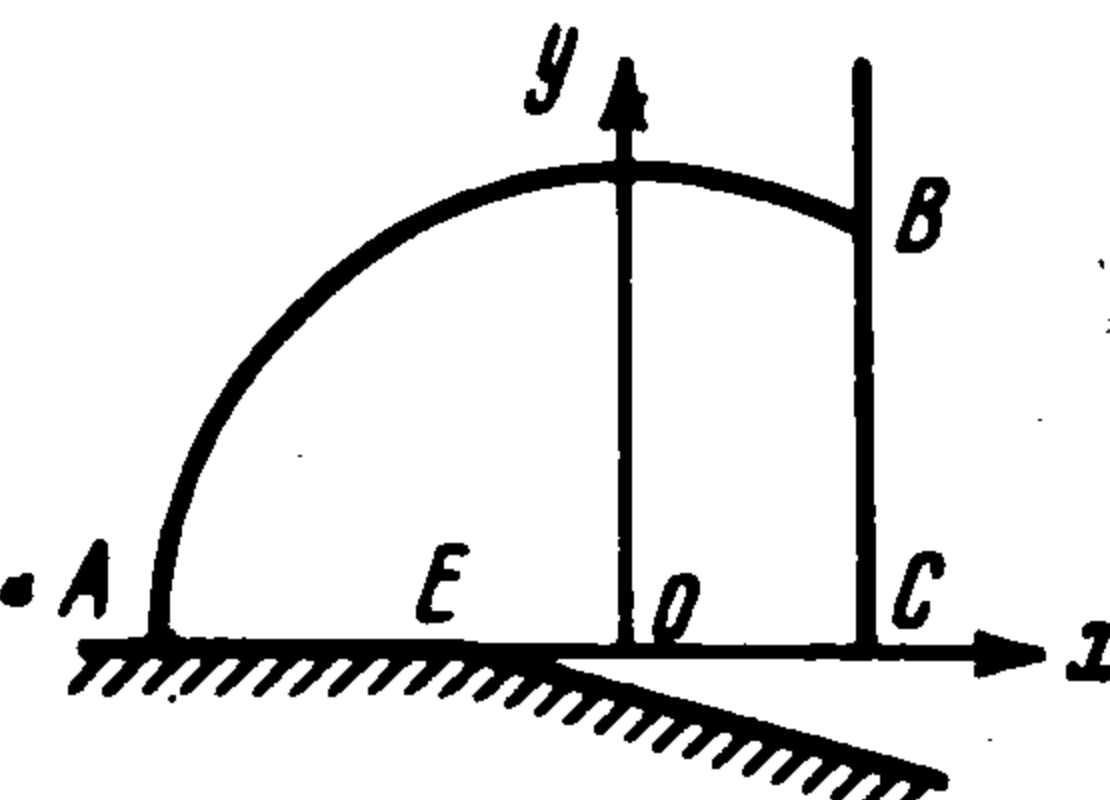
При дозвуковом течении за набегающим скачком область неустановившегося течения имеет вид, представленный на фиг. 2, а при сверхзвуковом — на фиг. 3. Автомодельные координаты  $x$ ,  $y$  связаны с  $X$ ,  $Y$  соотношениями

$$x = (X - u_1 t) / a_1 t, \quad y = Y / a_1 t$$

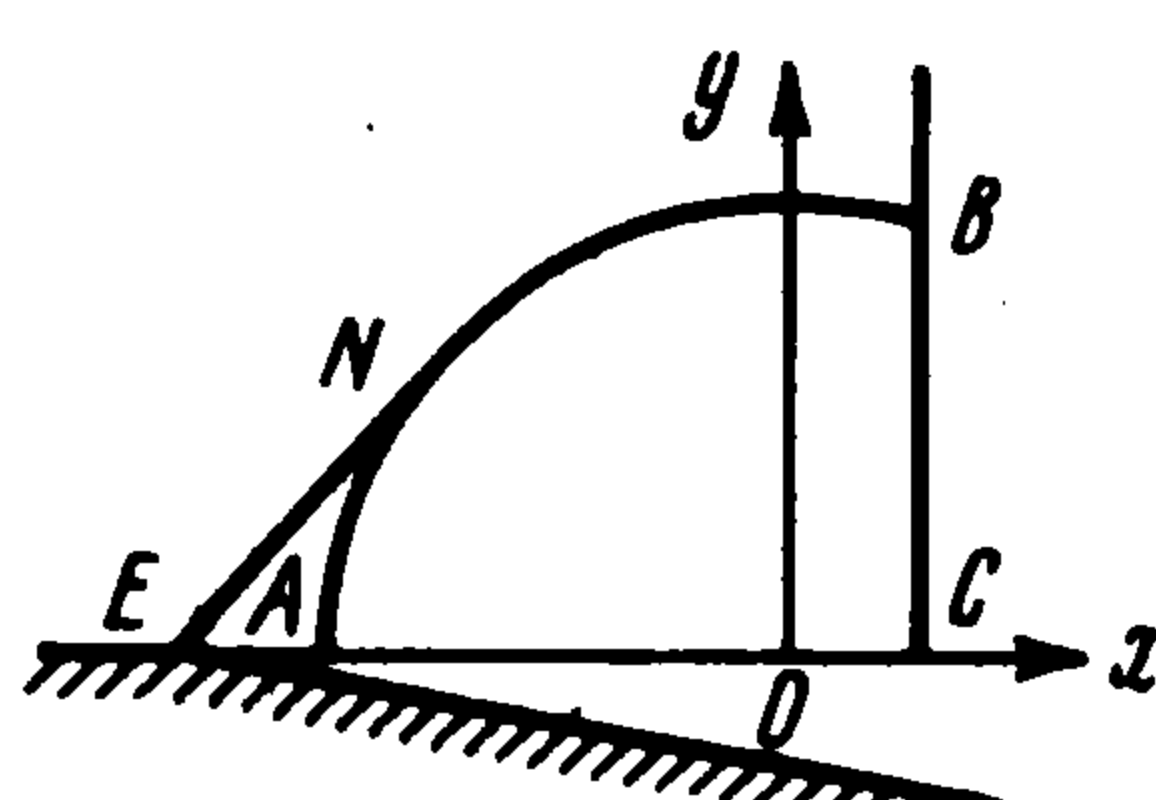
где  $u_1$  и  $a_1$  — соответственно скорости газа и звука за набегающим скачком, а время  $t$  отсчитывается от момента прихода скачка в вершину угла.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Заметим, что область  $ABCA$  определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 < 1, \\ y > 0, x < k, \end{aligned} \quad k = \left[ \frac{(\gamma - 1)M^2 + 2}{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)} \right]^{1/2} \quad \left( M = \frac{U}{a_0} \right) \quad (1.1)$$

Здесь  $M$  — число Маха набегающего на угол скачка; на фиг. 3  $ENAE$  — область стационарного течения Прандтля — Майера.

Последовательными преобразованиями

$$1) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad 2) \quad \theta_1 = \theta, \quad \rho = [1 - (1 - r^2)^{1/2}] r^{-1}$$

$$3) \quad z_1 = (k + ik') \{i - [2k'(\zeta - k - ik')^{-1}]\}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad \zeta = \rho e^{i\theta_1}$$

область  $ABCA$  отображается в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости  $z_1$ . В плоскости  $z_1$  скачку  $BC$  соответствует часть действительной оси  $z_1 > 1$ , отрезку  $CA$  — часть действительной оси  $-1 < z_1 < 1$ , а дуге окружности  $AB$  — часть действительной оси  $z_1 < -1$ . Вершина угла имеет координату

$$x_0 = - \frac{(M_1 + k)^2 + (M_1^2 - 1)(1 - k^2)}{(M_1 k + 1)^2}$$

После линеаризации соответствующих уравнений движения рассматриваемая краевая задача сводится к исследованию величины

$$p = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 u_1 a_1}$$

удовлетворяющей дифференциальным уравнениям:

при  $-1 < x_1 < 1, y_1 = 0$  (на стенке)

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = - \frac{\varepsilon \delta [D(x_1 - x_0) - 1]}{(x_1 - x_0)(1 - x_1^2)^{1/2} [\alpha + (1 - x_1)^{1/2}] [\beta + (1 - x_1)^{1/2}]} = F_1(x_1) \quad (1.2)$$

при  $1 < x_1 < \infty, y_1 = 0$  (на скачке  $BC$ )

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\varepsilon \delta (\alpha + \beta) [D(x_1 - x_0) - 1]}{(x_1 - x_0)(\alpha^2 - 1 + x_1)(\beta^2 - 1 + x_1)(x_1 + 1)^{1/2}} = F_2(x_1) \quad (1.3)$$

Здесь  $p_2$  — давление в области неустановившегося течения,  $\rho_1$  — плотность за набегающим скачком

$$\alpha = \sqrt{2}M(Mk + \sqrt{M^2k^2 - 1}), \quad \beta = \sqrt{2}M(Mk + \sqrt{M^2k^2 - 1})^{-1} \quad (1.4)$$

$$D = \left[ \frac{\alpha + \beta + \mu}{\alpha\beta\mu} + \frac{(M_1k + 1)^2}{2BM_1(M_1 + k)} \right] \left[ \frac{(\alpha + \mu)(\beta + \mu)}{\alpha\beta} \right]^{-1}$$

$$\varepsilon = \frac{[\alpha + (1 - x_0)^{1/2}][\beta + (1 - x_0)^{1/2}] |1 - x_0^2|^{1/2}}{\pi |1 - M_1^2|^{1/2}}, \quad \mu = \frac{\sqrt{2}(M_1 + k)}{M_1k + 1}$$

$$B = \frac{(\gamma + 1)(M^2 - 1)}{2[(\gamma - 1)M^2 + 2]}$$

Следует отметить, что приведенные выше соотношения были обобщены для произвольного значения  $\gamma$  в [4]; в работе [1] величина  $\gamma$  принимается с самого начала равной 1.4.

2. Из (1.2) для давления на стенке имеем

$$-\frac{p(x_1)}{\varepsilon\delta} = -\frac{1}{\varepsilon\delta} \int F_1(x_1) dx_1 + C_1 \quad (2.1)$$

где  $C_1$  — подлежащая определению константа интегрирования.

Рассмотрим интегральный член (2.1): положим  $x_1 = 1 - \xi^2$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon\delta} \int \frac{dx_1}{d\xi} F_1(x_1(\xi)) d\xi &= \int \frac{a_1 d\xi}{(\alpha + \xi)\sqrt{2 - \xi^2}} + \int \frac{a_2 d\xi}{(\beta + \xi)\sqrt{2 - \xi^2}} + \\ &+ \int \frac{a_3 d\xi}{(\lambda + \xi)\sqrt{2 - \xi^2}} + \int \frac{a_4 d\xi}{(\lambda - \xi)\sqrt{2 - \xi^2}} \quad (\lambda = \sqrt{1 - x_0}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$a_1 = \frac{D(\alpha^2 - \lambda^2) + 1}{(\lambda^2 - \alpha^2)(\alpha - \beta)}, \quad a_2 = \frac{D(\beta^2 - \lambda^2) + 1}{(\lambda^2 - \beta^2)(\beta - \alpha)}, \quad a_3 = -\frac{1}{2\lambda(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)}$$

$$a_4 = -\frac{1}{2\lambda(\alpha + \lambda)(\beta + \lambda)}$$

Обозначим интегралы правой части (2.2) соответственно  $J_\nu(\xi(x_1)) = J_\nu(x_1)$  ( $\nu = 1, \dots, 4$ ). Тогда из (2.1) и (2.2) будем иметь

$$\frac{1}{\varepsilon\delta} \int F_1(x_1) dx_1 = 2 \sum_{\nu=1}^4 J_\nu(x_1) \quad (2.3)$$

Можно показать, что при любых  $M_1$  и  $\gamma$

$$J_1(x_1) = \frac{a_1}{\sqrt{\alpha^2 - 2}} \arcsin \frac{2 + \alpha\sqrt{1 - x_1}}{\sqrt{2}(\alpha + \sqrt{1 - x_1})} \quad (2.4)$$

При любых же  $\gamma$  (2.5)

$$J_3(x_1) = -\chi a_3 \ln \varphi_+(x_1), \quad J_4(x_1) = \chi a_4 \ln |\varphi_-(x_1)| \quad (M_1 < 1)$$

$$J_3(x_1) = -i\chi a_3 \arcsin \theta_+(x_1), \quad J_4(x_1) = i\chi a_4 \arcsin \theta_-(x_1) \quad (M_1 > 1) \quad (2.6)$$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{1 + x_0}}, \quad \theta_\pm(x_1) = \frac{2 \pm \sqrt{(1 - x_0)(1 - x_1)}}{\sqrt{2}(\sqrt{1 - x_0} \pm \sqrt{1 - x_1})}$$

$$\varphi_\pm(x_1) = \frac{2(2 \pm \sqrt{(1 - x_0)(1 - x_1)} + \sqrt{(1 + x_0)(1 + x_1)})}{\sqrt{1 - x_1} \pm \sqrt{1 - x_0}}$$

3. Интеграл  $J_2(x_1)$  рассмотрим особо. Для этого введем замену  $\xi = \tau - \beta$  в  $J_2(\xi)$ . Тогда

$$a_2 \int \frac{d\xi}{(\beta + \xi) \sqrt{2 - \xi^2}} = a_2 \int \frac{d\tau}{\tau \sqrt{2 - \beta^2 + 2\beta\tau - \tau^2}} \quad (3.1)$$

Можно показать, что дискриминант подкоренного выражения (3.1) всегда отрицателен. Кроме того, из (1.4) и (1.1) следует, что  $\beta = \beta(M, \gamma)$ , поэтому  $2 - \beta^2$  можно рассматривать как некоторую функцию  $M^2$  и  $\gamma$ . И если бы в плоскости  $M^2\gamma$  существовала некоторая кривая, на которой  $2 - \beta^2 = 0$ , то она, очевидно, служила бы границей между областями, где  $2 - \beta^2 < 0$  и  $2 - \beta^2 > 0$ . Покажем, что такая кривая действительно существует.

Воспользовавшись (1.4), условие  $2 - \beta^2 < 0$  можно записать в виде

$$2Mk \sqrt{M^2k^2 - 1} < M^2 - 2M^2k^2 + 1 \quad (3.2)$$

Покажем, что правая часть (3.2) всегда положительна. Используя явное выражение (1.1) для  $k$ , это условие можно записать в виде

$$F(M^2, \gamma) = \frac{2}{\gamma - 1} M^4 - \frac{3 - \gamma}{\gamma - 1} M^2 - 1 > 0 \quad (3.3)$$

Так как  $F(M^2, \gamma) = 0$  при  $M^2 = 1$  и  $M^2 = 1/2(1 - \gamma)$ , а  $1 - \gamma < 0$ , то в области физических значений  $M^2$  (точнее, в той части плоскости  $M^2\gamma$ , где  $M^2 > 1$ ) функция  $F(M^2, \gamma)$  имеет определенный знак. И так как

$$\lim_{M^2 \rightarrow \infty} F(M^2, \gamma) = \infty \quad (M^2 \rightarrow \infty)$$

то отсюда заключаем, что  $F(M^2, \gamma) > 0$ , т. е. правая часть (3.2) действительно положительна.

Левая часть (3.2) также всегда положительна, ибо, как легко показать, всегда  $Mk > 1$ . Следовательно, обе части (3.2) можно возвести в квадрат без нарушения неравенства. Тогда условие (3.2) можно записать в эквивалентной форме

$$4M^4k^2 < M^4 + 2M^2 + 1 \quad (3.4)$$

Используя явное выражение (1.1) для  $k$ , из (3.4) будем иметь

$$\frac{4M^4[(\gamma - 1)M^2 + 2]}{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)} < M^4 + 2M^2 + 1 \quad (3.5)$$

Учитывая, что всегда  $2\gamma M^2 - (\gamma - 1) > 0$ , условие (3.5) можно записать в виде

$$2(2 - \gamma)M^6 + (3\gamma - 7)M^4 + 2M^2 - (\gamma - 1) > 0 \quad (3.6)$$

Левая часть (3.6) есть полином третьей степени относительно  $M^2$ . Можно показать, что один из его корней равен  $(\gamma - 1)[2(2 - \gamma)]^{-1}$ , а два других — единице. Следовательно, условие  $2 - \beta^2 \leq 0$  окончательно можно записать в виде

$$2(2 - \gamma)(M^2 - 1)^2 \left( M^2 - \frac{\gamma - 1}{2(2 - \gamma)} \right) \geq 0 \quad (3.7)$$

Условию  $2 - \beta^2 = 0$  в плоскости  $M^2\gamma$  будут соответствовать кривые

$$\gamma = 2, \quad M^2 = \frac{\gamma - 1}{2(2 - \gamma)} = f_1(\gamma) \quad (3.8)$$

представленные на фиг. 4 для области физических значений  $M^2$ . (Заметим, что  $f_1(5/3) = 1$ , а  $f_1(2) = \infty$ .)

Из (3.7) непосредственно следует, что  $2 - \beta^2 < 0$  левее кривой  $f_1(\gamma)$ , т. е. в областях (1) и (2). В области же (3) (исключая кривую  $\gamma = 2$ ) всегда  $2 - \beta^2 > 0$ .

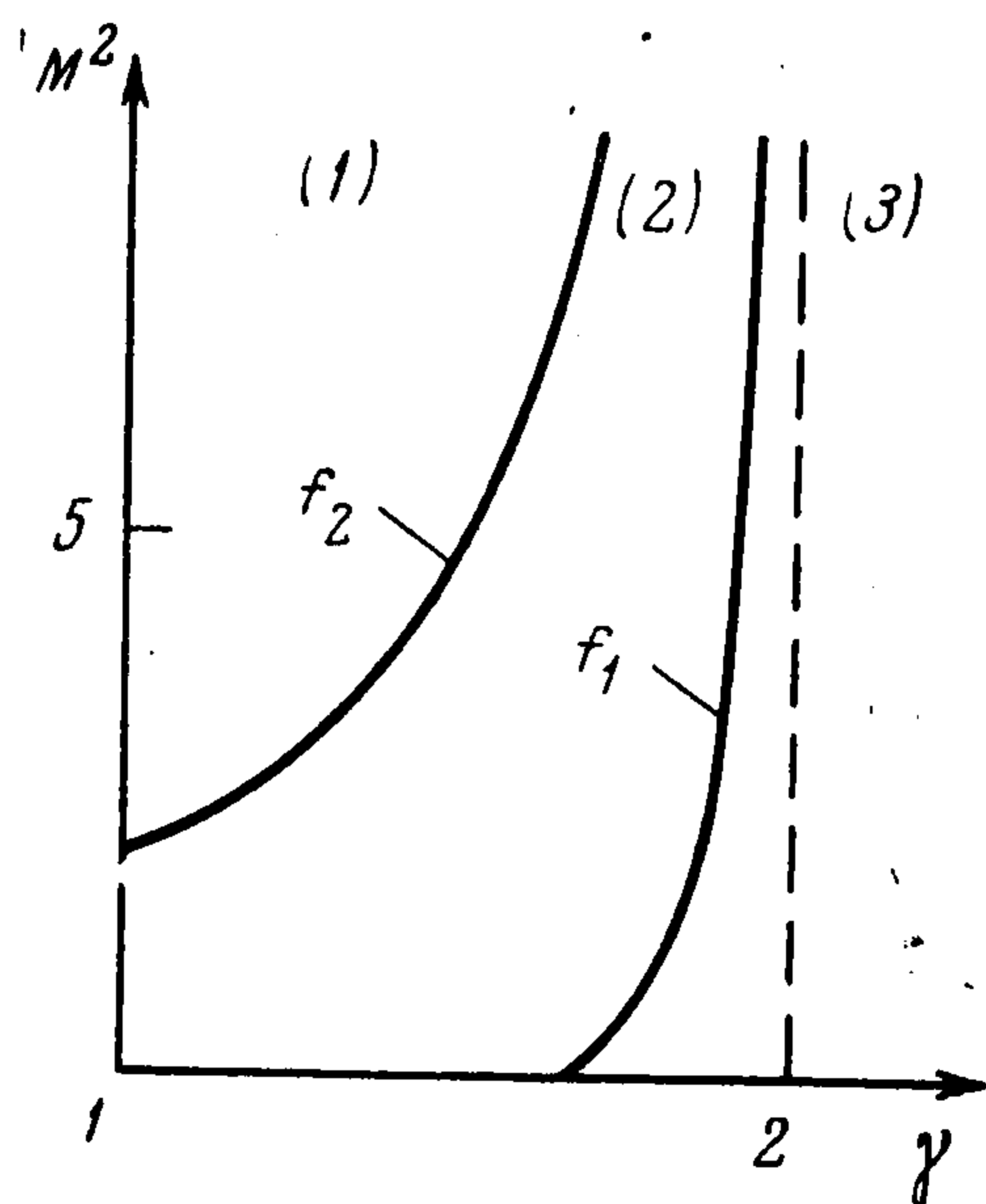
На фиг. 4 приведена также кривая  $f_2(\gamma)$ , на которой  $M_1 = 1$ . Она находится из известного соотношения

$$M_1 = \frac{2(M^2 - 1)}{\sqrt{[2\gamma M^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M^2 + 2]}} \quad (3.9)$$

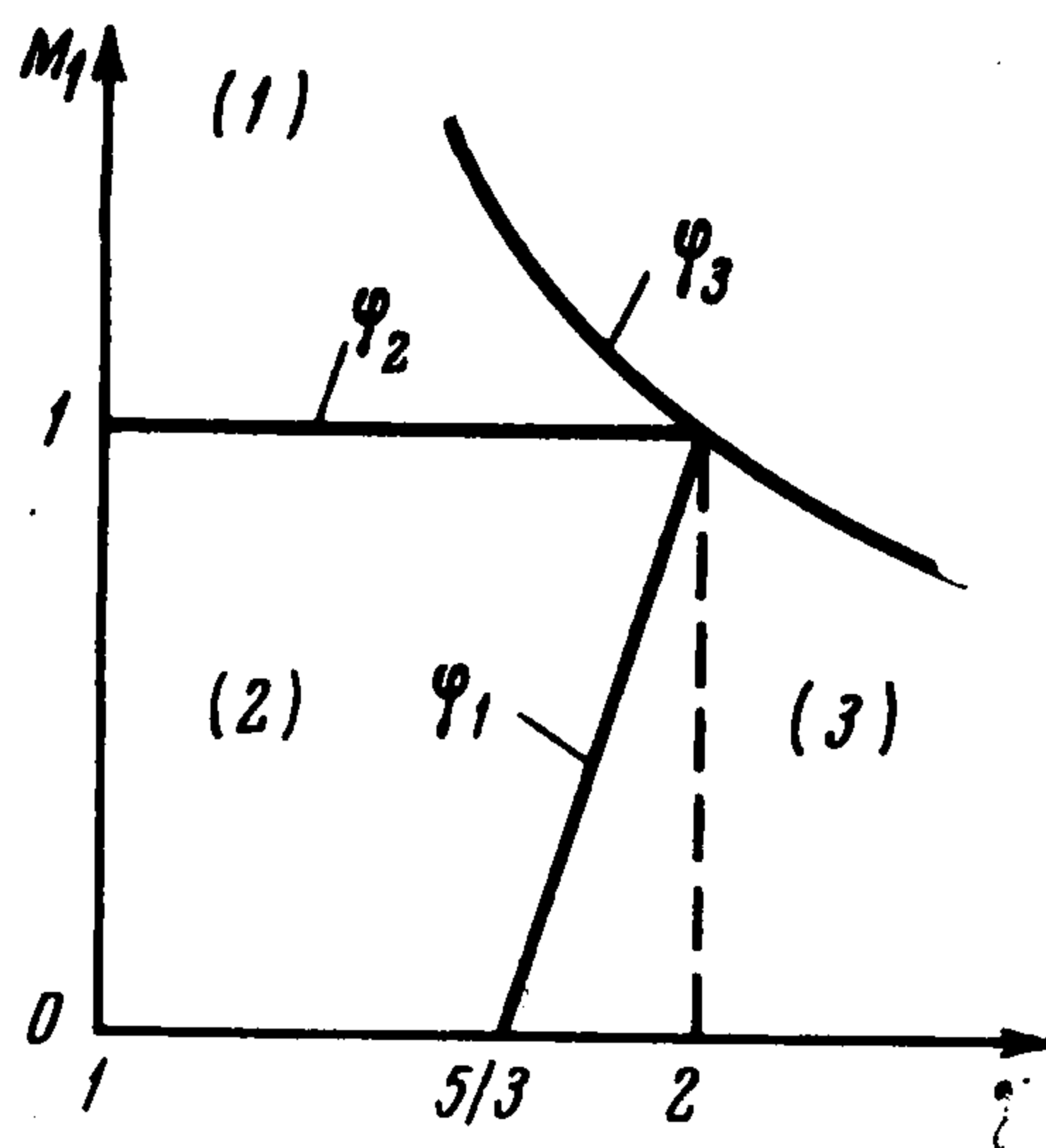
связывающего между собой величины  $M_1$  и  $M$ , если положить в нем  $M_1 = 1$ . Можно показать, что при этом

$$M^2 = \frac{7 - \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 2\gamma + 17}}{4(2 - \gamma)} = f_2(\gamma) \quad \left( f_2(1) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, f_2(2) = \infty \right)$$

Таким образом, кривые  $f_1(\gamma)$  и  $f_2(\gamma)$  имеют одну и ту же асимптоту  $\gamma = 2$ , и так как  $f_2(\gamma) > f_1(\gamma)$ , то из изложенного выше заключаем, что в области (1) значение  $M_1 > 1$ , а в областях (2) и (3) значение  $M_1 < 1$ .



Фиг. 4



Фиг. 5

Если при помощи преобразования (3.9) перейти от  $M^2, \gamma$  к переменным  $M_1, \gamma$ , то в плоскости  $M_1\gamma$  рассматриваемые области будут иметь вид, представленный на фиг. 5. Кривые  $f_1(\gamma)$  и  $f_2(\gamma)$  преобразуются при этом соответственно в

$$\varphi_1(\gamma) = \frac{3\gamma - 5}{(\gamma - 1)(3 - \gamma)}, \quad \varphi_2(\gamma) = 1 \quad (3.11)$$

Приведенная на этой фигуре кривая  $\varphi_3(\gamma)$  соответствует предельно сильным ударным волнам и получается из (3.9) как

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M_1 = \left( \frac{2}{\gamma(\gamma-1)} \right)^{1/2} = \varphi_3(\gamma) \quad (3.12)$$

Физический смысл, очевидно, имеет лишь та часть плоскости  $M_1\gamma$ , которая лежит ниже этой кривой.

4. Итак, в областях (1) и (2) фиг. 5 имеем  $2 - \beta^2 < 0$ , а в области (3) (исключая кривую  $\gamma = 2$ ) имеем  $2 - \beta^2 > 0$ . Тогда, как легко показать,

$$J_2(x_1) = \quad (4.1)$$

$$= \begin{cases} a_2 (\beta^2 - 2)^{-1/2} \arcsin \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{2} (2 + \beta \sqrt{1-x_1}) (\beta + \sqrt{1-x_1})^{-1} \right\} & \text{в обл. (1) и (2)} \\ -a_2 (2 - \beta^2)^{-1/2} \ln \psi(x_1) & \text{в обл. (3)} \end{cases}$$

$$\psi(x_1) = \frac{2(2 - \beta \sqrt{1-x_1} + \sqrt{(2 - \beta^2)(1+x_1)})}{\beta + \sqrt{1-x_1}}$$

Если обратиться теперь к (2.3) и учитывать (2.1), то из (2.4) — (2.6) и (4.1) можно заключить, что формула для давления на стенке в области (1), т. е. при сверхзвуковых течениях за набегающим скачком, действительно, как утверждается в [3], представляет собой сумму из четырех членов с арккосинусами. Что же касается дозвуковых течений за набегающим скачком, то формула давления будет при этом такой, как это утверждается в [3], т. е. будет представлять собой сумму членов с двумя арккосинусами и двумя гиперболическими арккосинусами, только в области (2).

В тех же из дозвуковых случаев, которым соответствует область (3) фиг. 5, формула для давления, как это следует из полученных соотношений, будет представлять собой сумму членов с одним арккосинусом и тремя гиперболическими арккосинусами. Следовательно, в этом случае необходимо говорить о третьем представлении решения рассматриваемой задачи, упущенном, очевидно, из виду в работе [3]. Рассмотрим этот случай более подробно.

Подставив в (2.3) найденные для области (3) значения  $J_\nu(x_1)$  из (2.1), для давления на стенке будем иметь

$$\frac{p}{2\varepsilon\delta} = \frac{a_1}{\sqrt{\alpha^2 - 2}} \arcsin \frac{2 + \alpha \sqrt{1-x_1}}{\sqrt{2}(\alpha + \sqrt{1-x_1})} - \frac{a_2}{\sqrt{2 - \beta^2}} \ln \psi(x_1) -$$

$$- \frac{a_3}{\sqrt{1+x_0}} \ln \varphi_+(x_1) + \frac{a_4}{\sqrt{1+x_0}} \ln |\varphi_-(x_1)| - \frac{C_1}{2} \quad (4.2)$$

Так как в точке  $x_0$  ( $-1 < x_0 < 1$ ) последнее выражение имеет логарифмическую особенность, то для интервала  $-1 < x_1 < x_0$  константа интегрирования  $C_1$  должна находиться из условия  $p(-1) = 0$ , а в интервале  $x_0 < x_1 < 1$  — из условия  $p(1) = p_c$ , где  $p_c$  — давление в точке  $C$  скачка (фиг. 2,3)

Для определения  $p_c$  необходимо знать распределение давления на дифрагированном скачке  $BC$ , что может быть достигнуто путем интегрирования (1.3)

$$p(x_1) = \int F_2(x_1) dx_1 + C_2 \quad (4.3)$$

Константа интегрирования  $C_2$  здесь должна находиться из очевидного условия  $p(\infty) = 0$ . В результате приходим к следующей формуле давления на дифрагированном скачке для области (3):

$$-\frac{p}{k\delta} = s_1 \arccos \left( \frac{1+x_1}{\alpha^2-1+x_1} \right)^{1/2} + \frac{is_2}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x_1} - \sqrt{2-\beta^2}}{\sqrt{1+x_1} + \sqrt{2-\beta^2}} - s_3 \ln \frac{\sqrt{1+x_1} - \sqrt{1+x_0}}{\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_0}} \quad (4.4)$$

Коэффициенты  $s_1 - s_3$  в (4.4) равны

$$s_1 = \frac{2a_1\varepsilon}{k\sqrt{\alpha^2-2}}, \quad s_2 = \frac{2a_2\varepsilon}{k\sqrt{\beta^2-2}}, \quad s_3 = -\frac{\varepsilon(\alpha+\beta)}{k(\alpha^2-\lambda^2)(\beta^2-\lambda^2)\sqrt{1+x_0}}$$

Определив затем указанным выше способом константу интегрирования  $C_1$ , получим формулы давления на стенке для области (3)

при  $-1 < x_1 < x_0$

$$-\frac{p}{k\delta} = q_1 \arccos \frac{2+\alpha\sqrt{1-x_1}}{\sqrt{2}(\alpha+\sqrt{1-x_1})} - iq_2 \ln \frac{\psi(x_1)}{2\sqrt{2}} + q_3 \ln \frac{\Phi_+(x_1)}{2\sqrt{2}} - q_4 \ln \frac{\Phi_-(x_1)}{2\sqrt{2}} \quad (4.5)$$

при  $x_0 < x_1 < 1$

$$-\frac{p}{k\delta} = q_1 \arccos \frac{2+\alpha\sqrt{1-x_1}}{\sqrt{2}(\alpha+\sqrt{1-x_1})} - iq_2 \ln \frac{\psi(x_1)}{2\sqrt{2}} + q_3 \ln \frac{\sqrt{1-x_0}\Phi_+(x_1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{1+x_0})} - q_4 \ln \frac{\sqrt{1-x_0}|\Phi_-(x_1)|}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{1+x_0})} - q_5 \quad (4.6)$$

Здесь

$$q_1 = s_1, \quad q_2 = s_2, \quad q_3 = \frac{2a_3\varepsilon}{k\sqrt{1+x_0}}, \quad q_4 = \frac{2a_4\varepsilon}{k\sqrt{1+x_0}}, \\ q_5 = s_3 \ln \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+x_0}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+x_0}}$$

Из (4.5) и (4.6) следует, что третье представление решения рассматриваемой задачи, т. е. формула давления для области (3) фиг. 5, действительно, есть сумма членов с одним арккосинусом и тремя гиперболическими ареакосинусами.

Автор благодарит С. А. Христиановича, С. В. Фальковича и Б. И. Заславского за обсуждение полученных результатов и интерес к работе.

Поступила 13 XI 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L i g h t h i l l. Diffraction of blasts, I. Proc. Roy. Soc. A 198, 1949, No. 1055.
2. T i n g L., L u d l o f f H. F. Aerodynamics of blasts. J. Aeronaut. Science., 1952, vol. 19, No. 5.
3. Л у д л о ф ф Г. Ф. Аэродинамика взрывных волн. Сб.: «Проблемы механики», М., Изд-во иностр. лит., 1955.
4. А р у т ю н я н Г. М. О взаимодействии ударной волны с клином. Докл. АН АрмССР, 1968, т. 46, № 4.